

Gianni Comini

FONDAMENTI DI  
TERMODINAMICA APPLICATA

TERZA EDIZIONE



SGE EDITORIALI  
PADOVA

Gianni Comini

FONDAMENTI DI  
TERMODINAMICA APPLICATA

TERZA EDIZIONE

SGE EDITORIALI  
PADOVA

Volumi pubblicati

G. Comini e G. Cortella, ENERGETICA GENERALE

G. Comini e G. Cortella, FONDAMENTI DI TRASMISSIONE DEL CALORE

G. Comini, FONDAMENTI DI TERMOFLUIDODINAMICA COMPUTAZIONALE

Copyright © 2007

Servizi Grafici Editoriali snc  
Via Lagrange, 3 - 35143 Padova  
Tel. 049 620319 - Fax 049 623564  
e-mail: sge@sgeditoriali.it

SOCIETÀ ISCRITTA NEL REGISTRO NAZIONALE DELLA  
STAMPA IN DATA 10/12/1996 AL N. 5507

1ª Edizione 1996

2ª Edizione 1998

3ª Edizione 2000

Ristampa corretta novembre 2001

Ristampa settembre 2004

Ristampa corretta ottobre 2007

I diritti di traduzione, di riproduzione e di adattamento  
totale o parziale, con qualsiasi mezzo  
(compreso i microfilms e le copie fotostatiche)  
sono riservati per tutti i Paesi.

**Primo principio: non si può avere qualcosa per niente.**  
**Secondo principio: non si può nemmeno andare in pareggio.**

*(Studente anonimo citato da Holman)*

## Prefazione

*Il volume è scritto per le necessità didattiche dei corsi di Fisica Tecnica tenuti all'Università di Udine per allievi ingegneri meccanici, gestionali e civili. La trattazione risulta particolarmente semplice in quanto non trascura alcun "passaggio" nelle dimostrazioni ed illustra gli argomenti, tradizionalmente più ostici, con molti esempi di applicazione. La scelta dei contenuti è determinata dalle esigenze dei corsi successivi, con particolare riguardo ai corsi di Energetica, Macchine ed Impianti Tecnici. La presentazione è strutturata in modo da consentire l'individuazione di vari percorsi didattici abbreviati che possono non comprendere, ad esempio, il bilancio dell'energia meccanica, le relazioni di Maxwell, l'analisi exergetica, alcuni approfondimenti sui cicli ed il moto dei fluidi comprimibili. Pertanto, il testo può venire utilizzato anche nei corsi di diploma ed in quelle situazioni, ormai frequenti, nelle quali l'insegnamento dell'intera Fisica Tecnica deve venir compreso in un solo modulo didattico.*

*L'impostazione generale è quella classica e, nell'esposizione dei principi, viene seguito il percorso storico che ha portato alla loro scoperta, piuttosto che il percorso assiomatico nel quale gli enunciati matematici precedono l'esame degli aspetti fisici che li giustificano.*

*Nell'analisi dei sistemi aperti, si distingue sempre chiaramente tra inizio e fine di processi transitori, ed entrata e uscita in processi stazionari, evitando l'uso indifferenziato di notazioni come "1" e "2". Inoltre, tutte le equazioni di bilancio, si tratti di massa, energia, entropia od exergia, vengono ricavate seguendo un'identica procedura generale e vengono successivamente riferite alle più comuni applicazioni tecniche.*

*I metodi di calcolo delle proprietà termodinamiche, illustrati nel testo, si basano sull'impiego del "personal computer" e tengono conto della possibilità, non più remota, di utilizzare programmi applicativi al posto di tabelle e diagrammi.*

*Un altro elemento di novità riguarda la trattazione dell'aria umida, dove il diagramma di Carrier viene costruito ed utilizzato molto più*

*estesamente del diagramma di Mollier, pur illustrato in dettaglio. In questo modo viene facilitato il successivo impiego professionale del diagramma ASHRAE, molto più simile al diagramma di Carrier che al diagramma di Mollier.*

*Lo studio dei processi di combustione viene particolarmente curato, soprattutto negli aspetti che riguardano il funzionamento dei generatori di calore e l'analisi dei fumi. Analogamente, nell'esame dei cicli termodinamici diretti ed inversi, non vengono mai dimenticate le applicazioni illustrando con maggiore dettaglio gli impianti più diffusi e le problematiche che, più di frequente, vengono incontrate durante la normale attività professionale.*

*Infine, è doveroso ricordare che un testo didattico non è mai opera del solo autore. Innumerevoli sono le influenze derivanti da anni di studi: nel mio caso, prima fra tutte, quella della "scuola padovana" iniziata da Lino Mattarolo e portata avanti da Alberto Cavallini e Renato Lazzarin. Certamente importantissimi sono anche gli spunti forniti dalle opere di altri colleghi di Università geograficamente più lontane. Spero di non peccare di presunzione citando solo: Gaetano Alfano, Vittorio Betta, Alessandro Cocchi, Rita Mastrullo, Pietro Mazzei e Raffaele Vanoli, in rigoroso ordine alfabetico. Fondamentale, tuttavia, è stata la collaborazione ricevuta dai colleghi dell'Università di Udine, Giovanni Cortella, Stefano Del Giudice ed Onorio Saro che hanno utilizzato, come dispense, le prime stesure del volume. In particolare, le discussioni avute con Stefano Del Giudice mi sono state di grande aiuto e mi hanno convinto che questo testo avrebbe molto guadagnato in qualità, se solo fossi riuscito a persuadere Stefano ad esserne coautore.*

*Udine, settembre 1997.*

*Gianni Comini*

*La prima edizione è stata completamente rivista, correggendo numerosi errori tipografici. Ringrazio i colleghi e gli studenti che mi hanno aiutato con numerose segnalazioni.*

*Udine, novembre 1998.*

*Gianni Comini*

*La seconda edizione è stata rivista in base alle molteplici segnalazioni pervenute. Ho così modificato profondamente il testo, ponendomi, come obiettivo principale un'esposizione più chiara dei concetti fondamentali. In tale compito mi sono state di grande aiuto e stimolo le numerose osservazioni e note di Stefano Del Giudice al quale, ancora una volta, va la mia gratitudine.*

*Per facilitare l'uso manualistico del volume ho poi aggiunto, in Appendice, numerose tabelle relative alle proprietà termodinamiche di acqua, R134a, aria standard e prodotti della combustione del metano in aria standard.*

*Infine, ho esteso le analisi exergetiche ai principali cicli termodinamici, al fine anche di rimarcare la differenza esistente tra i rendimenti di ciclo ed impianto.*

*Udine, gennaio 2000.*

*Gianni Comini*

*Rispetto alla terza edizione, sono stati corretti alcuni errori materiali. Inoltre, sulla base dei files preparati dal Prof. Marco Manzan, con la collaborazione del Dr. Ing. Michele Bivi e del Dr. Ing. Giulio Del Frate, sono stati ridisegnati i diagrammi termodinamici riportati in Appendice.*

*Udine, ottobre 2001.*

*Gianni Comini*

---

# INDICE

---

## ***CAPITOLO 1***

### ***UNITÀ DI MISURA***

<b>1.1 GENERALITÀ</b>	<i>pag.</i>	1
<b>1.2 SISTEMA INTERNAZIONALE</b>	»	3
<b>1.3 USO DEL SISTEMA INTERNAZIONALE</b>	»	5
<b>1.4 CAMBIAMENTO DI UNITÀ DI MISURA</b>	»	7
<b>1.5 SCALE DI TEMPERATURA</b>	»	12
1.5.1 Scala di Temperature di Gas Ideale	»	15
1.5.2 Scala Internazionale Pratica delle Temperature	»	17
<b>1.6 CONCLUSIONI</b>	»	18

## ***CAPITOLO 2***

### ***SISTEMI TERMODINAMICI***

<b>2.1 GENERALITÀ</b>	»	21
<b>2.2 SISTEMI CHIUSI</b>	»	21
<b>2.3 SISTEMI APERTI</b>	»	24
<b>2.4 CONSERVAZIONE DELLA MASSA</b>	»	25
<b>2.5 LAVORO IN UN SISTEMA CHIUSO</b>	»	26
2.5.1 Bilancio dell'Energia Meccanica nei Sistemi Chiusi	»	30
<b>2.6 LAVORO IN UN SISTEMA APERTO</b>	»	32
2.6.1 Lavoro Tecnico Utile in un Sistema Aperto	»	32
2.6.2 Bilancio dell'Energia Meccanica per Sistemi a Deflusso Monodimensionale Stazionario	»	34
2.6.3 Calcolo delle Perdite di Carico	»	43
<b>2.7 CONCLUSIONI</b>	»	47



**CAPITOLO 3****PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA**

<b>3.1 GENERALITÀ</b>	<i>pag.</i>	49
<b>3.2 PRIMO PRINCIPIO PER I SISTEMI CHIUSI</b>	»	49
<b>3.3 PRIMO PRINCIPIO PER I SISTEMI APERTI</b>	»	52
3.3.1 Primo Principio per Sistemi a Deflusso Monodimensionale Stazionario	»	56
<b>3.4 ESEMPI DI APPLICAZIONE</b>	»	58
3.4.1 Compressori e Turbine	»	58
3.4.2 Scambiatori di Calore	»	59
3.4.3 Valvole di Laminazione	»	61
3.4.4 Sistemi di Riempimento	»	62
<b>3.5 PRIMO PRINCIPIO PER TRASFORMAZIONI CICLICHE</b>	»	64
<b>3.6 CALORI SPECIFICI</b>	»	68
3.6.1 Calori specifici delle Sostanze Incomprimibili	»	71
<b>3.7 CONCLUSIONI</b>	»	76

**CAPITOLO 4****SECONDO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA**

<b>4.1 GENERALITÀ</b>	»	77
<b>4.2 ENUNCIATI DAL SECONDO PRINCIPIO</b>	»	78
<b>4.3 REVERSIBILITÀ ED IRREVERSIBILITÀ</b>	»	80
<b>4.4 CICLI TERMODINAMICI REVERSIBILI</b>	»	82
<b>4.5 CICLO DI CARNOT E TEMPERATURA TERMODINAMICA</b>	»	84
<b>4.6 ENTROPIA</b>	»	90
4.6.1 Disuguaglianza di Clausius	»	92
<b>4.7 PRIMO PRINCIPIO RIFERITO AI PARAMETRI INTERNI</b>	»	95
4.7.1 Entropia delle Sostanze Incomprimibili	»	96
4.7.2 Primo Principio e Bilancio dell'Energia Meccanica	»	97
<b>4.8 BILANCI DI ENTROPIA</b>	»	99
4.8.1 Bilancio di Entropia per i Sistemi Chiusi	»	100
4.8.2 Bilancio di Entropia per i Sistemi Aperti	»	104
<b>4.9 RELAZIONI DI MAXWELL</b>	»	109

4.9.1	Temperatura e Volume Specifico come Variabili Indipendenti	<i>pag.</i> 112
4.9.2	Temperatura e Pressione come Variabili Indipendenti	» 114
<b>4.10</b>	<b>CONCLUSIONI</b>	» 116
 <b>CAPITOLO 5</b>		
<b>GAS IDEALI</b>		
<b>5.1</b>	<b>GENERALITÀ</b>	» 119
<b>5.2</b>	<b>EQUAZIONE DI STATO DEI GAS IDEALI</b>	» 119
5.2.1	Calori Specifici dei Gas Ideali	» 126
<b>5.3</b>	<b>ENTROPIA DEI GAS IDEALI</b>	» 129
<b>5.4</b>	<b>TRASFORMAZIONI DEI GAS IDEALI</b>	» 131
5.4.1	Isocore	» 131
5.4.2	Isobare	» 133
5.4.3	Isoterme	» 134
5.4.4	Isoentropiche ed Adiabatiche	» 137
5.4.5	Rendimenti Isoentropici	» 144
<b>5.5</b>	<b>TRASFORMAZIONI POLITROPICHE</b>	» 147
5.5.1	Calore Specifico di una Trasformazione Politropica	» 151
5.5.2	Rendimenti Politropici	» 155
<b>5.6</b>	<b>IMPIANTI DI COMPRESSIONE</b>	» 163
5.6.1	Cicli dei Compressori Alternativi	» 168
5.6.2	Rendimento Volumetrico dei Compressori Alternativi	» 170
<b>5.7</b>	<b>CONCLUSIONI</b>	» 172
 <b>CAPITOLO 6</b>		
<b>SOSTANZE PURE</b>		
<b>6.1</b>	<b>GENERALITÀ</b>	» 173
<b>6.2</b>	<b>DIAGRAMMI (<math>p, v, T</math>) e (<math>p, T</math>)</b>	» 174
<b>6.3</b>	<b>DIAGRAMMA (<math>p, v</math>)</b>	» 178
6.3.1	Equazione di Clausius-Clapeyron	» 180
6.3.2	Liquido Sottoraffreddato e Vapore Surriscaldato	» 186
<b>6.4</b>	<b>FATTORE DI COMPRIMIBILITÀ</b>	» 188
<b>6.5</b>	<b>EQUAZIONI DI STATO DEGLI AERIFORMI</b>	» 192

6.5.1	Equazione di Van der Waals	<i>pag.</i> 193
6.5.2	Equazione del Viriale	» 194
6.5.3	Equazione di Lee-Kesler	» 195
<b>6.6</b>	<b>DIAGRAMMI TERMODINAMICI</b>	» 196
6.6.1	Diagramma (T, s)	» 198
6.6.2	Diagramma (h, s)	» 200
6.6.3	Diagramma (p, h)	» 201
<b>6.7</b>	<b>PROPRIETÀ TERMODINAMICHE DEGLI AERIFORMI</b>	» 203
6.7.1	Variazioni di Entropia	» 204
6.7.2	Variazioni di Entalpia	» 208
6.7.3	Applicazione ai Vapori Surriscaldati	» 211
<b>6.8</b>	<b>CONCLUSIONI</b>	» 212
 <b>CAPITOLO 7</b>		
<b>MISCELE DI GAS</b>		
<b>7.1</b>	<b>GENERALITÀ</b>	» 213
<b>7.2</b>	<b>COMPOSIZIONE DELLE MISCELE GASSOSE</b>	» 213
<b>7.3</b>	<b>MISCELE DI GAS IDEALI</b>	» 216
<b>7.4</b>	<b>PROPRIETÀ DELLE MISCELE DI GAS IDEALI</b>	» 220
7.4.1	Miscelazione di Gas Ideali	» 223
<b>7.5</b>	<b>MISCELE DI GAS REALI</b>	» 229
<b>7.6</b>	<b>PROPRIETÀ DELLE MISCELE DI GAS REALI</b>	» 230
<b>7.7</b>	<b>CONCLUSIONI</b>	» 231
 <b>CAPITOLO 8</b>		
<b>ARIA UMIDA</b>		
<b>8.1</b>	<b>GENERALITÀ</b>	» 233
<b>8.2</b>	<b>ARIA SECCA E VAPORE D'ACQUA</b>	» 233
<b>8.3</b>	<b>PROPRIETÀ TERMODINAMICHE DELL'ARIA UMIDA</b>	» 235
8.3.1	Umidità Specifica	» 235
8.3.2	Umidità Relativa	» 236
8.3.3	Entalpia dell'Aria Umida	» 237
8.3.4	Calore Specifico a Pressione Costante dell'Aria Umida	» 239

<b>8.4 DIAGRAMMI PSICROMETRICI</b>	<i>pag.</i> 239
8.4.1 Diagramma di Carrier	» 239
8.4.2 Diagramma di Mollier	» 242
8.4.3 Diagramma di ASHRAE	» 244
<b>8.5 MISURE SULL'ARIA UMIDA</b>	» 244
8.5.1 Temperatura di Rugiada	» 245
8.5.2 Temperatura di Bulbo Bagnato	» 246
8.5.3 Individuazione dello Stato dell'Aria Umida	» 248
<b>8.6 TRASFORMAZIONI DELL'ARIA UMIDA</b>	» 249
8.6.1 Mescolamento Adiabatico	» 249
8.6.2 Umidificazione Adiabatica	» 252
8.6.3 Umidificazione a Vapore	» 254
8.6.4 Riscaldamento o Raffreddamento Semplice	» 256
8.6.5 Raffreddamento con Deumidificazione	» 258
8.6.6 Raffreddamento Evaporativo	» 261
<b>8.7 CONDIZIONAMENTO DELL'ARIA</b>	» 264
8.7.1 Condizionamento Invernale	» 268
8.7.2 Condizionamento Estivo	» 271
<b>8.8 CONCLUSIONI</b>	» 274
 <b>CAPITOLO 9</b>	
<b>ENERGIA UTILIZZABILE</b>	
<b>9.1 GENERALITÀ</b>	» 277
<b>9.2 LAVORO TECNICO IN UN SISTEMA CHIUSO</b>	» 278
<b>9.3 BILANCIO DI EXERGIA PER UN SISTEMA CHIUSO</b>	» 280
9.3.1 Sistema Chiuso che Scambia Calore Solo con l'Ambiente	» 282
9.3.2 Scambi di Exergia Associati agli Scambi di Calore	» 286
9.3.3 Perdite di Exergia negli Scambi Termici Irreversibili	» 288
<b>9.4 BILANCIO DI EXERGIA PER UN SISTEMA APERTO</b>	» 290
9.4.1 Sistema Aperto che Scambia Calore Solo con l'Ambiente	» 295
<b>9.5 ANALISI ENERGETICHE ED EXERGETICHE</b>	» 298
9.5.1 Rendimenti di Primo Principio	» 299
9.5.2 Rendimenti di Secondo Principio	» 300
<b>9.6 ESEMPI DI APPLICAZIONE</b>	» 301
9.6.1 Espansioni e Compressioni	» 301
9.6.2 Scambiatori di Colore	» 305
9.6.3 Cicli Diretti Bitermici	» 308

9.6.4 Cicli Inversi Bitermici	pag. 310
<b>9.7 CONCLUSIONI</b>	» 315
 <b>CAPITOLO 10</b>	
<b>COMBUSTIONE</b>	
<b>10.1 GENERALITÀ</b>	» 317
<b>10.2 RICHIAMI DI STECHIOMETRIA</b>	» 317
10.2.1 Eccesso d'Aria	» 322
10.2.2 Analisi dei Fumi	» 323
<b>10.3 POTERI CALORIFICI</b>	» 327
10.3.1 Variazioni del Potere Calorifico con la Temperatura	» 332
10.3.2 Poteri Calorifici nei Sistemi Chiusi	» 334
<b>10.4 TEMPERATURA DEI FUMI</b>	» 336
<b>10.5 POTERE EXERGETICO DEI COMBUSTIBILI</b>	» 339
10.5.1 Valutazione del Potere Exergetico dei Combustibili	» 342
<b>10.6 RENDIMENTI DEI PROCESSI DI COMBUSTIONE</b>	» 346
<b>10.7 RENDIMENTI DI CALDAIE E GENERATORI DI VAPORE</b>	» 348
<b>10.8 RENDIMENTI DELLE CAMERE DI COMBUSTIONE</b>	» 353
<b>10.9 RENDIMENTI DEGLI IMPIANTI TERMICI MOTORI</b>	» 357
<b>10.10 CONCLUSIONI</b>	» 360
 <b>CAPITOLO 11</b>	
<b>CICLI DIRETTI A GAS</b>	
<b>11.1 GENERALITÀ</b>	» 361
<b>11.2 CICLO JOULE</b>	» 362
11.2.1 Ciclo Joule Ideale	» 363
11.2.2 Lavoro Netto in un Ciclo Joule Ideale	» 367
11.2.3 Influenza delle Irreversibilità Interne	» 371
<b>11.3 CICLO JOULE RIGENERATIVO</b>	» 378
11.3.1 Rigeneratori ed Efficienza Unitaria	» 380
11.3.2 Rigeneratori ed Efficienza Non Unitaria	» 381
11.3.3 Rigenerazione con Espansione e Compressione in Più Stadi	» 383

<b>11.4 IMPIANTI CON TURBINA A GAS</b>	<i>pag.</i> 385
11.4.1 Analisi Energetica di un Impianto con Turbina a Gas	» 387
<b>11.5 CICLI DEI MOTORI A COMBUSTIONE INTERNA</b>	» 396
11.5.1 Ciclo Otto	» 397
11.5.2 Ciclo Diesel	» 406
11.5.3 Ciclo Misto	» 416
<b>11.6 CICLI BITERMICI REVERSIBILI</b>	» 418
11.6.1 Ciclo Ericsson	» 418
11.6.2 Ciclo Stirling	» 420
<b>11.7 CONCLUSIONI</b>	» 423

## **CAPITOLO 12**

### **CICLI DIRETTI A VAPORE**

<b>12.1 GENERALITÀ</b>	» 425
<b>12.2 CICLO RANKINE</b>	» 425
12.2.1 Ciclo Rankine a Vapore Saturo	» 427
12.2.2 Influenza delle Irreversibilità Interne	» 431
12.2.3 Miglioramenti del Ciclo a Vapore Saturo	» 433
12.2.4 Ciclo Rankine a Vapore Surriscaldato	» 435
12.2.5 Miglioramenti del Ciclo a Vapore Surriscaldato	» 439
<b>12.3 CICLO A RISURRISCALDAMENTO DI VAPORE</b>	» 440
<b>12.4 CICLI RIGENERATIVI A VAPORE</b>	» 444
12.4.1 Scambiatori Rigenerativi a Miscela	» 446
12.4.2 Scambiatori Rigenerativi a Superficie	» 451
12.4.3 Cicli Rigenerativi Pratici	» 454
<b>12.5 IMPIANTI A VAPORE</b>	» 457
12.5.1 Analisi Energetica di un Impianto a Vapore	» 459
<b>12.6 CONCLUSIONI</b>	» 468

## **CAPITOLO 13**

### **CICLI INVERSI**

<b>13.1 GENERALITÀ</b>	» 469
<b>13.2 CICLO INVERSO STANDARD</b>	» 469
13.2.1 Ciclo Frigorifero Standard	» 473
13.2.2 Ciclo Standard a Pompa di Calore	» 476

47613.2.3	Influenza delle Irreversibilità Esterne	<i>pag.</i> 479
<b>13.3</b>	<b>ANALISI EXERGETICA DI IMPIANTI A COMPRESSIONE DI VAPORE</b>	» 480
<b>13.4</b>	<b>CICLO INVERSO CON RIGENERATORE</b>	» 492
<b>13.5</b>	<b>CICLI FRIGORIFERI PER BASSE TEMPERATURE</b>	» 497
13.5.1	Cicli a Doppia Compressione e Doppia Laminazione	» 498
<b>13.6</b>	<b>FLUIDI FRIGORIGENI</b>	» 504
<b>13.7</b>	<b>MACCHINE AD ASSORBIMENTO</b>	» 508
13.7.1	Valori Massimi dei Coefficienti di Effetto Utile	» 513
13.7.2	Analisi Exergetica dei Cicli Inversi Tritermici	» 519
<b>13.8</b>	<b>CONCLUSIONI</b>	» 522
 <i>CAPITOLO 14</i>		
<i>CENNI SUL MOTO DEI FLUIDI COMPRIMIBILI</i>		
<b>14.1</b>	<b>GENERALITÀ</b>	» 523
<b>14.2</b>	<b>VELOCITÀ DEL SUONO</b>	» 523
<b>14.3</b>	<b>STATO DI RISTAGNO</b>	» 527
<b>14.4</b>	<b>CONDOTTI A SEZIONE VARIABILE</b>	» 531
14.4.1	Stato Critico	» 533
<b>14.5</b>	<b>ESPANSORI IDEALI</b>	» 535
<b>14.6</b>	<b>ESPANSORI REALI</b>	» 542
14.6.1	Ugello Convergente	» 542
14.6.2	Ugello Convergente-Divergente	» 545
14.6.3	Rendimento Isoentropico di un Ugello	» 547
<b>14.7</b>	<b>CONCLUSIONI</b>	» 549
 <b>APPENDICE</b>		
		» 551
<b>BIBLIOGRAFIA</b>		
		» 581
<b>INDICE ANALITICO</b>		
		» 583

---

# NOMENCLATURA

---

## Simboli

$A$	area [m <sup>2</sup> ] exergia di un sistema chiuso [kJ]
$a$	exergia specifica di un sistema chiuso [kJ/kg]
$c$	calore specifico [kJ/(kg K)] velocità del suono [m/s]
$c_n$	calore specifico in una trasformazione politropica [kJ/(kg K)]
$c_p$	calore specifico a pressione costante [kJ/(kg K)]
$\bar{c}_p$	calore specifico molare a pressione costante [kJ/(kmol K)]
$c_v$	calore specifico a volume costante [kJ/(kg K)]
$\bar{c}_v$	calore specifico molare a volume costante [kJ/(kmol K)]
$D$	diametro [m]
$E_Q$	exergia associata allo scambio termico [kJ]
$E_w$	energia cinetica [kJ]
$E_z$	energia potenziale [kJ]
$e$	exergia specifica in un sistema aperto [kJ/kg]
$e_c$	potere exergetico di un combustibile [kJ/kg]
$e_Q$	exergia specifica associata allo scambio termico [kJ/kg]
$e_w$	energia cinetica specifica [kJ/kg]
$e_z$	energia potenziale specifica [kJ/kg]
$F$	forza [N]
$f$	energia libera specifica di Helmotz [kJ/kg] fattore d'attrito
$g$	accelerazione di gravità [m/s <sup>2</sup> ] energia libera specifica di Gibbs [kJ/kg]
$H$	entalpia [kJ]



$H_i$	potere calorifico inferiore [kJ/kg]
$H_s$	potere calorifico superiore [kJ/kg]
$h$	entalpia specifica [kJ/kg]
$\bar{h}$	entalpia specifica molare [kJ/kmol]
$k$	rappporto tra i calori specifici a pressione ed a volume costante
$\ell$	lunghezza [m]
	numero di gradi di libertà in una molecola
$L$	lavoro specifico [kJ/kg]
$L'$	lavoro tecnico specifico [kJ/kg]
$\hat{L}$	lavoro [kJ]
$\hat{L}'$	lavoro tecnico [kJ]
$M$	massa molare [kg/kmol]
$m$	massa [kg]
$\dot{m}$	portata massica [kg/s]
$Ma$	numero di Mach
$n$	numero di moli [kmol]
	esponente di una trasformazione politropica
$P$	potenza [kW]
$p$	pressione [kPa]
$p_c$	pressione del punto critico [kPa]
$p_T$	pressione del punto triplo [kPa]
$p_r$	rappporto tra la pressione e la pressione del punto critico
$Q$	quantità di calore per unità di massa [kJ/kg]
$\hat{Q}$	quantità di calore [kJ]
$q$	flusso termico [kW]
$R$	costante di un gas [kJ/(kg K)]
	lavoro specifico delle forze di attrito [kJ/kg]
$\bar{R}$	costante universale [kJ/(kmol K)]
$r$	calore di vaporizzazione e condensazione [kJ/kg]
$r_c$	rappporto volumetrico di combustione
$r_p$	rappporto delle pressioni

$r_v$	rapporto volumetrico di compressione
$S$	entropia [kJ/K]
$\dot{S}_{irr}$	produzione di entropia [W/K]
$s$	entropia specifica [kJ/(kg K)]
$\bar{s}$	entropia specifica molare [kJ/(kmol K)]
$T$	temperatura assoluta [K]
$T_c$	temperatura del punto critico [K]
$T_T$	temperatura del punto triplo [K]
$T_r$	rapporto tra la temperatura e la temperatura del punto critico
$t$	temperatura relativa [° C]
$t_{bb}$	temperatura di bulbo bagnato [° C]
$t_{bs}$	temperatura di bulbo secco [° C]
$t_r$	temperatura di rugiada [° C]
$U$	energia interna [kJ]
$U_g$	energia globale [kJ]
$u$	energia interna specifica [kJ/kg]
$\bar{u}$	energia interna specifica molare [kJ/kmol]
$V$	volume [m <sup>3</sup> ]
$\dot{V}$	portata volumetrica [m <sup>3</sup> /s]
$v$	volume specifico [m <sup>3</sup> /kg]
$\bar{v}$	volume specifico molare [m <sup>3</sup> /kmol]
$v_c$	volume specifico al punto critico [m <sup>3</sup> /kg]
$v_r$	rapporto tra il volume specifico ed il volume specifico al punto critico
$w$	velocità [m/s]
$x$	titolo di un vapore umidità specifica dell'aria umida coordinata nella direzione dello spostamento [m]
$y$	frazione molare coordinata ortogonale alla direzione del moto [m]
$Z$	fattore di comprimibilità

$z$	coordinata verticale [m]
$\varepsilon$	coefficiente d'effetto utile di un ciclo frigorifero efficienza di uno scambiatore di calore coefficiente d'eccesso d'aria
$\varepsilon_T$	coefficiente di effetto utile di un ciclo frigorifero ad assorbimento
$\varepsilon'$	coefficiente di effetto utile di un ciclo a pompa di calore (p.d.c.)
$\varepsilon'_T$	coefficiente di effetto utile di un ciclo p.d.c. ad assorbimento
$\phi$	umidità relativa dell'aria
$\lambda$	calore latente di cambiamento di fase generico [kJ/kg] rapporto tra aria comburente ed aria stechiometrica
$\mu$	viscosità dinamica [kg/(s m)]
$\eta$	rendimento di conversione o di primo principio
$\eta_{II}$	rendimento exergetico o di secondo principio
$\eta_{ic}$	rendimento isoentropico di compressione
$\eta_{ie}$	rendimento isoentropico d'espansione
$\eta_{iw}$	rendimento isoentropico di un espansore
$\eta_{pe}$	rendimento politropico di compressione
$\eta_{pe}$	rendimento politropico d'espansione
$\eta_v$	rendimento volumetrico di un compressore alternativo
$\rho$	densità [kg/m <sup>3</sup> ]
$\vartheta$	tempo [s]
$\tau$	sforzo di taglio [N/m <sup>2</sup> ]
$\omega$	frazione di massa

### Indici

+	lavoro (potenza) ottenuti - calore (flusso termico) forniti
-	lavoro (potenza) forniti - calore (flusso termico) ottenuti
'	lavoro (potenza) tecnico(a) utile
*	valore adimensionale - valore critico
0	valore di riferimento

**Pedici**

<i>a</i>	riferito alle condizioni ambiente - riferito all'aria
<i>ad</i>	adiabatica
<i>as</i>	aria stechiometrica
<i>c</i>	combustibile - caldo - compressione
<i>e</i>	entrante - espansione
<i>f</i>	finale - fumi - freddo
<i>fs</i>	fumi stechiometrici
<i>fu</i>	fumi umidi
<i>i</i>	iniziale
<i>imp</i>	impianto
<i>irr</i>	irreversibile
<i>is</i>	isoentropico
<i>l</i>	riferito alla fase liquida
<i>n</i>	netto
<i>ott</i>	ottimale
<i>p</i>	riferito alla pressione - politropico
<i>rev</i>	reversibile
<i>s</i>	saturazione - scarico - calore sensibile
<i>u</i>	uscente - utile - riferito all'aria umida
<i>v</i>	riferito al volume specifico - riferito alla fase vapore
<i>w</i>	riferito all'energia cinetica - riferito all'acqua
<i>z</i>	riferito all'energia potenziale
$\lambda$	riferito al calore latente
0	valore di riferimento - stato d'arresto
$\infty$	condizioni indisturbate

---

# CAPITOLO 1

## UNITÀ DI MISURA

---

### 1.1 GENERALITÀ

La maggior parte delle grandezze fisiche può essere espressa come prodotto della misura (numero) per la rispettiva unità di misura (dimensione). Un "sistema di unità di misura" è costituito da  $p$  unità scelte, arbitrariamente ed indipendentemente, come fondamentali (o primarie) dalle quali sono dedotte, attraverso leggi fisiche, tutte le altre unità in uso. Un sistema comprende un numero di unità molto grande, pari al numero delle grandezze utilizzate correntemente nella fisica, nella chimica e nell'ingegneria.

Nel corso degli anni sono stati introdotti numerosi sistemi di unità di misura come, ad esempio:

- il Sistema MKS, con unità primarie metro [m], chilogrammo [kg] e secondo [s];
- il Sistema CGS, con unità primarie centimetro [cm], grammo [g] e secondo [s];
- il Sistema Tecnico, con unità primarie metro [m], chilogrammo-forza [kgf] e secondo [s];
- il corrispondente anglosassone del Sistema Tecnico, con unità primarie piede [ft], libbra-forza [lbf] e secondo [s].

Purtroppo, questi sistemi di unità, non godono di tutti i requisiti di chiarezza e semplicità necessari per comunicare informazioni di uso comune sui valori delle misure. Un sistema ideale di unità di misura deve infatti essere:

- *Omogeneo*, cioè definito in modo tale che le unità di misura di tutte le

grandezze fisiche in uso possano venir ricavate dalle unità fondamentali a mezzo di una formula monomia in cui compaiano soltanto esponenti interi, positivi o negativi. Ad esempio, l'unità di accelerazione:  $1 \text{ m/s}^2$  è omogenea, mentre  $1 \text{ g}$  (1 · accelerazione di gravità) non è unità omogenea, in quanto non è definita in termini di unità fondamentali. Ancora, nel Sistema CGS elettromagnetico, la definizione dell'unità di misura della corrente elettrica, espressa come  $[\text{cm}^{1/2} \text{ g}^{1/2} \text{ s}^{-1}]$ , non soddisfa il criterio di omogeneità, poiché non utilizza tutti numeri interi come esponenti delle unità primarie.

- *Coerente*, cioè definito in modo tale che le espressioni monomie delle unità di misura derivate siano caratterizzate da un coefficiente uguale ad 1. Ad esempio, l'unità di velocità  $1 \text{ m/s}$  è coerente, mentre l'unità  $1 \text{ km/h}$  ( $1/3,6 \text{ m s}^{-1}$ ) non è coerente, perché il coefficiente moltiplicativo, espresso in termini di unità fondamentali, non ha valore unitario.
- *Assoluto*, cioè definito in modo tale che le unità di misura utilizzate siano invariabili in ogni tempo ed in ogni luogo. I sistemi tecnici, ad esempio, non soddisfano il criterio di invariabilità spaziale, e quindi non sono assoluti. Essi infatti assumono la forza peso tra le unità fondamentali, e quindi utilizzano un'unità che varia da punto a punto sulla Terra e non ha senso fisico nello spazio.
- *Decimale*, cioè definito in modo tale che tutti i multipli ed i sottomultipli delle unità di misura siano potenze intere di 10. Ad esempio, nei sistemi anglosassoni, le diverse unità di lunghezza ( $1 \text{ iarda} = 3 \text{ piedi} = 36 \text{ pollici}$ ) e di massa ( $1 \text{ libbra} = 16 \text{ once}$ ) non sono tra loro multipli o sottomultipli decimali.

Infine, un Sistema di Unità di Misura non dovrebbe avere né troppe né troppo poche unità fondamentali. Troppe unità fondamentali portano infatti al proliferare dei “campioni” di riferimento, mentre troppo poche unità fondamentali portano ad utilizzare le stesse unità di misura per grandezze tra loro diverse fisicamente. Ad esempio, nel sistema CGS elettromagnetico (che ha solo tre unità fondamentali), la resistenza elettrica si misura in cen-

timetri al secondo [cm/s], come la velocità, e ciò può generare confusione. Una simile confusione non si verifica invece nei sistemi che utilizzano una unità di misura propria per caratterizzare le grandezze elettromagnetiche.

## 1.2 SISTEMA INTERNAZIONALE

La necessità di migliorare la qualità delle definizioni e l'esigenza di evitare ambiguità nell'identificazione delle grandezze, hanno spinto a proporre, nel 1960, il Sistema Internazionale di Unità di Misura, chiamato anche SI. Il SI è stato poi adottato legalmente in quasi tutti i Paesi (in Italia nel 1982) ed è attualmente raccomandato da tutte le principali organizzazioni per l'unificazione.

Il SI è omogeneo, coerente, assoluto e decimale ed è basato su sette unità fondamentali e due supplementari. In questo modo, pur impiegando un numero non eccessivo di unità, il SI riesce ugualmente ad attribuire, nella maggior parte dei casi, unità di misura diverse a grandezze fisicamente diverse. Le unità di misura per le grandezze fondamentali e supplementari del SI sono:

### **Grandezze meccaniche**

*Lunghezza*, con unità il metro [m], cioè la distanza percorsa nel vuoto dalla luce nell'intervallo di tempo di  $1/299\,792\,458$  s.

*Tempo*, con unità il secondo [s], cioè la durata di  $9\,192\,631\,770$  cicli della radiazione corrispondente alla transizione entro i due livelli iperfini dello stato fondamentale dell'isotopo 133 del cesio.

*Massa*, con unità il chilogrammo [kg], cioè la massa uguale a quella del campione di platino-iridio conservato a Sévres presso l'Ufficio Internazionale dei Pesi e delle Misure.

### **Grandezze elettromagnetiche**

*Intensità di corrente elettrica*, con unità l'ampere [A], cioè l'intensità di corrente costante che, se mantenuta in due conduttori paralleli, rettilinei, po-

sti nel vuoto alla distanza di 1 m ed aventi sezione circolare trascurabile rispetto alla distanza, produce in questi conduttori una forza attrattiva o repulsiva pari a  $2 \cdot 10^{-7}$  newton per metro di lunghezza.

### Grandezze termiche

*Temperatura termodinamica*, con unità il kelvin [K], cioè la frazione  $1/273,16$  della temperatura termodinamica del punto triplo dell'acqua.

Nel SI oltre alla temperatura termodinamica od assoluta, espressa in kelvin, si utilizza anche la temperatura relativa, espressa in gradi celsius (non più denominati gradi centigradi). La relazione tra gradi celsius  $t_C$  e kelvin  $T_K$  è definita dall'equazione:

$$t_C = T_K - 273,15 \quad (1.1)$$

che fornisce  $t = 0$  °C in corrispondenza alla temperatura del punto di fusione del ghiaccio ( $T = 273,15$  K alla pressione atmosferica normale di 101,325 kPa).

### Grandezze fotometriche

*Intensità luminosa*, con unità la candela [cd], cioè l'intensità luminosa, in una data direzione, di una sorgente che emetta una radiazione monocromatica di frequenza  $540 \cdot 10^{12}$  hertz (pari ad una lunghezza d'onda di  $0,555 \mu\text{m}$ ) e la cui intensità energetica in quella direzione sia di  $1/683$  watt per steradiante.

### Grandezze chimico-fisiche

*Quantità di materia*, con unità la mole [mol], cioè la quantità di materia presente in un sistema che contiene tante entità elementari (quali, ad esempio, atomi, molecole od elettroni), quanti sono gli atomi contenuti in  $0,012$  kg di carbonio 12.

Non si devono più utilizzare, per indicare quantità di materia, unità quali il grammo-atomo, il grammo-molecola e così via. Infatti, una conseguenza importante della definizione dell'unità di quantità di materia è che,



adesso, la massa molare  $M$  ha le dimensioni di chilogrammo su mole [kg/mol] o chilomole [kg/kmol]. Pertanto si deve dire, ad esempio, che la massa molare dell'ossigeno è 32,00 kg/kmol e che la massa molare dell'azoto è 28,01 kg/kmol.

### Grandezze supplementari

*Angolo piano*, con unità il radiante [rad], cioè l'angolo piano con vertice al centro di un cerchio sulla cui circonferenza intercetta una lunghezza uguale a quella del raggio.

*Angolo solido*, con unità lo steradiano [sr], cioè l'angolo solido con vertice al centro di una sfera sulla cui superficie intercetta un'area uguale a quella di un quadrato di lato pari al raggio.

L'aggettivo supplementare indica grandezze le cui dimensioni possono, ma non devono obbligatoriamente, essere specificate. Quindi, ad esempio, l'unità di misura della velocità angolare può essere denotata, indifferentemente, con [rad/s] o con [1/s].

### Grandezze derivate

Nel SI, alcune unità derivate hanno un nome ed un simbolo proprio. Ad esempio, unità di misura di uso comune con nome e simbolo speciale, sono:

*Frequenza*, con unità l'hertz [Hz], per il quale risulta:  $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$ .

*Forza*, con unità il newton [N], per il quale risulta:  $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$ .

*Pressione*, con unità il pascal [Pa], per il quale risulta:  $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N}/\text{m}^2$ .

*Lavoro, energia e quantità di calore*, con unità il joule [J], per il quale risulta:  $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$ .

*Potenza, flusso energetico e flusso termico*, con unità il watt [W], per il quale risulta:  $1 \text{ W} = 1 \text{ J}/\text{s}$ .

## 1.3 USO DEL SISTEMA INTERNAZIONALE

Per uniformare le modalità di impiego delle unità del SI è bene seguire alcune regole di scrittura stabilite dalle organizzazioni internazionali di nor-

malizzazione. Le più importanti sono elencate nel seguito:

- L'unità di misura, quando non è accompagnata dal valore numerico, si scrive per esteso. Corretto: pochi secondi; errato: pochi s.
- Quando le unità di misura sono troppo piccole o troppo grandi per descrivere adeguatamente il fenomeno che interessa, possono essere usati i multipli e sottomultipli elencati nella Tabella 1.1. Questi multipli e sottomultipli, quando sono scritti per esteso, hanno la lettera iniziale minuscola. Corretto: meganewton; errato: Meganewton.
- I nomi delle unità vanno sempre scritti in minuscolo e senza accenti, anche se si tratta di nomi di persona. Corretto: ampere; errato: Ampere, Ampère, ampère. Corretto: kelvin, newton, joule, watt; errato: Kelvin, Newton, Joule, Watt.
- I simboli delle unità di misura non sono abbreviazioni e, pertanto, non vanno seguiti dal punto e vanno sempre scritti dopo il valore numerico. Corretto: 8,5 m; 15 m/s; errato: m. 8,5; 15 m. al secondo; m. 15 al sec.
- Nella scrittura dei simboli delle unità derivate si usano il punto a mezza altezza ( $\cdot$ ) o lo spazio per indicare moltiplicazione, e gli esponenti negativi od il simbolo (/) per indicare divisione. Corretto: m·K, m K, m/s, m s<sup>-1</sup>; errato: mK (significa millikevin e non metro per kelvin).
- Il simbolo del prefisso chilo (= 10<sup>3</sup>) è k (minuscolo). Corretto: kg, kW, kV; errato: Kg, KW, Kw, KV, Kv.
- Il simbolo del kelvin è [K] (maiuscolo) senza il segno di grado [°], mentre il simbolo del grado celsius è [°C].
- Per le differenze di temperatura, e per le unità derivate che includono differenze di temperatura, si deve usare il simbolo [K] e non il simbolo [°C]. Corretto: differenza di temperatura di 20 K, conduttività termica di 2 W/(m K); errato: differenza di temperatura di 20 °C, conduttività termica di 2 W/(m °C).
- I simboli di ora, minuto e secondo sono: [h], [min] e [s] rispettivamente, mentre gli apici ['] e ["] indicano il minuto ed il secondo d'arco. Corretto: 6 min 2 s; errato 6' 2".

- Il simbolo [°], impiegato da solo, indica il grado d'arco e quindi non può essere usato per le temperature espresse in gradi celsius. Corretto: 30 °C; errato 30 °.
- I nomi degli elementi chimici si scrivono con l'iniziale minuscola ma i rispettivi simboli sono maiuscoli. Corretto: azoto, N<sub>2</sub>; errato: Azoto, n<sub>2</sub>.

**TABELLA 1.1** Sottomultipli e multipli delle unità di misura del SI.

Fattore	Prefisso	Simbolo	Fattore	Prefisso	Simbolo
10 <sup>-18</sup>	atto	a	10 <sup>18</sup>	exa	E
10 <sup>-15</sup>	femto	f	10 <sup>15</sup>	peta	P
10 <sup>-12</sup>	pico	p	10 <sup>12</sup>	tera	T
10 <sup>-9</sup>	nano	n	10 <sup>9</sup>	giga	G
10 <sup>-6</sup>	micro	μ	10 <sup>6</sup>	mega	M
10 <sup>-3</sup>	milli	m	10 <sup>3</sup>	chilo	k
10 <sup>-2</sup>	centi	c	10 <sup>2</sup>	etto	h
10 <sup>-1</sup>	deci	d	10 <sup>1</sup>	deca	da

## 1.4 CAMBIAMENTO DI UNITA' DI MISURA

Alcune unità dei Sistemi Tecnici Europeo ed Anglosassone sono ancora utilizzate con una certa frequenza. Accade quindi spesso di dover convertire la misura di una grandezza, espressa in un certo sistema di unità, nella misura espressa nel SI. Il modo più semplice per procedere alla conversione in unità del SI, è il ricorso ai fattori che esprimono la relazione esistente tra due unità di misura della stessa quantità. Di solito si considera l'unità di misura che si vuole convertire e la si esprime in funzione della corrispondente unità di misura del sistema in cui si vuole passare. Nella letteratura tecnica sono reperibili numerose tabelle di conversione, del tipo della Tabella 1.2, per le

unità di misura usate più frequentemente. Inoltre, quando il fattore di conversione non è immediatamente disponibile, si può ricorrere alle regole di manipolazione delle unità basate sulle leggi fisiche utilizzate per definire le unità stesse.

**TABELLA 1.2** Fattori di conversione in unità di misura del SI.

<b>Grandezza</b>	<b>Unità</b>	<b>Simbolo</b>	<b>Conversione</b>
Lunghezza	piede	ft	1 ft = 0,3048 m
	pollice	in	1 in = 0,0254 m
Massa	libbra massa	lb	1 lb = 0,45359237 kg
Forza	libbra forza	lbf	1 lbf = 4,448 N
	chilogrammo forza	kgf	1 kgf = 9,8062 N
Pressione	libbra forza per pollice quadrato	psi	1 psi = 6894,76 Pa
	atmosfera (= atmosfera normale)	atm	1 atm = 101325 Pa
	atmosfera tecnica (=1 kgf/cm <sup>2</sup> )	at	1 at = 980620 Pa
	millimetro di mercurio	mmHg	1 mmHg = 133,322 Pa
Energia	chilocaloria	kcal	1 kcal = 4186,8 J
	unità termica britannica	Btu	1 Btu = 1054,5 J

Un caso a parte, per l'importanza che riveste in questo corso, è la conversione tra unità di misura delle temperature. Come si è detto, nel SI le temperature assolute si misurano in kelvin e quelle relative in gradi celsius, mentre nei paesi anglosassoni si usano ancora i gradi fahrenheit e rankine,

rispettivamente per le temperature relative e per le temperature assolute. Le relazioni tra temperature in gradi celsius  $t_C$  e le temperature in gradi fahrenheit  $t_F$  sono

$$t_F = 1,8 t_C + 32 \quad (1.2)$$

e

$$t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32) \quad (1.3)$$

Le relazioni tra le temperature in kelvin  $T_K$  e le temperature in gradi rankine  $T_R$  sono

$$T_R = 1,8 T_K \quad (1.4)$$

e

$$T_K = \frac{5}{9} T_R \quad (1.5)$$

mentre dalle equazioni (1.2), (1.1) ed (1.4) deriva la relazione

$$t_F = 1,8(T_K - 273,15) + 32 = 1,8T_K - 459,67 = T_R - 459,67 \quad (1.6)$$

Ovviamente, la relazione (1.6) per il sistema anglosassone, corrisponde alla relazione (1.1) per il Sistema Internazionale.

### Esempio 1.1

Si passi dall'unità di misura della potenza, o flusso termico, "chilocalorie per ora" alla unità di misura "watt".

*Soluzione*

Si parte dalle equivalenze elementari scrivendo:

$$1 \frac{\text{kcal}}{\text{h}} = \frac{4186,8 \text{ J}}{3600 \text{ s}} = 1,163 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 1,163 \text{ W}$$

Con ciò si intende che si deve moltiplicare il valore espresso in chilocalorie su ora, per 1,163 onde ottenere il valore espresso in watt.

### Esempio 1.2

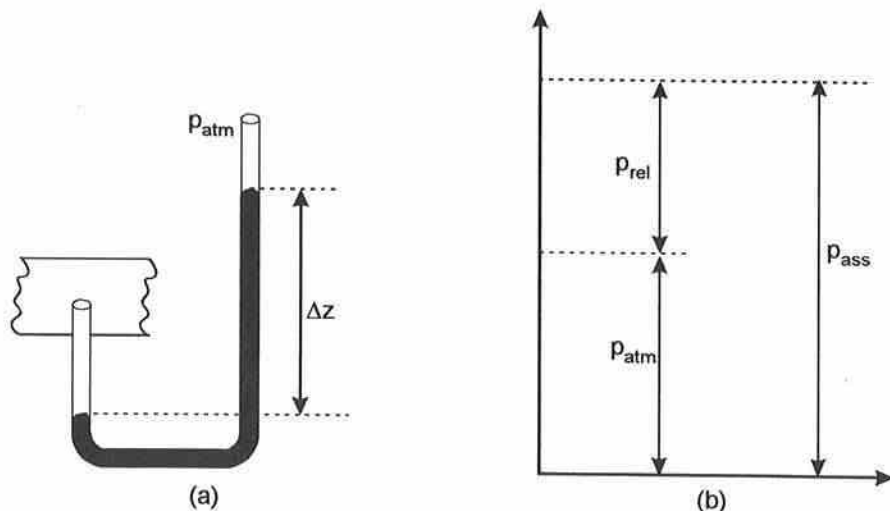
Un manometro costituito da un tubo ad U aperto all'atmosfera segna una pressione relativa di 250 mmHg. Si determini la pressione assoluta nell'ipotesi che la pressione esterna sia pari a 99000 Pa.

#### Soluzione

La pressione relativa vale

$$250 \text{ mmHg} = 250 \cdot 133,322 \text{ Pa} = 33330 \text{ Pa}$$

e, quindi, la pressione assoluta è pari a  $99000 + 33330 = 132330 \text{ Pa}$ . La situazione risultante, schematizzata nella Fig. 1.1, è tipica di tutti gli strumenti che, come i manometri ad U aperti verso l'atmosfera, danno indicazioni di pressione relativa. La misura complementare di pressione assoluta può essere effettuata, ad esempio, con un barometro tipo Fortin.



**Figura 1.1** Pressioni assolute e relative: (a) misuratore di pressione relativa e (b) scale di pressione.

**Esempio 1.3**

Si esprimano nelle unità celsius, rankine e fahrenheit le temperature di 273,15 K e 373,15 K.

*Soluzione*

Dalla definizione (1.1) si ha immediatamente

$$273,15 \text{ K} = 273,15 - 273,15 = 0 \text{ } ^\circ\text{C}$$

e

$$373,15 \text{ K} = 100 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Analogamente, dalla relazione (1.4) si ottiene

$$273,15 \text{ K} = 1,8 \cdot 273,15 = 491,67 \text{ } ^\circ\text{R}$$

e

$$373,15 \text{ K} = 671,67 \text{ } ^\circ\text{R}$$

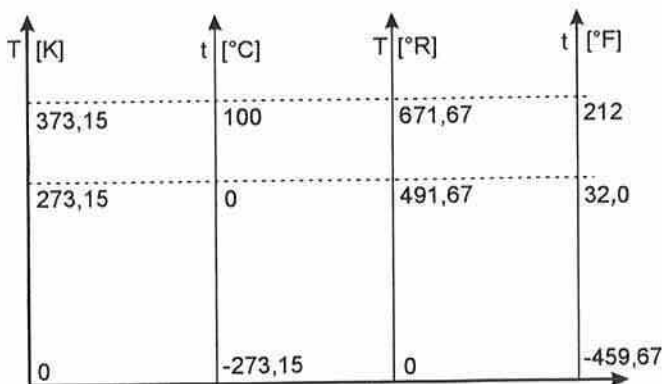
Infine, dalla relazione (1.2), si ha

$$0 \text{ } ^\circ\text{C} (= 273,15 \text{ K}) = 32 \text{ } ^\circ\text{F}$$

e

$$100 \text{ } ^\circ\text{C} = 1,8 \cdot 100 + 32 = 212 \text{ } ^\circ\text{F}$$

La situazione risultante è schematizzata nella Fig. 1.2.



**Figura 1.2** Confronto tra misure di temperatura espresse in unità diverse.

## 1.5    SCALE DI TEMPERATURA

La definizione operativa di temperatura discende dalle sensazioni di “caldo” e “freddo”, e dalla successiva necessità pratica di valutare in maniera oggettiva i diversi “gradi” di caldo e freddo. Secondo questo punto di vista, la temperatura di un sistema può essere associata ad una qualunque proprietà caratteristica di un corpo ausiliario posto in equilibrio termico con il sistema stesso. Il corpo utilizzato per la misura è detto termometro e la proprietà caratteristica, dipendente dal particolare stato d’equilibrio termico, è detta proprietà termometrica. La relazione, determinata sperimentalmente, tra la proprietà termometrica e la temperatura costituisce una scala empirica di temperature.

In linea di principio, qualunque funzione della proprietà termometrica prescelta potrebbe servire per associare dei valori numerici alle temperature. Tuttavia è evidente che una relazione lineare omogenea tra la variabile termometrica  $X$  e la temperatura  $T$  facilita le operazioni pratiche di misura. Assunto quindi

$$T = aX \tag{1.7}$$

per individuare la scala di temperature basta determinare la costante empirica  $a$ . Nel SI ciò si ottiene definendo la temperatura del punto triplo dell’acqua uguale a 273,16 K. Pertanto, se si pone il termometro in equilibrio termico con una cella del punto triplo dell’acqua del tipo schematizzato in Fig. 1.3, dall’Eq. (1.7) si ricava immediatamente

$$a = \frac{T_T}{X_T} \tag{1.8}$$

ovvero

$$T(X) = T_T \frac{X}{X_T} = 273,16 \frac{X}{X_T} \tag{1.9}$$



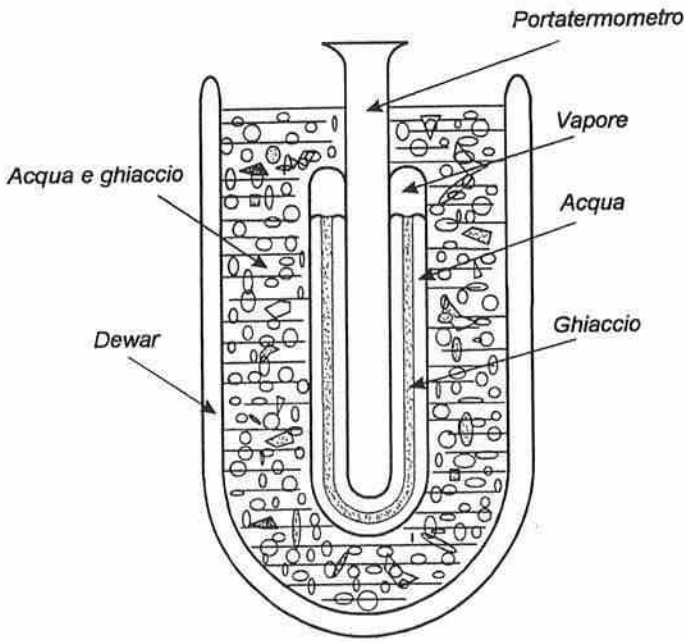


Figura 1.3 Cella del punto triplo dell'acqua.

Un gran numero di corpi e proprietà possono essere (e sono) utilizzati, rispettivamente, come termometri e come proprietà termometriche anche se, evidentemente, alcune scelte conducono a risultati migliori di altre. L'esperienza insegna, ad esempio, che il termometro a gas a volume costante, schematizzato in Fig. 1.4, fornisce indicazioni estremamente accurate e, di conseguenza, si presta meglio di altri strumenti alla definizione di una scala delle temperature. Dall'Eq. (1.9), particolarizzata per il termometro a gas a volume costante, si ottiene

$$T(p) = 273,16 \frac{p}{p_T} \quad (1.10)$$

cioè la definizione di una scala di temperature basata sulla pressione come proprietà termometrica.

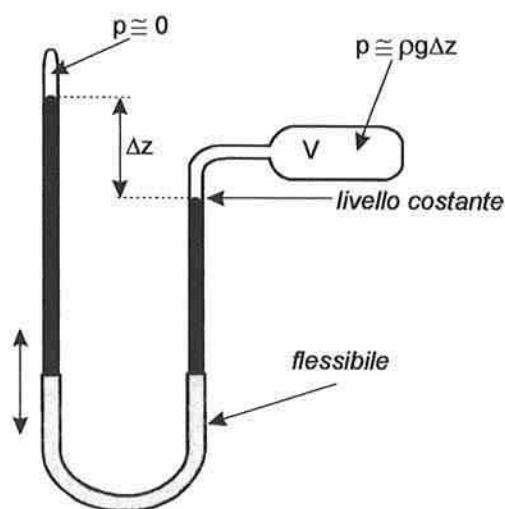


Figura 1.4 Termometro a gas a volume costante.

#### Esempio 1.4

Si spieghi il funzionamento della cella del punto triplo dell'acqua, schematizzata in Fig. 1.3.

#### Soluzione

La cella di vetro sigillata contiene solo acqua di grande purezza ed incorpora un pozzetto assiale per il termometro. La cella è preparata formando uno spesso strato di ghiaccio intorno al pozzetto, mediante raffreddamento dall'interno. Successivamente, una parte dello strato di ghiaccio è fatta fondere, sempre scambiando calore dall'interno. Viene così creata una nuova superficie di separazione tra acqua e ghiaccio nelle vicinanze del pozzetto mentre, nella parte superiore, resta una zona occupata dal vapore. Nella cella si ha quindi la presenza contemporanea delle tre fasi (solido, liquido e vapore) senza che vi sia un contatto diretto tra il ghiaccio ed il pozzetto portatermometro.

**Esempio 1.5**

Si spieghi il funzionamento del termometro a gas a volume costante, schematizzato in Fig. 1.4.

*Soluzione*

Il gas è contenuto nel volume  $V$  che comunica, per mezzo di un tubo sottile con la colonna di mercurio. Il volume del gas è mantenuto costante per mezzo di opportuni spostamenti, verso l'alto o verso il basso, del tubo manometrico fino a far coincidere il livello del mercurio con il riferimento. Poiché la tensione di vapore del mercurio, che è un metallo liquido, è prossima a zero, la pressione del gas è data da

$$p \cong \rho g \Delta z$$

dove  $\rho$  è la densità del mercurio e  $\Delta z$  è il dislivello tra le due colonne.

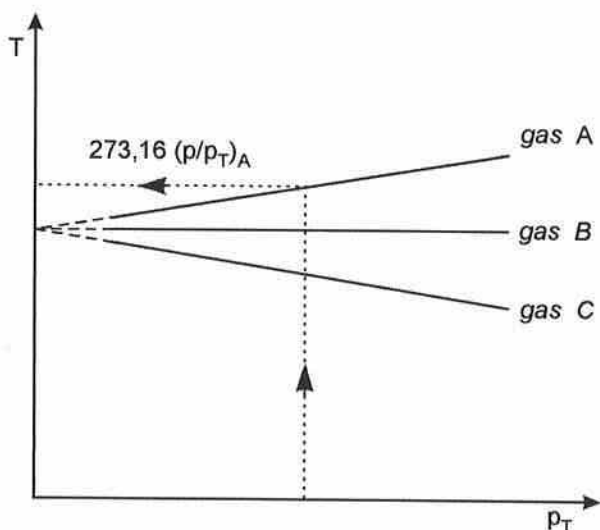
**1.5.1 Scala di Temperature di Gas Ideale**

La definizione (1.10) può essere ancora migliorata poiché si è constatato che i termometri a gas a volume costante, operanti con gas diversi, forniscono indicazioni tanto più vicine tra loro quanto più bassa è la pressione di partenza nel bulbo. La spiegazione di tale comportamento è semplice ed è basata sul modello di gas ideale, definito come un insieme di particelle che occupano un volume trascurabile e non esercitano, tra loro, alcuna azione attrattiva o repulsiva. Al tendere a zero della pressione, diminuisce il numero di molecole di un gas reale presenti in un certo volume e, di conseguenza, aumenta la distanza media tra le molecole, rendendo sempre più deboli le azioni attrattive e repulsive. In questo modo, al tendere a zero della pressione, il comportamento di tutti i gas reali tende al comportamento dei gas ideali. Pertanto, il termometro a gas a volume costante può dare indicazioni coincidenti con quelle di un termometro a gas ideale, purché si adotti la de-

finizione di temperatura

$$T(p) = 273,16 \lim_{p_T \rightarrow 0} \frac{p}{p_T} \quad (1.11)$$

In termini pratici, per realizzare la definizione (1.11), si procede come indicato in Fig. 1.5, estrapolando a  $p_T = 0$  i valori delle temperature misurate con diversi gas reali.



**Figura 1.5** Estrapolazione a “gas ideale” delle temperature misurate dai termometri a gas reale a volume costante.

La definizione della scala di temperature di gas ideale, sintetizzata nell’equazione (1.11), presenta diversi vantaggi in quanto:

- salva il valore “storico” di  $T = 273,15 \text{ K}$  ( $= 0 \text{ }^\circ\text{C}$ ) per il punto di fusione del ghiaccio alla pressione atmosferica normale di  $101325 \text{ Pa}$ ;
- possiede, come tutte le scale di misura fondamentali, uno “zero naturale”;
- non dipende dal particolare gas utilizzato.

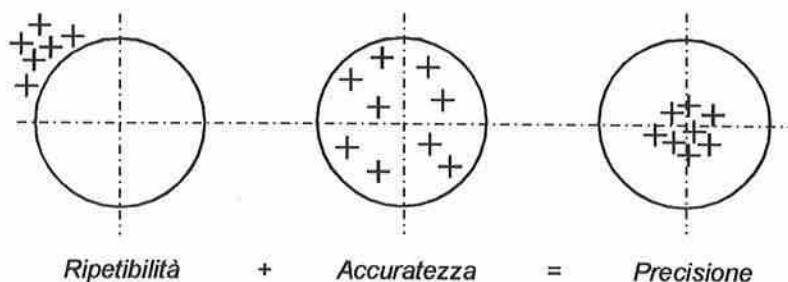
La scala di temperature di gas ideale, però, non è ancora una scala assoluta, in quanto non è completamente indipendente dalla sostanza termometrica. Per la definizione di una scala delle temperature assoluta, o termodinamica, si dovrà attendere l'enunciazione del teorema di Carnot ma, sin d'ora, si può anticipare che la scala termodinamica non differisce dalla scala di temperature di gas ideale. Nell'uso pratico, tuttavia, la scala di temperature di gas ideale presenta uno svantaggio importante in quanto non si presta ad essere utilizzata per l'effettuazione delle normali misure. Essa, infatti, impone delle procedure molto complesse e lunghe che mal si conciliano con le esigenze della tecnica. In aggiunta alla scala di temperature di gas ideale, occorre quindi disporre di una metodologia pratica che consenta di trasferire "sul campo" i risultati altrimenti ottenibili solo nei Laboratori di metrologia. A questo fine, è stata introdotta la Scala Internazionale Pratica delle Temperature (SIPT).

### 1.5.2 Scala Internazionale Pratica delle Temperature

La ripetibilità metrologica è la caratteristica che identifica la dispersione degli errori accidentali, mentre l'accuratezza è in relazione con gli errori sistematici. Pertanto, nelle operazioni pratiche di misura, si cerca di raggiungere la precisione, sintesi di ripetibilità ed accuratezza ma, dovendo scegliere, si privilegia sempre la ripetibilità rispetto all'accuratezza. Uno strumento ben tarato dà come media delle misure un risultato "esatto", e quindi è accurato, ma non può diventare preciso a meno che non fornisca anche risultati ripetibili. Uno strumento preciso è, infatti, uno strumento ripetibile e ben tarato, come si può evincere dall'esame della Fig. 1.6.

L'utilizzazione della Scala Internazionale Pratica delle Temperature è una procedura metrologica molto interessante, che permette di sfruttare le caratteristiche di ripetibilità dei termometri usati normalmente nei laboratori. La SIPT definisce, infatti, i valori delle temperature di diversi punti facilmente riproducibili (solitamente punti tripli, punti di fusione o punti

d'ebollizione di sostanze pure). Tali valori sono aggiornati periodicamente (SIPT 1948, SIPT 1968 e SIPT 1990) a seguito delle più accurate misure effettuate nei laboratori internazionali. Durante l'intervallo di tempo che intercorre tra un aggiornamento e l'altro, i valori delle temperature dei punti fissi sono assunti come "esatti" ed utilizzati come capisaldi delle operazioni di misura. Nella SIPT sono anche stabilite le procedure di interpolazione per operare negli intervalli tra i punti fissi, utilizzando strumenti caratterizzati da un'elevata riproducibilità. Così, ad esempio, si fa ricorso ai termometri a resistenza di platino nell'intervallo tra 13,8033 e 1294,93 K, mentre si utilizzano termometri a radiazione per temperature ancora superiori. In questo modo, ai Laboratori Metrologici è lasciata la responsabilità dell'accuratezza nella definizione di punti fissi e procedure, mentre ai Laboratori di Ricerca è richiesta la sola ripetibilità nell'applicazione delle procedure stesse.



**Figura 1.6** Schematizzazione delle caratteristiche metrologiche di uno strumento.

## 1.6 CONCLUSIONI

La corretta utilizzazione dei sistemi di unità di misura è un prerequisito per la soluzione dei problemi di interesse tecnico e per la comunicazione dei risultati raggiunti. Al giorno d'oggi l'impiego del Sistema Internazionale di unità di misura, oltre che obbligatorio per legge, è indispensabile per consentire la libera circolazione dei prodotti e delle apparecchiature tecnologi-

che.

Nell'ambito di questo corso, rivestono una importanza concettuale particolare la definizione della scala delle temperature e la comprensione delle procedure metrologiche necessarie a realizzarla. Dal punto di vista pratico è sufficiente, invece, giungere ad una corretta utilizzazione del SI, acquisendo la capacità di convertire, in unità del SI, i valori delle grandezze espressi mediante unità di altri sistemi.

---

# CAPITOLO 2

## SISTEMI TERMODINAMICI

---

### 2.1 GENERALITÀ

Questo capitolo si occupa delle grandezze che caratterizzano i sistemi termodinamici e delle trasformazioni che in essi avvengono. Per sistema termodinamico s'intende una quantità costante di materia od una porzione definita di spazio, separate dall'esterno per mezzo di confini reali od ideali. I sistemi riferiti ad una massa costante sono detti "chiusi", mentre i sistemi riferiti ad una porzione di spazio, in genere coincidente con un "volume di controllo" fisso, sono detti "aperti". Tutti i sistemi termodinamici possono scambiare energia con l'esterno sotto forma di lavoro o di calore ma, come indicato in Fig. 2.1, solo i sistemi aperti possono scambiare anche materia e l'energia associata a tale materia. Nel seguito di questo capitolo si esamineranno gli scambi di massa e di lavoro meccanico, ricavandone le rispettive equazioni di bilancio. Gli scambi di calore e le equazioni di bilancio di tutte le forme, meccaniche e termiche, d'energia, saranno invece illustrati in dettaglio nel capitolo successivo.

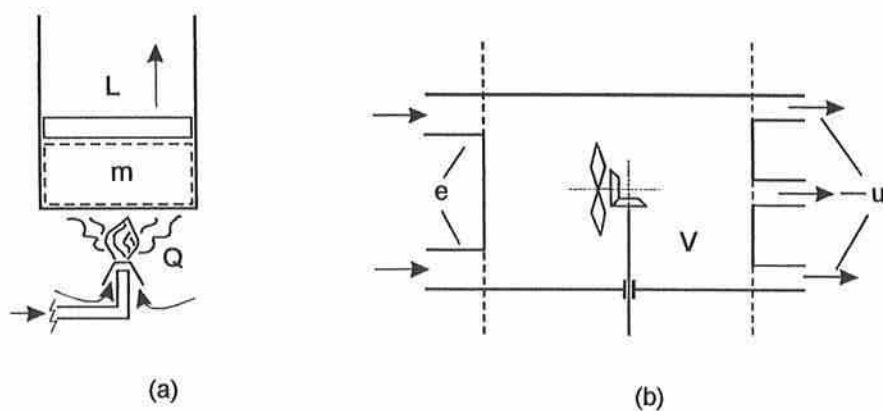
### 2.2 SISTEMI CHIUSI

Nella termodinamica, rivestono particolare importanza i sistemi chiusi in equilibrio termodinamico, ovvero non soggetti a cambiamenti spontanei di tipo meccanico, termico o chimico. Le grandezze che caratterizzano un sistema in equilibrio sono dette grandezze di stato. Tali grandezze possono



essere di tipo “intensivo” od “estensivo”. Le grandezze intensive, come la pressione  $p$  e la temperatura  $T$ , sono indipendenti dalla massa del sistema. Al contrario le grandezze estensive, come il volume  $V$ , sono proporzionali alla massa  $m$ . È, in ogni caso, possibile considerare i valori specifici delle grandezze estensive (ovvero i valori divisi per la massa del sistema) al fine di arrivare alle corrispondenti grandezze intensive. Così, ad esempio, dalla grandezza estensiva  $V$ , dividendo per la massa  $m$  si ottiene la grandezza intensiva volume specifico  $v = V/m$  che rappresenta il volume dell’unità di massa.

La regola delle fasi, qui solo enunciata, stabilisce che le grandezze di stato non sono indipendenti tra loro. In particolare, due sole grandezze bastano a definire lo stato degli aeriformi e, come si vedrà nel seguito, pressione, temperatura e volume di una massa di gas in equilibrio sono sempre legate da una relazione che, per la sua importanza, è definita “equazione di stato”.



**Figura 2.1** Sistemi termodinamici: (a) chiuso e (b) aperto.

A seguito delle interazioni con l’esterno, i sistemi chiusi subiscono delle trasformazioni, durante le quali le grandezze di stato variano progressivamente. Tuttavia gli integrali delle variazioni di una qualunque grandezza

di stato, durante una qualunque trasformazione, dipendono solo dai punti finale ed iniziale della trasformazione stessa. Pertanto, le grandezze di stato soddisfano alla definizione matematica di funzione potenziale e, di conseguenza, spesso sono chiamate semplicemente “potenziali”. Poiché lo stato termodinamico di un sistema chiuso può essere caratterizzato in maniera univoca solo se il sistema è in equilibrio, soltanto trasformazioni costituite da una successione di stati d’equilibrio ammettono una rappresentazione analitica. Le trasformazioni che passano attraverso una successione di stati d’equilibrio si dicono “quasi-statiche”. Le trasformazioni reali non sono quasi-statiche ma, fortunatamente, i risultati ottenuti con l’analisi di trasformazioni quasi-statiche sono generalmente applicabili, con buona approssimazione, anche alle trasformazioni reali.

La termodinamica non considera solo le grandezze che descrivono lo stato, ma anche le grandezze che determinano l’evoluzione di un sistema. Queste ultime sono associate agli scambi di materia e d’energia tra un sistema e l’esterno e sono definite, appunto, grandezze di scambio.

In questo corso non ci si occupa di reazioni nucleari o di meccanica relativistica e, quindi, si assume implicitamente che la massa di un sistema chiuso si conservi e che la massa di un sistema aperto possa variare solo per effetto degli scambi di materia con l’esterno. Le interazioni energetiche con l’esterno, oltre ad essere associate alle eventuali entrate od uscite di materia, possono aver luogo in corrispondenza ai confini, chiusi od aperti, del sistema. In quest’ultimo caso, le interazioni sono definite scambi di lavoro  $L$ , se comportano spostamenti macroscopici dei confini, o scambi di calore  $Q$ , se comportano solo variazioni nei livelli energetici delle molecole. Secondo questo punto di vista, i termini “lavoro” e “calore” non indicano forme d’energia, ma sono i nomi attribuiti a particolari meccanismi di scambio energetico tra il sistema e l’esterno. Per esempio, il sistema chiuso con pistone mobile, rappresentato in Fig. 2.1 (a), può scambiare energia con l’esterno a seguito di uno spostamento del pistone stesso. D’altra parte, il fluido all’interno può ricevere energia anche da una fiamma e, in quest’ultimo ca-

so, non si hanno effetti meccanici locali evidenti a livello macroscopico, ma solo aumenti delle energie cinetiche e potenziali delle molecole. Invece, come si vedrà meglio nel seguito, un sistema aperto del tipo rappresentato in Fig. 2.1 (b) può scambiare con l'esterno, oltre a calore e lavoro, anche l'energia associata alle masse entranti ed uscenti.

Per i segni attribuiti al lavoro ed al calore scambiati, in questo corso si seguono le convenzioni seguenti:

- il lavoro è positivo ( $L^+ > 0$ ) quando è fatto dal sistema, mentre è negativo ( $L^- < 0$ ) quando è fatto sul sistema;
- il calore è positivo ( $Q^+ > 0$ ) quando è fornito al sistema, mentre è negativo ( $Q^- < 0$ ) quando è ceduto dal sistema.

## 2.3 SISTEMI APERTI

Generalmente, all'interno dei sistemi aperti non si hanno condizioni d'equilibrio termodinamico e, di conseguenza, le grandezze di stato e le proprietà meccaniche sono definibili solo su base locale. Tuttavia, nelle analisi dei sistemi aperti illustrate in questo corso, sono utilizzati sempre dei valori uniformi per rappresentare le grandezze di stato e le variabili meccaniche sulle sezioni d'entrata ed uscita. Ciò non comporta difficoltà particolari per le grandezze di stato, dal momento che le variazioni di queste grandezze nella direzione ortogonale all'asse dei condotti di entrata ed uscita sono, quasi sempre, trascurabili rispetto alle variazioni nella direzione del moto. Analogamente, le quote  $z$  degli assi dei condotti costituiscono un riferimento naturale per la valutazione dell'energia potenziale gravitazionale (che è la sola forma d'energia potenziale considerata in questo corso). Una maggior cautela è richiesta, invece, nell'individuazione delle velocità rappresentative  $w$ , necessarie per la valutazione dell'energia cinetica. Anche in questo caso, tuttavia, la scelta delle velocità medie è certamente difendibile se le sezioni d'entrata e d'uscita non sono interessate da vortici o da forti ricircolazioni del fluido che si accompagnano, in genere, a brusche variazioni

nella sezione di deflusso o nella direzione del moto.

Tra i sistemi aperti, rivestono un'importanza particolare i sistemi aperti in regime stazionario, con una sola entrata ed una sola uscita. Molto spesso nell'analisi di tali sistemi si fa l'ipotesi "forte" che le proprietà termodinamiche e meccaniche assumano valori uniformi, non solo all'entrata ed all'uscita, ma su ogni sezione trasversale. In questo modo, dall'entrata fino all'uscita, tutte le grandezze caratteristiche vengono espresse in funzione di una sola coordinata spaziale  $e$ , di conseguenza, si parla di deflusso monodimensionale. È bene precisare che, in un deflusso monodimensionale stazionario, l'elemento fluido in un ogni punto cambia istante per istante, a causa del movimento, ma le proprietà termodinamiche e meccaniche locali non variano nel tempo.

## 2.4 CONSERVAZIONE DELLA MASSA

Come si è già rilevato, nelle ipotesi in cui ci si pone in questo corso, la massa contenuta in un sistema chiuso resta costante durante le trasformazioni. In un sistema aperto, invece, si hanno entrate ed uscite di fluido che tendono, rispettivamente, a far aumentare e diminuire la massa contenuta nel volume di controllo. Poiché la massa totale si conserva, la massa iniziale del sistema chiuso in movimento, evidenziato in Fig. 2.2 (a), è uguale alla massa finale dello stesso sistema, rappresentato in Fig. 2.2 (b). Pertanto, con riferimento all'intervallo di tempo  $\Delta\vartheta$ , si può scrivere

$$m(\vartheta) + \sum \Delta m_e = m(\vartheta + \Delta\vartheta) + \sum \Delta m_u \quad (2.1)$$

ovvero

$$m(\vartheta + \Delta\vartheta) - m(\vartheta) = \sum \Delta m_e - \sum \Delta m_u \quad (2.2)$$

dove  $m(\vartheta) = m_i$  è la massa iniziale contenuta nel volume di controllo,  $m(\vartheta + \Delta\vartheta) = m_f$  è la massa finale contenuta nel volume di controllo,  $\Delta m_e$

è la generica massa entrante e  $\Delta m_u$  è la generica massa uscente. Se si dividono i due membri della (2.2) per  $\Delta \vartheta$  e si fa tendere  $\Delta \vartheta$  a zero, si ottiene

$$\frac{dm}{d\vartheta} = \sum \dot{m}_e - \sum \dot{m}_u \quad (2.3)$$

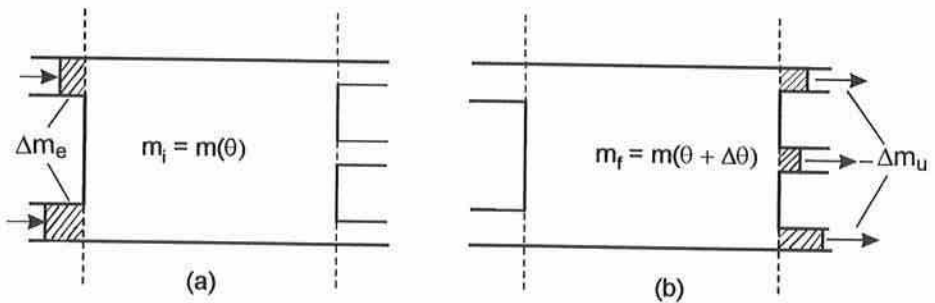
dove

$$m = \int_V \rho dV \quad (2.4)$$

è la massa contenuta nel volume di controllo,  $\dot{m}_e$  è la generica portata di massa entrante ed  $\dot{m}_u$  è la generica portata di massa uscente. Ovviamente, nel caso di regime stazionario, l'Eq. (2.3) si riduce a

$$\sum \dot{m}_e = \sum \dot{m}_u \quad (2.5)$$

cioè all'affermazione che la sommatoria delle portate massiche entranti è uguale alla sommatoria delle portate massiche uscenti.



**Figura 2.2** Masse entranti ed uscenti da un sistema aperto: (a) istante iniziale  $i$  e (b) istante finale  $f$ .

## 2.5 LAVORO IN UN SISTEMA CHIUSO

Per valutare il lavoro di compressione, o d'espansione, scambiato con l'esterno da una massa  $m$  di fluido contenuta nel sistema chiuso rappre-

sentato in Fig. 2.3, si può supporre, in un primo tempo, che il processo avvenga senza attriti a seguito di variazioni infinitesime della forza esterna  $F$ . In questo modo, la trasformazione è quasi-statica e le variazioni d'energia cinetica sono certamente trascurabili. Poiché, in un sistema chiuso, anche le variazioni d'energia potenziale sono quasi sempre trascurabili, nelle ipotesi poste si ha

$$d\hat{L} = F dx = (pA) dx = p dV \quad (2.6)$$

dove  $d\hat{L}$  coincide con il lavoro compiuto dalle forze interne di pressione durante lo spostamento infinitesimo  $dx$  dello stantuffo. Esprimendo il volume geometrico come prodotto della massa per il volume specifico, dalla (2.6) si ottiene

$$d\hat{L} = m p dv = m dL \quad (2.7)$$

dove  $dL = p dv$  è il lavoro delle forze interne, riferito all'unità di massa.

Per uno spostamento finito ed una trasformazione quasi-statica dallo stato iniziale  $i$  allo stato finale  $f$ , il lavoro totale può essere scritto nella forma

$$\hat{L}_{if} = \int_{V_i}^{V_f} p dV = m \int_{v_i}^{v_f} p dv = m L_{if} \quad (2.8)$$

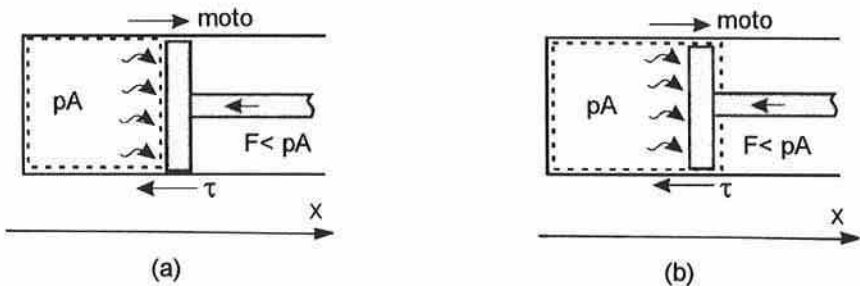
dove

$$L_{if} = \int_{v_i}^{v_f} p dv \quad (2.9)$$

è il lavoro per unità di massa. Le relazioni (2.8) e (2.9) consentono il calcolo del lavoro, una volta nota la relazione che lega la pressione al volume specifico nelle diverse trasformazioni di un sistema chiuso.

In una trasformazione reale di un sistema chiuso non mancano gli effetti dissipativi anche se, in genere, possono essere trascurati gli attriti viscosi rispetto agli attriti meccanici agenti tra stantuffo e cilindro. Si può

quindi osservare che, in presenza di attriti meccanici, le relazioni (2.8) e (2.9) esprimono sia il lavoro delle forze interne di pressione sia il lavoro scambiato con l'esterno, se il sistema è definito come in Fig. 2.3 (a). Se invece il sistema è definito come in Fig. 2.3 (b), si può ammettere ancora che il lavoro delle forze interne di pressione sia esprimibile mediante le (2.8) e (2.9), ma non si può dire più che tale lavoro coincida con il lavoro scambiato dal sistema con l'esterno, a meno che lo stantuffo non si muova senza attriti.



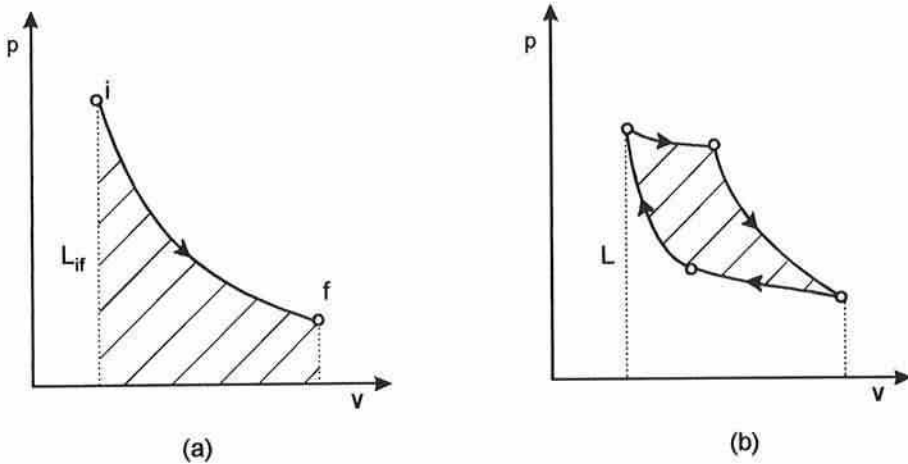
**Figura 2.3** Lavoro in un sistema chiuso comprendente (a) solo il fluido o (b) il fluido e lo stantuffo mobile.

Per una trasformazione quasi-statica generica, rappresentata sul diagramma  $(p, v)$  in Fig. 2.4 (a), il lavoro espresso dall'Eq. (2.9) corrisponde all'area tratteggiata compresa tra la trasformazione e l'asse delle ascisse. Di conseguenza, tale lavoro risulta positivo quando avviene con aumento di volume, mentre risulta negativo quando avviene con diminuzione di volume. Nel caso particolare di una trasformazione quasi-statica ciclica, rappresentato in Fig. 2.4 (b), si ha  $i = f$  ed, in base a ben note proprietà degli integrali, il lavoro risulta positivo quando il ciclo è percorso in senso orario come in figura, mentre risulta negativo quando il ciclo è percorso in senso antiorario.

Le forze d'attrito si oppongono al moto e quindi fanno sempre lavoro negativo, sia durante l'espansione sia durante la compressione. Questo concetto può essere espresso analiticamente scrivendo

$$L_{if} = \int_{v_i}^{v_f} p dv + R_{if}^- = \int_{v_i}^{v_f} p dv - |R_{if}^-| \quad (2.10)$$

dove, in assenza di variazioni d'energia cinetica e potenziale, il lavoro scambiato con l'esterno è calcolato come somma algebrica del lavoro delle forze interne di pressione e del lavoro delle forze interne d'attrito  $R_{if}^-$ . Dall'Eq. (2.10) appare allora evidente che il lavoro d'espansione (positivo) è ridotto dalla presenza degli attriti, mentre il lavoro di compressione (negativo) è aumentato, in valore assoluto, dalla presenza degli attriti.



**Figura 2.4** Lavoro in una trasformazione quasi-statica di un sistema chiuso: (a) trasformazione generica e (b) trasformazione ciclica.

### Esempio 2.1

In un sistema chiuso 1 kg di gas che, inizialmente, si trova alla pressione di 400 kPa ed a un volume specifico pari a  $1 \text{ m}^3/\text{kg}$ , si espande in modo quasi-statico fino a raggiungere il volume specifico finale di  $4 \text{ m}^3/\text{kg}$ , mentre la pressione varia secondo la legge

$$pv = \text{cost}$$



Si calcoli il lavoro compiuto dalle forze interne di pressione.

### Soluzione

Il lavoro compiuto dalle forze interne di pressione può essere calcolato in base all'Eq. (2.9). Si ha così

$$L_{if} = \int_{v_i}^{v_f} p \, dv = p_i v_i \int_{v_i}^{v_f} \frac{dv}{v} = p_i v_i \ln \frac{v_f}{v_i} = 400 \cdot 1 \ln 4 = 554,5 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Come si può notare, il lavoro è positivo in quanto corrisponde ad un'espansione. Nel Capitolo 5, dedicato ai gas ideali, saranno presentati diversi esempi di questo tipo di calcoli.

## 2.5.1 Bilancio dell'Energia Meccanica nei Sistemi Chiusi

Come si è detto, nei sistemi chiusi velocità e spostamenti sono, di solito, molto piccoli e quindi non si hanno variazioni significative d'energia cinetica e potenziale tra gli stati iniziale e finale di una trasformazione. Tuttavia nulla impedisce di fare riferimento, ad esempio, a schemi d'appoggio del tipo rappresentato in Fig. 2.5, dove si possono avere velocità e spostamenti rilevanti della massa fluida e, quindi, variazioni d'energia cinetica e potenziale non trascurabili "a priori". In questo caso, può avere senso esprimere il lavoro scambiato con l'esterno in base al bilancio completo dell'energia meccanica. Per un riferimento cartesiano inerziale ed un sistema a massa unitaria, con velocità e volumi specifici ragionevolmente uniformi, il bilancio completo dell'energia meccanica porge

$$L_{if} = \int_{v_i}^{v_f} p \, dv - |R_{if}^-| - (e_{wf} - e_{wi}) - (e_{zf} - e_{zi}) \quad (2.11)$$

Come si vede, nel bilancio completo (2.11) sono considerate anche le variazioni d'energia cinetica e potenziale, oltre ai lavori delle forze interne di

pressione e d'attrito. Infatti

$$e_w = \frac{w^2}{2} \quad (2.12)$$

è l'energia cinetica per unità di massa, ed

$$e_z = gz \quad (2.13)$$

è l'energia potenziale per unità di massa legata al solo campo di forze gravitazionali. (Ipotesi diverse vengono fatte, ad esempio, nello studio delle turbomacchine quando, in presenza di rotazioni, si utilizzano terne di riferimento rotanti e le variazioni d'energia potenziale sono associate anche al campo di forze centrifughe).

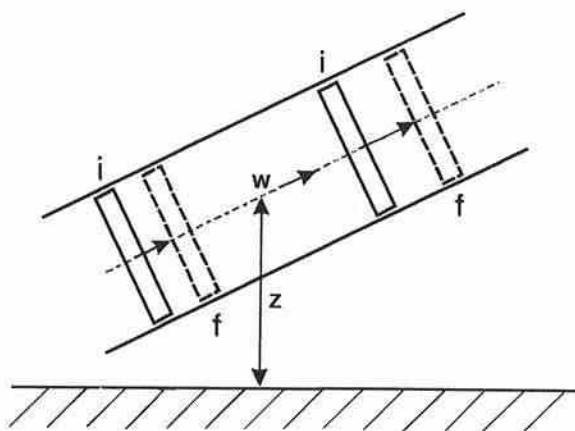
Nel sistema di Fig. 2.5, a differenza di quel che si ha nei sistemi chiusi tradizionali, gli attriti viscosi non sono trascurabili "a priori", poiché le velocità in gioco possono essere elevate. Se poi, come nel seguito, la Fig. 2.5 viene utilizzata per schematizzare una massa fluida che si sposta all'interno di un sistema aperto monodimensionale, non si hanno nemmeno attriti meccanici tra stantuffi e pareti, in quanto i confini all'interno del fluido sono costituiti da superfici di separazione ideali. Pertanto, nelle applicazioni fluidodinamiche della (2.11) e delle relazioni da essa ricavate nel Paragrafo 2.6.2, il lavoro delle forze d'attrito va attribuito interamente all'azione delle forze viscosi.

L'Eq. (2.11) costituisce, come si è detto, il bilancio completo dell'energia meccanica per i sistemi chiusi e consente di interpretare il lavoro scambiato con l'esterno come somma algebrica di

- lavoro compiuto dalle forze interne di pressione,
- lavoro negativo compiuto dalle forze interne d'attrito,
- variazioni d'energia cinetica e potenziale.

Per ricordare i segni delle quantità che compaiono nella (2.11), basta pensare che, ad esempio, sia il lavoro delle forze d'attrito sia gli aumenti d'ener-

gia cinetica e potenziale fanno diminuire il lavoro positivo ottenibile dal sistema. Naturalmente tali effetti non sono equivalenti anche sul piano fisico, poiché gli accumuli d'energia cinetica e potenziale possono, successivamente, dare luogo a scambi positivi di lavoro con l'esterno, mentre l'azione delle forze d'attrito rappresenta una pura dissipazione d'energia meccanica.



**Figura 2.5** Esempio di sistema chiuso nel quale le variazioni di energia cinetica e potenziale possono risultare significative ai fini del bilancio dell'energia meccanica.

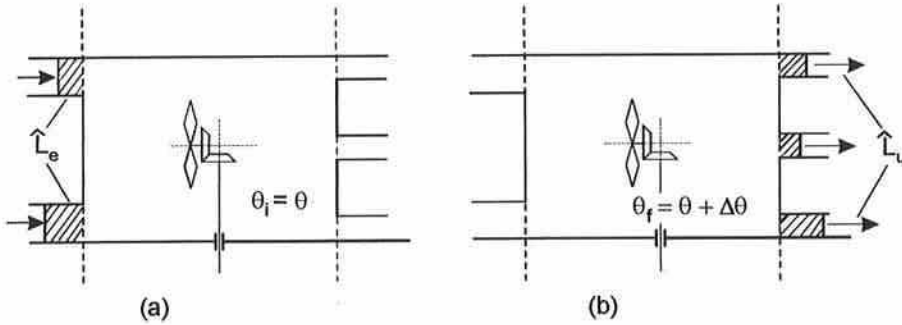
## 2.6 LAVORO IN UN SISTEMA APERTO

La maggior parte delle trasformazioni d'interesse tecnico riguarda sistemi aperti, ed è quindi interessante valutare analiticamente il lavoro scambiato dai sistemi di questo tipo. A tal proposito conviene distinguere, innanzi tutto, tra lavoro tecnico  $\hat{L}'_{if}$ , che può essere effettivamente utilizzato nei processi tecnologici, e lavoro totale  $\hat{L}_{if}$ , che comprende anche il lavoro scambiato in corrispondenza alle sezioni d'entrata e d'uscita dei fluidi.

### 2.6.1 Lavoro Tecnico Utile in un Sistema Aperto

Come si è detto, il lavoro tecnico utile  $\hat{L}'_{if}$  in un sistema aperto è, in genere,

diverso dal lavoro totale  $\hat{L}_{if}$  scambiato dal sistema aperto con l'esterno, a causa dei lavori associati alle entrate ed alle uscite di fluido. Infatti, lo schema di Fig. 2.6 evidenzia chiaramente come, tra l'istante iniziale  $\vartheta$  e l'istante finale  $\vartheta + \Delta\vartheta$ , il sistema chiuso in movimento scambia lavoro, non utilizzabile ai fini tecnici, in corrispondenza a tutte le sezioni d'entrata e d'uscita del fluido.



**Figura 2.6** Lavori (a) d'entrata e (b) d'uscita in un sistema aperto, distinti dal lavoro tecnico dell'elica.

Nell'ipotesi che l'intervallo di tempo  $\Delta\vartheta$  sia piccolo, e che le grandezze di stato siano uniformi nelle sezioni d'entrata ed uscita, si ha

$$\hat{L}_e^- = -p_e A_e \Delta x_e = -p_e \Delta V_e = -\Delta m_e p_e v_e = \Delta m_e L_e^- \quad (2.14)$$

per il generico lavoro di entrata e

$$\hat{L}_u^+ = p_u A_u \Delta x_u = p_u \Delta V_u = \Delta m_u p_u v_u = \Delta m_u L_u^+ \quad (2.15)$$

per il generico lavoro d'uscita. Le Eq. (2.14) e (2.15) definiscono implicitamente anche i lavori specifici d'entrata

$$L_e^- = -p_e v_e \quad (2.16)$$

e d'uscita

$$L_u^+ = p_u v_u \quad (2.17)$$

A seguito delle convenzioni sui segni, e quindi rispetto ad un osservatore interno al sistema, i lavori d'entrata sono negativi, in quanto derivano da spostamenti in senso opposto alle forze di pressione interne, mentre i lavori d'uscita sono positivi, in quanto derivano da spostamenti nello stesso senso delle forze di pressione interne.

Il lavoro totale scambiato con l'esterno dal sistema chiuso in movimento è quindi esprimibile come

$$\hat{L}_{if} = \hat{L}'_{if} + \left( \sum \hat{L}_e^- + \sum \hat{L}_u^+ \right) = \hat{L}'_{if} - \sum \Delta m_e p_e v_e + \sum \Delta m_u p_u v_u \quad (2.18)$$

e, di conseguenza, il lavoro tecnico utile è dato da

$$\hat{L}'_{if} = \hat{L}_{if} + \sum \Delta m_e p_e v_e - \sum \Delta m_u p_u v_u \quad (2.19)$$

Se si dividono i due membri della (2.19) per  $\Delta\vartheta$ , e si passa al limite per  $\Delta\vartheta$  tendente a zero, si ottiene

$$P' = P + \sum \dot{m}_e p_e v_e - \sum \dot{m}_u p_u v_u \quad (2.20)$$

dove  $P'$  è la potenza tecnica utile,  $P$  è la potenza totale scambiata,  $\dot{m}_e$  è la generica portata entrante ed  $\dot{m}_u$  è la generica portata uscente.

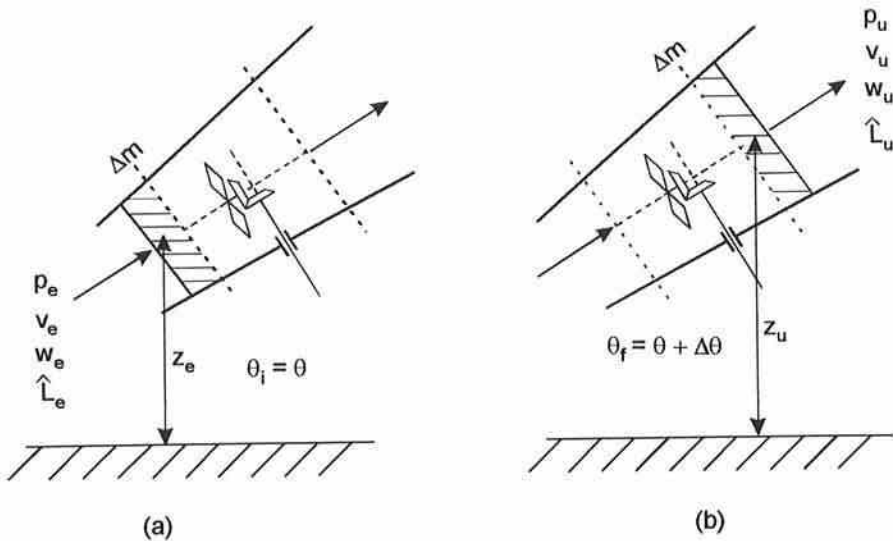
## 2.6.2 Bilancio dell'Energia Meccanica per Sistemi a Deflusso Monodimensionale Stazionario

Le Eq. (2.19) e (2.20) definiscono il lavoro e la potenza tecnica utili scambiati da un sistema aperto con l'esterno, ma non consentono il calcolo di queste quantità. Come si è detto, per tale calcolo bisognerà ricorrere al bilancio di tutte le forme, meccaniche e termiche, d'energia che sarà illustrato nel capitolo seguente. Nel caso particolare di sistemi a deflusso monodi-

mensionale stazionario, tuttavia, la valutazione analitica del lavoro tecnico utile è abbastanza agevole, anche nell'ambito del bilancio della sola energia meccanica. In questo caso, negli schemi di Fig. 2.7 si ha  $\Delta m_e = \Delta m_u = \Delta m$  e l'Eq. (2.18) può essere scritta nella forma semplificata

$$L_{if} = \frac{\hat{L}_{if}}{\Delta m} = \frac{1}{\Delta m} (\hat{L}'_{if} + \hat{L}_e + \hat{L}_u^+) = L'_{if} - p_e v_e + p_u v_u \quad (2.21)$$

dove  $L_{if}$  ed  $L'_{if}$  sono i lavori specifici riferiti all'intervallo di tempo impiegato da una massa unitaria per entrare, in  $e$ , ed uscire, da  $u$ .



**Figura 2.7** Sistemi aperti in regime stazionario con una sola entrata ed una sola uscita: (a) istante iniziale e (b) istante finale.

Evidentemente, il punto di vista su cui si basa l'Eq. (2.21) è quello Euleriano, proprio di un osservatore esterno al sistema e solidale ad una terna di assi Cartesiani fissi. Tuttavia, si è già notato che l'ipotesi di moto monodimensionale stazionario consente di esprimere le grandezze caratteristiche in funzione della sola coordinata assiale, anche all'interno del volume di controllo e non solo nelle sezioni d'entrata e d'uscita. Ciò suggerisce

l'adozione di un punto di vista alternativo Lagrangiano, proprio di un osservatore solidale alla massa  $\Delta m = \Delta m_e = \Delta m_u$  che si sposta dall'entrata all'uscita. Senza perdere in generalità, tale massa può essere assunta unitaria al fine di uguagliare le espressioni (2.11) e (2.21) del lavoro specifico  $L_{if}$  e, nel contempo, si può porre  $i = e$  ed  $f = u$ . Così facendo, si ottiene

$$\begin{aligned} L_{eu} &= L_{if} = L'_{if} - p_e v_e + p_u v_u = L'_{eu} - p_e v_e + p_u v_u \\ &= \int_{v_e}^{v_u} p dv - |R_{eu}^-| - (e_{wu} - e_{we}) - (e_{zu} - e_{ze}) \end{aligned} \quad (2.22)$$

in quanto nulla cambia all'interno del volume di controllo e tutto accade come se, nell'intervallo di tempo che va dall'istante iniziale  $i$  all'istante finale  $f$ , la massa unitaria si spostasse dalla sezione d'entrata  $e$  alla sezione d'uscita  $u$ . Se nella (2.22) si effettua l'integrazione per parti

$$\int_{v_e}^{v_u} p dv = p_u v_u - p_e v_e - \int_{p_e}^{p_u} v dp \quad (2.23)$$

e si tiene conto delle definizioni (2.12) e (2.13), si giunge facilmente all'espressione

$$L'_{eu} = - \int_{p_e}^{p_u} v dp - |R_{eu}^-| - \frac{w_u^2 - w_e^2}{2} - g(z_u - z_e) \quad (2.24)$$

che costituisce il bilancio dell'energia meccanica per i sistemi aperti a deflusso stazionario monodimensionale. L'Eq. (2.24) consente d'interpretare il lavoro scambiato con l'esterno come somma algebrica di:

- lavoro tecnico utile compiuto dalle forze interne di pressione;
- lavoro compiuto dalle forze interne d'attrito;
- variazioni d'energia cinetica e potenziale.

Il termine corrispondente al lavoro tecnico utile compiuto dalle forze interne di pressione può, a sua volta, essere riscritto in base all'Eq. (2.23),

ponendo

$$-\int_{p_e}^{p_u} v dp = \int_{v_e}^{v_u} p dv + p_e v_e - p_u v_u = \int_{v_e}^{v_u} p dv - (L_e^- + L_u^+) \quad (2.25)$$

dove il terzo membro rappresenta la differenza tra il lavoro totale delle forze interne di pressione ed i lavori d'entrata e d'uscita del fluido.

Una particolarizzazione notevole dell'Eq. (2.24), è la relazione valida per il deflusso monodimensionale stazionario senza lavoro utile e senza attrito

$$-\int_{p_e}^{p_u} v dp + \frac{w_e^2 - w_u^2}{2} + g(z_e - z_u) = 0 \quad (2.26)$$

che, per un fluido incomprimibile, si trasforma nell'equazione di Bernoulli

$$v(p_e - p_u) + \frac{w_e^2 - w_u^2}{2} + g(z_e - z_u) = 0 \quad (2.27)$$

Ancora dalla (2.24), in assenza di variazioni d'energia cinetica e potenziale, si ottiene la relazione omologa della (2.10)

$$L'_{eu} = -\int_{p_e}^{p_u} v dp - |R_{eu}^-| \quad (2.28)$$

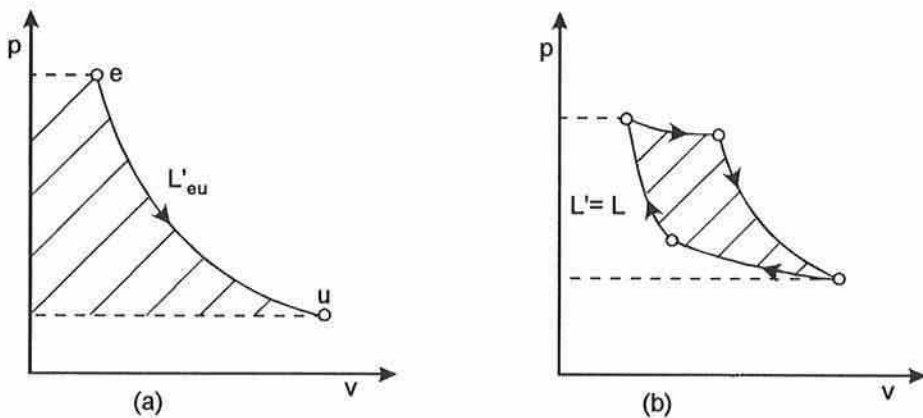
ed, in assenza anche di attriti, si ha l'omologa della (2.9)

$$L'_{eu} = -\int_{p_e}^{p_u} v dp \quad (2.29)$$

Nell'ipotesi di variazioni trascurabili d'energia cinetica e potenziale ed in assenza d'attriti, la relazione (2.29) consente il calcolo del lavoro tecnico utile scambiato, una volta nota la relazione che lega il volume specifico alla pressione nelle diverse trasformazioni. Per una trasformazione quasi-statica



generica, rappresentata sul diagramma  $(p, v)$  in Fig. 2.8 (a), il lavoro espresso dall'Eq. (2.29) corrisponde all'area tratteggiata compresa tra la trasformazione e l'asse delle ordinate. Di conseguenza, tale lavoro risulta positivo quando avviene con diminuzione di pressione, mentre risulta negativo quando avviene con aumento di pressione. Nel caso particolare di una trasformazione quasi-statica ciclica, rappresentato in Fig. 2.8 (b), si ha  $e = u$  ed, in base a ben note proprietà degli integrali, il lavoro risulta positivo quando il ciclo è percorso in senso orario come in figura, mentre risulta negativo quando il ciclo è percorso in senso antiorario. Ovviamente, per una trasformazione ciclica, non riveste alcuna importanza la scelta di una schematizzazione di tipo "aperto" o "chiuso".



**Figura 2.8** Lavoro in una trasformazione quasi-statica di un sistema a deflusso monodimensionale stazionario: (a) trasformazione generica e (b) trasformazione ciclica.

Nei sistemi aperti a deflusso monodimensionale stazionario, la potenza tecnica utile può essere calcolata come

$$P' = \dot{m} L'_{eu} \quad (2.30)$$

poiché il lavoro tecnico scambiato nell'unità di tempo (cioè la potenza tec-

nica) è proporzionale alla massa defluita nell'unità di tempo (cioè alla portata massica). Se poi il fluido è incomprimibile, non si hanno attriti e le variazioni d'energia cinetica e potenziale sono trascurabili, dalle Eq. (2.29) e (2.30) si ottiene

$$P' = -\dot{m} \int_{p_e}^{p_u} v dp = \dot{m}v(p_e - p_u) = \dot{V}(p_e - p_u) \quad (2.31)$$

dove  $\dot{V}$  è la portata volumetrica.

Le relazioni (2.27) e (2.31) valgono rigorosamente per tutti i liquidi ma sono applicabili, con ottima approssimazione, anche ai gas quando le variazioni di pressione sono piccole.

### Esempio 2.2

Si ricavi la relazione (2.30).

#### Soluzione

Dal confronto tra la relazione (2.20), scritta per un sistema con una sola entrata ed una sola uscita

$$P' = P + \dot{m}(p_e v_e - p_u v_u)$$

e la relazione

$$L'_{eu} = L_{eu} + (p_e v_e - p_u v_u)$$

ricavabile dal primo e quarto membro della (2.22), si ottiene la relazione cercata

$$P' = \dot{m}L'_{eu}$$

e l'espressione

$$P = \dot{m}L_{eu}$$

che lega la potenza ed il lavoro totali.

**Esempio 2.3**

Negli impianti di ventilazione e condizionamento, le differenze tra le pressioni operative massime e minime sono dell'ordine di pochi pascal (tipicamente 200 Pa) a fronte di una pressione media di funzionamento vicina alla pressione atmosferica (ordine di grandezza:  $10^5$  Pa). Si valuti, l'errore che si commette utilizzando la (2.31) nel calcolo della potenza dei ventilatori.

*Soluzione*

Le variazioni relative di volume specifico, a temperatura costante, sono certamente correlate alle variazioni relative di pressione. Queste ultime hanno ordine di grandezza 200/100000, cioè 0,2%. Pertanto, nel caso in esame, l'errore che si commette utilizzando la (2.31) è dell'ordine dello 0,2%.

**Esempio 2.4**

In un sistema aperto 1 kg di gas entra alla pressione di 400 kPa ed a un volume specifico pari a  $1 \text{ m}^3/\text{kg}$ . Si espande in modo quasi-statico fino alla pressione di uscita di 100 kPa, mentre il volume specifico varia secondo la legge

$$pv = \text{cost}$$

In assenza di attriti e nell'ipotesi di variazioni trascurabili d'energia cinetica e potenziale, si calcoli il lavoro scambiato con l'esterno.

*Soluzione*

Il lavoro scambiato con l'esterno può essere calcolato in base all'Eq. (2.29). Si ha così

$$\begin{aligned} L'_{eu} &= - \int_{p_e}^{p_u} v dp = p_e v_e \int_{p_u}^{p_e} \frac{dp}{p} \\ &= p_e v_e \ln \frac{p_e}{p_u} = 400 \cdot 1 \ln 4 = 554,5 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \end{aligned}$$

Come si può notare, il lavoro è positivo in quanto avviene con diminuzione di pressione. La coincidenza con il risultato ottenuto nell'Esempio 2.1 non è casuale ma dipende dal fatto che, in entrambi i casi, si è assunto costante il prodotto della pressione per il volume specifico.

### Esempio 2.5

In corrispondenza alle sezioni d'entrata e d'uscita della pompa per acqua, rappresentata nella Fig. 2.9, sono misurati i seguenti valori:

$$z_u - z_e = 1 \text{ m}; w_e = 1 \text{ m/s}; w_u = 2 \text{ m/s}; p_u - p_e = 60 \text{ kPa}$$

Nell'ipotesi che si possa trascurare il lavoro d'attrito, che l'accelerazione di gravità sia pari a  $9,81 \text{ m/s}^2$  e che il volume specifico valga  $0,001 \text{ m}^3/\text{kg}$ , si calcoli la potenza spesa per il pompaggio quando la portata volumetrica è pari a  $0,002 \text{ m}^3/\text{s}$ .

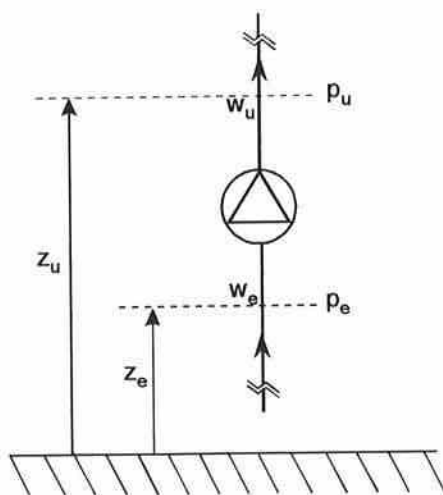


Figura 2.9 Schema funzionale di una pompa per acqua.

### Soluzione

Il lavoro specifico tecnico utile della pompa può essere calcolato in base alla (2.24)

$$\begin{aligned}
 L'_{eu} &= - \int_{p_e}^{p_u} v dp - |R'_{eu}| - \frac{w_u^2 - w_e^2}{2} - g(z_u - z_e) \\
 &= -v(p_u - p_e) - \frac{w_u^2 - w_e^2}{2} - g(z_u - z_e) \\
 &= -1 \cdot 10^{-3} \cdot 60000 - (2^2 - 1^2) / 2 - 9,81 \cdot 1 = -71,31 \text{ J/kg}
 \end{aligned}$$

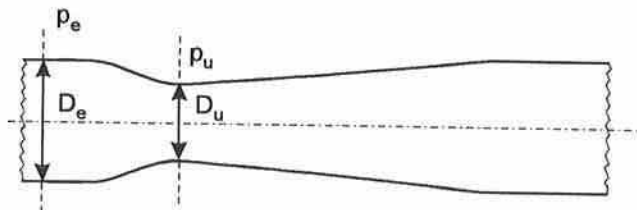
mentre la potenza tecnica utile può essere calcolata in base alla (2.31)

$$P' = \dot{m} L'_{eu} = \frac{\dot{V}}{v} L'_{eu} = - \frac{2 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 10^{-3}} 71,31 = -143 \text{ W}$$

Come si può notare, lavoro specifico e potenza sono negativi in quanto fatti sul sistema.

### Esempio 2.6

Nel venturimetro ad asse orizzontale, schematizzato in Fig. 2.10, il rapporto tra i diametri della sezione di entrata e della sezione ristretta, è pari a 2 mentre la differenza di pressione  $p_e - p_u$  è pari a 8 kPa. In assenza d'attriti e per velocità uniformi nelle sezioni, si determini la velocità  $w_u$  nella sezione ristretta sapendo che il volume specifico del fluido incomprimibile è pari a 0,001 m<sup>3</sup>/kg.



**Figura 2.10** Schema funzionale di un venturimetro.

*Soluzione*

Poiché il regime è stazionario ed il fluido è incomprimibile, la portata volumetrica nelle due sezioni è costante. Si ha quindi

$$\dot{V} = w_e A_e = w_u A_u$$

e, pertanto, risulta

$$w_e = w_u \frac{A_u}{A_e} = w_u \left( \frac{D_u}{D_e} \right)^2$$

Per  $z_u - z_e = 0$ , dall'equazione di Bernoulli (2.27) si ricava

$$w_u^2 - w_e^2 = w_u^2 \left[ 1 - \left( \frac{D_u}{D_e} \right)^4 \right] = 2v(p_e - p_u)$$

ovvero

$$w_u = \sqrt{\frac{2v(p_e - p_u)}{1 - (D_u/D_e)^4}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1 \cdot 10^{-3} \cdot 8000}{1 - 0,5^4}} = 4,13 \text{ m/s}$$

Poiché la geometria del venturimetro è nota, dalla velocità nella sezione ristretta si può risalire alla portata volumetrica.

### 2.6.3 Calcolo delle Perdite di Carico

Il calcolo delle “perdite di carico” sta alla base del dimensionamento di pompe e ventilatori. Le perdite di carico sono definite come i decrementi di pressione necessari a mantenere il moto in regime permanente nelle tubazioni e nei condotti, in assenza di lavoro utile e di variazioni d'energia cinetica e potenziale

Le perdite di carico sono dovute all'azione degli attriti viscosi e sono esprimibili in forma molto semplice nell'ipotesi di fluido incomprimibi-

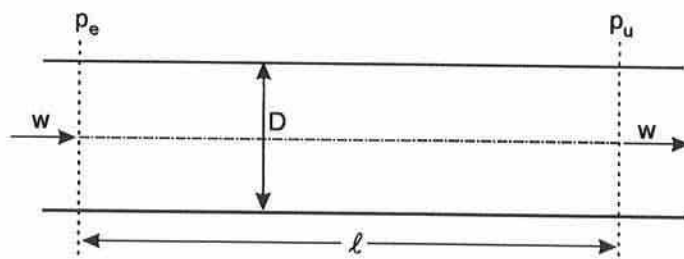
le. Con riferimento alla Fig. 2.11, dal bilancio dell'energia meccanica (2.24) scritto per i fluidi incompressibili, si ottiene

$$-\int_{p_e}^{p_u} v dp = v(p_e - p_u) = |R_{eu}^-| \quad (2.32)$$

Poiché risulta  $v = 1/\rho$ , dall'Eq. (2.32) si ha la relazione

$$p_e - p_u = \rho |R_{eu}^-| \quad (2.33)$$

che fornisce il legame tra perdite di carico e lavoro specifico delle forze d'attrito.



**Figura 2.11** Moto di un fluido incompressibile in una tubazione orizzontale a sezione costante.

Nella pratica, il lavoro delle forze d'attrito è calcolato utilizzando relazioni semiempiriche. Per un tratto di tubazione di lunghezza  $\ell$  e diametro  $D$ , si ha infatti

$$|R_{eu}^-| = f \frac{\ell}{D} \frac{w^2}{2} \quad (2.34)$$

e

$$p_e - p_u = \rho |R_{eu}^-| = f \frac{\ell}{D} \rho \frac{w^2}{2} \quad (2.35)$$

dove  $w$  è la velocità del fluido ed  $f$  è un coefficiente empirico adimensionale, detto fattore d'attrito, valutabile, ad esempio, in base al classico diagramma di Moody illustrato nei corsi di meccanica dei fluidi.

Le espressioni semiempiriche del lavoro delle forze d'attrito rischiano, però, di mascherare il significato fisico del termine  $R_{eu}^-$  che compare nel bilancio dell'energia meccanica. Tale termine non deriva, come si è detto, da attriti meccanici alle pareti ma dall'azione di forze viscosse associate al moto relativo degli elementi fluidi. Queste azioni, a loro volta, possono essere evidenziate solo abbandonando, come in Fig. 2.12, l'ipotesi di moto monodimensionale. Se si fa riferimento, ad esempio, al moto di un fluido viscoso nelle vicinanze di una parete solida si nota che, su ogni elemento di area unitaria e spessore  $dy$  agiscono due sforzi tangenziali di verso opposto, esprimibili come

$$\tau = \frac{F}{A} = \mu \frac{dw}{dy} \quad (2.36)$$

dove  $\tau$  è lo sforzo tangenziale, rapporto tra forza tangenziale  $F$  ed area  $A$ , e  $\mu$  è la viscosità dinamica del fluido, misurata in chilogrammi per metro e per secondo [ $\text{kg}/(\text{m s})$ ]. Nelle vicinanze della parete la velocità cresce linearmente con la distanza  $y$ , a partire da un valore zero all'interfaccia solido-liquido. Pertanto, in tale zona, sono costanti il gradiente di velocità  $dw/dy$  ed, in base alla (2.36), anche i moduli di  $\tau$  ed  $F$ . Non è però costante la potenza trasmessa attraverso il fluido, perché la superficie superiore dell'elemento  $dy$  scorre a velocità più elevata della superficie inferiore, e quindi immette nell'elemento una potenza maggiore di quella restituita alla corrente dalla superficie inferiore. In termini quantitativi si ha

$$\begin{aligned} (P + dP) - P = dP &= F(w + dw) - Fw \\ &= Fdw = \tau A dw = \mu A \frac{dw}{dy} dw \end{aligned} \quad (2.37)$$



e, di conseguenza, la potenza non restituita per unità di volume  $A dy$ , è pari a

$$\frac{1}{A} \frac{dP}{dy} = \mu \left( \frac{dw}{dy} \right)^2 \quad (2.38)$$

Se si integra l'Eq. (2.38) su tutto il volume di controllo, si ottiene la potenza globale dissipata dagli attriti

$$\dot{m} |R_{eu}^-| = \int_V \mu \left( \frac{dw}{dy} \right)^2 dV \quad (2.39)$$

e si evince anche il significato fisico del lavoro compiuto dalle forze d'attrito viscoso.

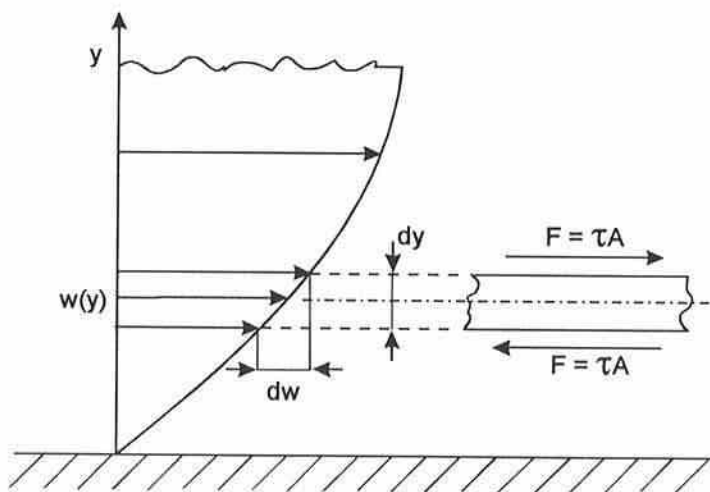


Figura 2.12 Moto di un fluido viscoso nelle vicinanze di una parete solida.

### Esempio 2.7

In una tubazione orizzontale dritta lunga 100 m, con diametro interno costante pari a 0,1 m, scorre con la velocità di 1 m/s un fluido incompressibile avente densità pari a 1000 kg/m<sup>3</sup>. Si valuti la perdita di carico sapendo che

il fattore d'attrito vale  $f = 0,06$ .

### *Soluzione*

In base alla (2.34), il lavoro specifico delle forze d'attrito vale

$$|R_{eu}^-| = f \frac{\ell}{d} \frac{w^2}{2} = 0,06 \frac{100}{0,1} \cdot \frac{1^2}{2} = 30 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

mentre dalle (2.33) e (2.35) si ha

$$p_e - p_u = f \frac{\ell}{D} \rho \frac{w^2}{2} = \rho |R_{eu}^-| = 1000 \cdot 30 = 30 \text{ kPa}$$

Le perdite di carico così calcolate sono dette “distribuite”, in quanto agiscono in modo uniforme su tutta la lunghezza di una tubazione a diametro costante. Dalla meccanica dei fluidi, tuttavia, è noto che esistono anche perdite “concentrate” in corrispondenza di eventuali valvole, variazioni di direzione, allargamenti, restringimenti e così via.

## 2.7 CONCLUSIONI

In questo capitolo si è formulato il principio di conservazione della massa e si sono introdotti i bilanci dell'energia meccanica per i sistemi chiusi ed i sistemi aperti. Si è quindi visto come il lavoro scambiato con l'esterno da un sistema possa essere calcolato direttamente utilizzando il bilancio dell'energia meccanica, almeno nei sistemi chiusi e nei sistemi aperti a deflusso monodimensionale stazionario. Nel caso generale di sistemi aperti con più entrate e più uscite, il lavoro scambiato può invece essere espresso solo attraverso il bilancio di tutte le forme d'energia, illustrato nel capitolo seguente.

---

# CAPITOLO 3

## PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

---

### 3.1 GENERALITÀ

Nel capitolo precedente si sono date le definizioni di calore e lavoro e si sono ricavate le espressioni analitiche del lavoro scambiato durante i processi quasi statici nei sistemi chiusi e nei sistemi aperti a deflusso monodimensionale stazionario. Non si sono tentate, invece, valutazioni analitiche dirette del lavoro scambiato in sistemi aperti con più entrate e più uscite, poiché tali valutazioni sono possibile solo nell'ambito dei bilanci energetici globali illustrati in questo capitolo. Nel seguito ci si occupa, dapprima, dei bilanci di tutte le forme d'energia, mostrando come gli scambi di calore e di lavoro siano legati alle variazioni del livello energetico complessivo dei sistemi. Successivamente, i bilanci d'energia sono particolarizzati per alcune situazioni d'interesse tecnico ed, alla fine, vengono poste le basi per la valutazione dei calori specifici e delle proprietà termodinamiche legate ad essi.

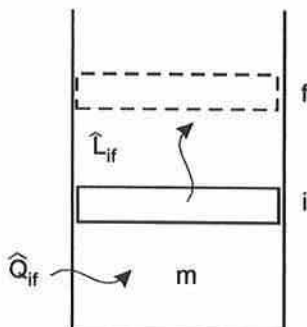
### 3.2 PRIMO PRINCIPIO PER I SISTEMI CHIUSI

Nella trasformazione che porta il sistema chiuso, schematizzato in Fig. 3.1, dallo stato iniziale  $i$  allo stato finale  $f$ , si ha

$$U_{gf} - U_{gi} = \hat{Q}_{if} - \hat{L}_{if} \quad (3.1)$$

dove  $U_g$  indica l'energia globale contenuta nel sistema, mentre  $\hat{Q}_{if}$  ed  $\hat{L}_{if}$

indicano, rispettivamente, il calore ed il lavoro scambiati. Nella relazione (3.1), energia, calore e lavoro indicano quantità globali e si misurano quindi in joule [J] od in kilojoule [kJ].



**Figura 3.1** Trasformazione di un sistema chiuso dallo stato iniziale  $i$  allo stato finale  $f$ .

Le interazioni del sistema con l'esterno,  $\hat{Q}_{if}$  ed  $\hat{L}_{if}$  comportano, a loro volta, variazioni esterne d'energia uguali e di segno opposto a quelle che hanno luogo all'interno. Infatti, il calore ed il lavoro sono forme d'energia in transito, e quindi l'Eq. (3.1) può essere interpretata come un'indicazione dell'uguaglianza tra le variazioni dell'energia nel sistema, al primo membro, e le interazioni del sistema con l'esterno, al secondo membro. Di conseguenza, dall'Eq. (3.1) si evince che l'energia dell'universo (cioè del sistema e dell'esterno presi assieme) resta costante e, in questo senso, il primo principio della termodinamica può essere definito "principio della conservazione dell'energia".

L'energia globale contenuta nel sistema si presenta come somma di una forma microscopica: l'energia interna  $U$ , associata ai movimenti d'agitazione molecolare ed alle (eventuali) azioni attrattive o repulsive tra le molecole, e di due forme macroscopiche associate alla massa  $m$  del sistema: l'energia cinetica  $E_w$  e l'energia potenziale  $E_z$ . Si ha quindi

$$U_g = U + E_w + E_z \quad (3.2)$$

dove, in situazioni di ragionevole uniformità come quelle che generalmente prevalgono nei sistemi chiusi, risulta  $U_g = m u_g$ ,  $E_w = m e_w$  ed  $E_z = m e_z$  con  $e_w = w^2 / 2$  ed  $e_z = g z$ . L'energia interna è qui definita, metrologicamente, a meno di una costante additiva, come differenza rispetto all'energia globale

$$U_f - U_i = U_{gf} - U_{gi} - [(E_{wf} - E_{wi}) + (E_{zf} - E_{zi})] \quad (3.3)$$

e, di solito, si ha  $U_f - U_i \cong U_{gf} - U_{gi}$  poiché, nei sistemi chiusi, le variazioni d'energia cinetica e potenziale sono quasi sempre trascurabili. Nelle ipotesi di uniformità dell'energia interna e di validità della (3.3), dividendo i due membri della (3.1) per la massa del sistema  $m$ , si ottiene

$$u_f - u_i = Q_{if} - L_{if} \quad (3.4)$$

Nella (3.4)  $u$ ,  $Q$  ed  $L$  indicano grandezze specifiche e si misurano quindi in joule o chilojoule per chilogrammo, cioè [J/kg] o [kJ/kg]. Si noti che l'energia interna, sia globale sia specifica, è una grandezza di stato, dal momento che la differenza tra l'energia interna finale e quella iniziale dipende solo dagli stati  $f$  ed  $i$  del sistema, e non dalla trasformazione seguita. Infine, per ricordare i segni nella (3.4) basta pensare che, ad esempio, la fornitura di calore al sistema (positiva) ed il lavoro fatto sul sistema (negativo), inducono aumenti d'energia interna.

Qualche volta è utile disporre anche dell'espressione differenziale del primo principio per i sistemi chiusi. A questo proposito, si può fare riferimento ad una trasformazione infinitesima nella quale gli stati iniziale e finale siano infinitamente vicini, in modo che l'Eq. (3.4) possa venire espressa nella forma

$$du = dQ - dL \quad (3.5)$$

La scrittura (3.5) non deve ingannare sulla natura del calore e del lavoro. Infatti,  $Q$  ed  $L$  non sono grandezze di stato e di conseguenza,  $dQ$  e  $dL$  non

sono dei differenziali, ma rappresentano quantità infinitesime definibili, ad esempio, come

$$dQ = \frac{1}{m} d\hat{Q} = \frac{1}{m} q d\vartheta \quad (3.6)$$

$$dL = \frac{1}{m} d\hat{L} = \frac{1}{m} P d\vartheta \quad (3.7)$$

dove  $\vartheta$  è la coordinata temporale, mentre  $q = d\hat{Q} / d\vartheta$  e  $P = d\hat{L} / d\vartheta$  sono, rispettivamente, il flusso termico e la potenza scambiati dal sistema con l'esterno all'istante  $\vartheta$ .

A conclusione di questo paragrafo è importante notare che le Eq. (3.1), (3.4) e (3.5) hanno validità molto generale, in quanto sono applicabili a qualunque tipo di trasformazione: basta, infatti, che lo stato iniziale e lo stato finale, e non necessariamente anche gli stati intermedi, siano stati d'equilibrio.

### 3.3 PRIMO PRINCIPIO PER I SISTEMI APERTI

Con riferimento alla Fig. 3.2 (a), si consideri il sistema chiuso in movimento che, all'istante iniziale  $\vartheta$ , comprende la massa  $m_i = m(\vartheta)$ , contenuta nel volume di controllo, e le masse  $\Delta m_e$  in procinto di entrare nel volume stesso. Alla massa  $m_i$  è associata l'energia globale  $U_{gi} = U_g(\vartheta)$ , mentre alle masse  $\Delta m_e$  sono associate le energie globali specifiche uniformi  $(u_e + w_e^2/2 + g z_e)$ . Come evidenziato nella Fig. 3.2 (b), all'istante finale  $\vartheta + \Delta\vartheta$  il sistema comprende la massa  $m_f = m(\vartheta + \Delta\vartheta)$ , contenuta nel volume di controllo, e le masse  $\Delta m_u$  appena uscite. Alla massa  $m_f$  è associata l'energia globale  $U_{gf} = U_g(\vartheta + \Delta\vartheta)$ , mentre alle masse  $\Delta m_u$  sono associate le energie globali specifiche uniformi  $(u_u + w_u^2/2 + g z_u)$ . Con riferimento all'Eq. (3.1), nel passaggio del sistema chiuso in movimento dallo stato iniziale  $i$  allo stato finale  $f$  si ha

$$\left[ U_{gf} + \sum \Delta m_u \left( u_u + \frac{w_u^2}{2} + gz_u \right) \right] - \left[ U_{gi} + \sum \Delta m_e \left( u_e + \frac{w_e^2}{2} + gz_e \right) \right] = \hat{Q}_{if} - \hat{L}_{if} \quad (3.8)$$

dove l'energia globale posseduta dal volume di controllo è definita ancora dalla (3.2) mentre, abbandonata l'ipotesi di uniformità all'interno del volume di controllo, i contributi all'energia globale sono ora definiti su base locale. Si ha quindi

$$U = \int_V \rho u dV \quad (3.9)$$

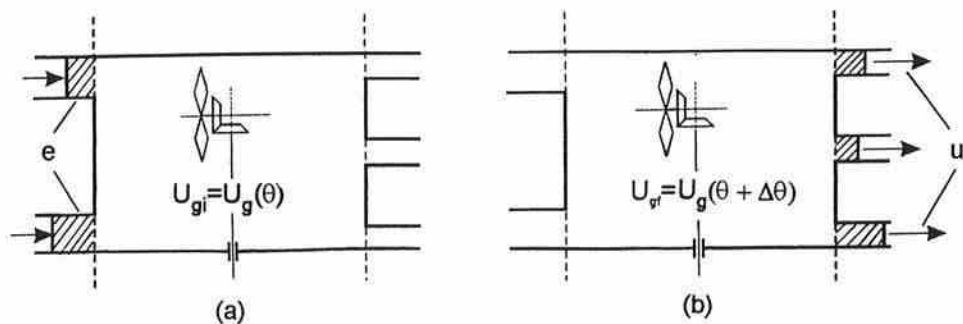
per l'energia interna,

$$E_w = \int_V \rho e_w dV = \int_V \rho \frac{w^2}{2} dV \quad (3.10)$$

per l'energia cinetica ed

$$E_z = \int_V \rho e_z dV = \int_V \rho gz dV \quad (3.11)$$

per l'energia potenziale.



**Figura 3.2** Trasformazione di un sistema aperto: (a) stato iniziale e (b) stato finale.

Ovviamente, in situazioni d'uniformità, dalle (3.9) – (3.11) si riottengono le espressioni valide per i sistemi chiusi:  $U = m u$ ,  $E_w = m e_w = m w^2/2$  ed  $E_z = m e_z = m g z$ . Di solito, le variazioni d'energia globale nel volume di controllo vengono evidenziate al primo membro, scrivendo l'Eq. (3.8) nella forma

$$U_{gf} - U_{gi} = \hat{Q}_{if} - \hat{L}_{if} + \sum \Delta m_e \left( u_e + \frac{w_e^2}{2} + g z_e \right) - \sum \Delta m_u \left( u_u + \frac{w_u^2}{2} + g z_u \right) \quad (3.12)$$

mentre, in base alle considerazioni svolte nel Paragrafo 2.6.1, il lavoro totale scambiato viene espresso come somma algebrica del lavoro tecnico utile e dei lavori di entrata ed uscita

$$\hat{L}_{if} = \hat{L}'_{if} - \sum \Delta m_e p_e v_e + \sum \Delta m_u p_u v_u \quad (3.13)$$

Se si sostituisce la (3.13) nella (3.12), si ottiene

$$U_{gf} - U_{gi} = \hat{Q}_{if} - \hat{L}'_{if} + \sum \Delta m_e p_e v_e - \sum \Delta m_u p_u v_u + \sum \Delta m_e \left( u_e + \frac{w_e^2}{2} + g z_e \right) - \sum \Delta m_u \left( u_u + \frac{w_u^2}{2} + g z_u \right) \quad (3.14)$$

e quindi, definendo una nuova funzione di stato entalpia come somma dell'energia interna e del termine corrispondente al lavoro di deflusso

$$h = u + p v \quad (3.15)$$

si arriva all'espressione

$$U_{gf} - U_{gi} = \hat{Q}_{if} - \hat{L}'_{if} + \sum \Delta m_e \left( h_e + \frac{w_e^2}{2} + g z_e \right) - \sum \Delta m_u \left( h_u + \frac{w_u^2}{2} + g z_u \right) \quad (3.16)$$



L'Eq. (3.16) rappresenta il bilancio dell'energia per un sistema aperto, con più entrate e più uscite, i cui confini coincidano con il volume di controllo. Tale espressione è del tutto generale ed, ovviamente, si riduce alla (3.1), valida per i sistemi chiusi, se non vi sono entrate ed uscite di fluido. Per ricordare i segni nella (3.16) basta pensare che, ad esempio, la fornitura di calore al sistema (positiva), il lavoro tecnico utile fatto sul sistema (negativo) e le entrate d'entalpia, energia cinetica ed energia potenziale inducono aumenti d'energia interna, mentre effetto opposto hanno le uscite di entalpia, energia cinetica ed energia potenziale

Se si dividono i due membri della (3.16) per  $\Delta\vartheta$  e si fa tendere  $\Delta\vartheta$  a zero, si ottiene

$$\frac{dU_g}{d\vartheta} = q - P' + \sum \dot{m}_e \left( h_e + \frac{w_e^2}{2} + gz_e \right) - \sum \dot{m}_u \left( h_u + \frac{w_u^2}{2} + gz_u \right) \quad (3.17)$$

ovvero il bilancio dell'energia, riferito ai flussi, per un sistema aperto con più entrate e più uscite nel quale  $q$  è il flusso termico fornito e  $P'$  è la potenza tecnica utile. Nel caso particolare di regime stazionario, la (3.17) porge

$$q - P' + \sum \dot{m}_e \left( h_e + \frac{w_e^2}{2} + gz_e \right) - \sum \dot{m}_u \left( h_u + \frac{w_u^2}{2} + gz_u \right) = 0 \quad (3.18)$$

mentre, per  $q = P' = 0$  e variazioni d'energia cinetica e potenziale trascurabili, la (3.18) si riduce alla relazione

$$\sum \dot{m}_e h_e = \sum \dot{m}_u h_u \quad (3.19)$$

che costituisce il così detto "bilancio entalpico".

### Esempio 3.1

Si ricavi l'espressione del primo principio valida per sistemi chiusi in regime transitorio.

*Soluzione*

L'Eq. (3.17) è del tutto generale e, se non si hanno entrate ed uscite di fluido, fornisce

$$\frac{dU_g}{d\vartheta} = q - P'$$

ovvero l'espressione del primo principio valida per sistemi chiusi in regime transitorio. Si noti che in tale espressione si ha

$$\frac{dU_g}{d\vartheta} = \frac{dU}{d\vartheta} + \frac{dE_w}{d\vartheta} + \frac{dE_z}{d\vartheta}$$

dove l'energia interna, l'energia cinetica e l'energia potenziale sono definite su base locale, rispettivamente dalle (3.9), (3.10) e (3.11). Pertanto non è più necessaria l'ipotesi d'uniformità per  $u$ ,  $e_w = w^2/2$  ed  $e_z = gz$  anche se, dal punto di vista fisico, è opportuno rilevare che il manifestarsi di grosse disuniformità non è evento probabile nei sistemi chiusi.

### 3.3.1 Primo Principio per Sistemi a Deflusso Monodimensionale Stazionario

Per sistemi monodimensionali in regime stazionario, si ha  $\dot{m} = \dot{m}_e = \dot{m}_u$ , e la (3.18) può essere scritta nella forma

$$q - P' = \dot{m} \left[ \left( h_u + \frac{w_u^2}{2} + gz_u \right) - \left( h_e + \frac{w_e^2}{2} + gz_e \right) \right] \quad (3.20)$$

Analogamente, nel caso particolare di sistemi in regime stazionario con una sola entrata ed una sola uscita, l'Eq. (3.16) può essere scritta nella forma

$$\frac{\hat{Q}_{if}}{\Delta m} - \frac{\hat{L}'_{if}}{\Delta m} = Q_{if} - L'_{if} = \left( h_u + \frac{w_u^2}{2} + gz_u \right) - \left( h_e + \frac{w_e^2}{2} + gz_e \right) \quad (3.21)$$

dove  $Q_{if}$  ed  $L'_{if}$  sono, rispettivamente, il calore ed il lavoro tecnico utile scambiati dall'intero sistema nell'intervallo di tempo necessario a fare entrare, in  $e$ , ed uscire, da  $u$ , una massa unitaria.

Il punto di vista su cui si basa l'Eq. (3.21) è quello Euleriano ma, procedendo come al Paragrafo 2.6.2, può essere adottato anche un punto di vista Lagrangiano. In tal modo, ponendo  $i = e$  ed  $f = u$ , l'Eq. (3.21) viene riferita alla massa unitaria che si sposta dall'entrata all'uscita. Si ottiene così

$$Q_{eu} - L'_{eu} = \left( h_u + \frac{w_u^2}{2} + gz_u \right) - \left( h_e + \frac{w_e^2}{2} + gz_e \right) \quad (3.22)$$

mentre, dal confronto tra la (3.22) e la (3.20), si ritrova l'espressione (2.30) relativa alla potenza meccanica utile scambiata

$$P' = \dot{m} L'_{eu} \quad (3.23)$$

e si può ricavare l'espressione del flusso termico scambiato

$$q = \dot{m} Q_{eu} \quad (3.24)$$

Se, in un sistema aperto, l'entrata e l'uscita sono infinitamente vicine, l'Eq. (3.22) può essere scritta nella forma

$$dQ - dL' = dh + \frac{dw^2}{2} + g dz \quad (3.25)$$

mentre, se si possono trascurare le variazioni di energia cinetica e potenziale, l'Eq. (3.25) fornisce

$$dh = dQ - dL' \quad (3.26)$$

dove le analogie con la espressione (3.4) sono evidenti. Anche le Eq. (3.25) e (3.26), come la (3.4), hanno validità molto generale in quanto sono appli-

cabili a qualunque tipo di trasformazione: basta, infatti, che lo stato iniziale, corrispondente all'entrata, e lo stato finale, corrispondente all'uscita, ma non necessariamente gli stati intermedi, siano stati di equilibrio.

### 3.4 ESEMPI DI APPLICAZIONE

Alcuni esempi di applicazione, riferiti a situazioni di grande interesse pratico, illustrano la metodologia seguita nelle analisi di primo principio riferite ad apparecchiature e componenti tecnologici. Naturalmente, per passare dalle analisi termodinamiche ai risultati numerici è necessario disporre dei valori delle entalpie o delle energie interne che, negli esempi di questa sezione, sono assunti noti. Nella pratica, invece, tali valori sono ricavati da diagrammi, tabelle, programmi di calcolo od anche, talvolta, da semplici espressioni analitiche.

#### 3.4.1 Compressori e Turbine

I compressori e le turbine sono apparecchiature a funzionamento stazionario che, molte volte, possono essere schematizzate come sistemi aperti con una sola entrata ed una sola uscita. In queste ipotesi, nell'analisi del funzionamento si parte dalle equazioni di bilancio (3.20) e (3.22) trascurando, di solito, gli scambi termici con l'ambiente esterno e le variazioni d'energia cinetica e potenziale. Con riferimento allo schema d'appoggio illustrato nella Fig. 3.3, le relazioni (3.22) e (3.20) possono allora essere scritte nelle forme

$$L'_{eu} = h_e - h_u \quad (3.27)$$

e

$$P' = \dot{m} L'_{eu} = \dot{m}(h_e - h_u) \quad (3.28)$$

dove il lavoro specifico tecnico utile e la potenza tecnica utile sono negativi per i compressori e positivi per le turbine.

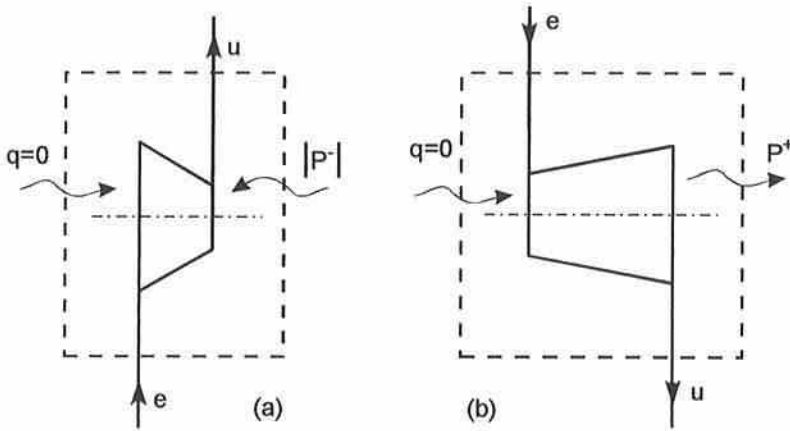


Figura 3.3 Schema di appoggio per l'analisi di: (a) compressori e (b) turbine.

### Esempio 3.2

Si determini la potenza tecnica utile fornita da una turbina a gas nella quale si abbia  $h_e = 1000$  kJ/kg,  $h_u = 600$  kJ/kg ed  $\dot{m} = 5$  kg/s.

#### Soluzione

Dall'Eq. (3.28) si ha, immediatamente

$$P' = \dot{m}(h_e - h_u) = 5 \cdot (1000 - 600) = 2000 \text{ kW}$$

Naturalmente, le entalpie del gas all'entrata ed all'uscita non sono, generalmente, note a priori ma, come si vedrà meglio nel seguito, devono essere determinate in funzione, ad esempio, di parametri più direttamente misurabili come temperatura e pressione.

### 3.4.2 Scambiatori di Calore

Gli scambiatori di calore sono apparecchiature a funzionamento stazionario che, di solito, sono bene isolate e quindi sono pressoché adiabatiche verso l'esterno. Inoltre, a differenza delle turbine e dei compressori, gli scambiatori di calore sono privi d'organi capaci di scambiare lavoro tecnico utile.

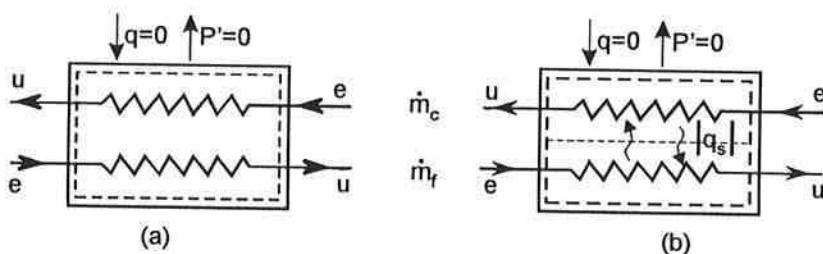
Pertanto, con riferimento allo schema di Fig. 3.4, la relazione (3.17) può essere scritta nella forma

$$\dot{m}_c(h_{ce} - h_{cu}) + \dot{m}_f(h_{fe} - h_{fu}) = 0 \quad (3.29)$$

dove compaiono solo le variazioni di entalpia in quanto, generalmente, risultano trascurabili anche le variazioni d'energia cinetica e potenziale. Nelle ipotesi di validità della (3.29), il bilancio termico interno può essere scritto nella forma

$$|q_s| = \dot{m}_c(h_{ce} - h_{cu}) = \dot{m}_f(h_{fu} - h_{fe}) \quad (3.30)$$

dove  $|q_s|$  rappresenta il flusso termico scambiato tra le due correnti.



**Figura 3.4** Schema d'appoggio per l'analisi di uno scambiatore di calore: (a) riferita all'intero sistema e (b) riferita al flusso termico scambiato all'interno.

### Esempio 3.3

Si determinino il flusso termico scambiato e l'entalpia del fluido freddo all'uscita di uno scambiatore acqua-acqua nel quale si abbia:  $h_{ce} = 335$  kJ/kg,  $h_{cu} = 251$  kJ/kg,  $\dot{m}_c = 2$  kg/s,  $h_{fe} = 42$  kJ/kg ed  $\dot{m}_f = 1$  kg/s.

#### Soluzione

Dall'Eq. (3.30) si ha

$$|q_s| = \dot{m}_c(h_{ce} - h_{cu}) = 2 \cdot (335 - 251) = 168 \text{ kW}$$

e quindi risulta anche

$$h_{fu} = h_{fe} + \frac{|q_s|}{\dot{m}_f} = 42 + \frac{168}{1} = 210 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Al Paragrafo 3.6, si vedrà come le entalpie dell'acqua possano venire espresse in funzione della temperatura.

### 3.4.3 Valvole di Laminazione

Le valvole di laminazione sono apparecchiature a funzionamento stazionario con una sola entrata ed una sola uscita, prive d'organi capaci di scambiare lavoro tecnico utile. Di solito, il fluido operativo attraversa le valvole in tempi molto brevi e quindi il flusso termico scambiato con l'esterno è trascurabile. Se poi, come accade quasi sempre, sono trascurabili anche le variazioni d'energia cinetica e potenziale, l'equazione di bilancio (3.20) può essere scritta nella forma

$$h_e = h_u \quad (3.31)$$

dove si fa riferimento allo schema di Fig. 3.5. Nel deflusso di un fluido attraverso una valvola di laminazione, l'entalpia entrante è quindi uguale all'entalpia uscente.

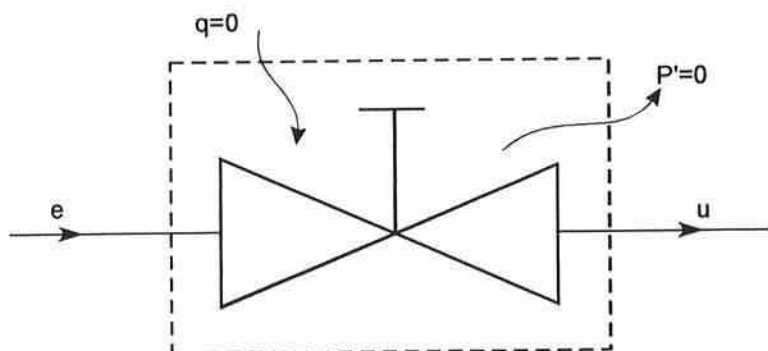


Figura 3.5 Schema d'appoggio per l'analisi di una valvola di laminazione.

### 3.4.4 Sistemi di Riempimento

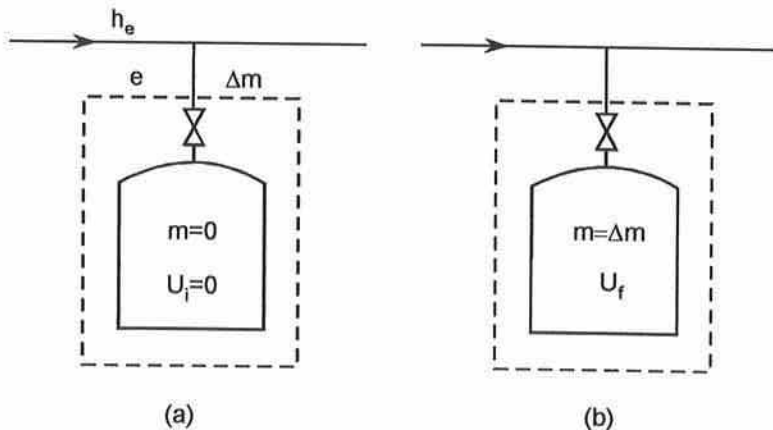
Un problema tipico delle analisi di un sistema aperto in regime transitorio è il riempimento di bombole di gas, a partire da una linea di distribuzione nella quale le condizioni termodinamiche restano pressoché costanti. Con riferimento allo schema di Fig. 3.6 si può constatare che è uguale a zero il lavoro tecnico utile a causa dell'assenza di parti mobili. Inoltre i processi di riempimento sono, quasi sempre, adiabatici e sono caratterizzati da variazioni trascurabili d'energia cinetica e potenziale. In queste ipotesi, la relazione (3.16) può essere scritta nella forma

$$U_{gf} \equiv \Delta m u_f = \Delta m h_e \quad (3.32)$$

da cui si ottiene immediatamente

$$u_f = h_e \quad (3.33)$$

La relazione (3.33) esprime l'uguaglianza tra l'energia interna del gas dopo il riempimento e l'entalpia del gas stesso nelle condizioni di fornitura.



**Figura 3.6** Sistema aperto per l'analisi del riempimento di una bombola: (a) fase iniziale e (b) fase finale.



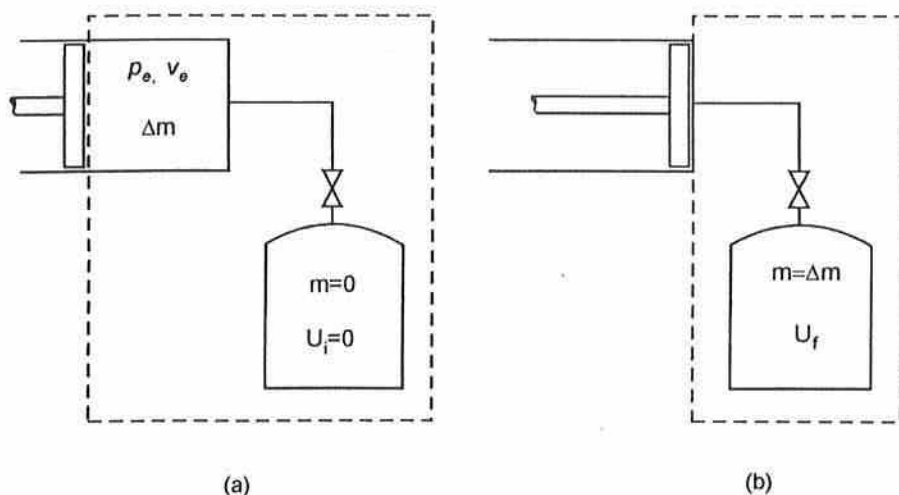
In alternativa, con riferimento allo schema di Fig. 3.7 (a), può essere preso in esame un sistema chiuso ideale che, all'inizio, comprenda la massa di gas entrante e la bombola vuota. Come evidenziato in Fig. 3.7 (b), tale sistema scambia lavoro con l'esterno in corrispondenza al pistone mobile, fino a che tutto il gas è entrato nella bombola. In questo caso vale il bilancio (3.1) con  $\hat{Q}_{if} = 0$ , e quindi risulta

$$U_{gf} - U_{gi} = \Delta m(u_f - u_e) = -\hat{L}_{if} = -\int_{V_e}^0 p_e dV = p_e V_e = p_e v_e \Delta m \quad (3.34)$$

Dal secondo e sesto membro della (3.34) si ricava allora

$$u_f = u_e + p_e v_e = h_e \quad (3.35)$$

ovvero l'uguaglianza (3.33).



**Figura 3.7** Sistema chiuso per l'analisi del riempimento di una bombola: (a) fase iniziale e (b) fase finale.

### 3.5 PRIMO PRINCIPIO PER TRASFORMAZIONI CICLICHE

Se un sistema chiuso, od un sistema aperto a deflusso monodimensionale stazionario, evolvono secondo una trasformazione ciclica, si ha  $i = e = f = u$ . In questo caso, le variazioni d'energia all'interno del sistema sono uguali a zero, mentre gli eventuali lavori d'entrata e d'uscita dal sistema si annullano reciprocamente. Di conseguenza, per le trasformazioni cicliche, il primo principio della termodinamica può sempre essere scritto nella forma

$$\oint dQ = Q_n = \oint dL = L_n \quad (3.36)$$

dove si fa riferimento al calore ed al lavoro scambiati per ogni unità di massa di fluido che compie il ciclo e dove, evidentemente, lavoro tecnico utile e lavoro totale scambiato coincidono. Nell'Eq. (3.36) si è utilizzato il pedice  $n$  (netto) per sottolineare che, in generale, i cicli scambiano con l'esterno calore e lavoro sia positivi sia negativi. Distinguendo, quindi, tra le energie in transito sulla base dei segni, la (3.36) può essere scritta nella forma

$$Q_n = Q^+ + Q^- = L^+ + L^- = L_n \quad (3.37)$$

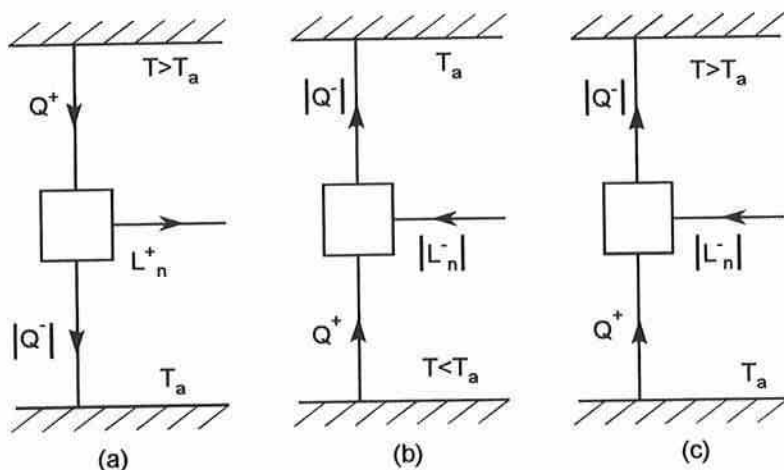
che meglio consente di evidenziare le differenze tra i cicli diretti, utilizzati per la produzione di lavoro tecnico utile a spese di una fornitura di calore, ed i cicli inversi, utilizzati per la produzione di un effetto termico a spese di una fornitura di lavoro tecnico utile. Con riferimento all'Eq. (3.36) ed agli schemi d'appoggio rappresentati in Fig. 3.8, si ottiene

$$Q^+ - |Q^-| = L_n^+ \quad (3.38)$$

per i cicli diretti, e

$$|Q^-| - Q^+ = |L_n^-| \quad (3.39)$$

per i cicli inversi. In genere, i cicli diretti ed i cicli inversi a pompa di calore si svolgono a temperature superiori a quella dell'ambiente esterno, mentre i cicli inversi frigoriferi si svolgono a temperature inferiori a quella dell'ambiente esterno. Pertanto negli schemi relativi a cicli bitermici (cioè a cicli che si svolgono tra due temperature) si pone:  $T > T_a$  per i cicli diretti e per i cicli inversi a pompa di calore, e  $T < T_a$  per i cicli inversi frigoriferi.



**Figura 3.8** Rappresentazione schematica di: (a) un ciclo diretto con  $T > T_a$ , (b) un ciclo inverso frigorifero con  $T < T_a$  e (c) un ciclo inverso a pompa di calore con  $T > T_a$ .

Nei cicli diretti si definisce il rendimento di conversione

$$\eta = \frac{L_n^+}{Q^+} = \frac{Q^+ - |Q^-|}{Q^+} = 1 - \frac{|Q^-|}{Q^+} = 1 + \frac{Q^-}{Q^+} \leq 1 \quad (3.40)$$

come rapporto tra lavoro netto ottenuto e calore fornito a temperatura  $T > T_a$ . Tale rendimento è positivo, perché il lavoro netto ottenuto ed il calore fornito sono positivi, ed è anche minore od uguale ad 1, perché il calore restituito all'ambiente  $Q^-$  può, al più, annullarsi. In realtà il secondo principio della termodinamica, illustrato nel Capitolo 4, stabilirà che deve essere  $|Q^-|$

$> 0$  perché non è possibile convertire integralmente in lavoro il calore fornito ad un ciclo. Pertanto, in base al secondo principio, il rendimento di tutti i cicli diretti è sempre minore dell'unità.

Nei cicli inversi considerati in questo paragrafo si ha fornitura di lavoro, e quindi il lavoro netto è negativo. A fronte di una spesa di lavoro, i frigoriferi prelevano il calore  $Q^+$  da un sistema ad una temperatura  $T < T_a$ , mentre le pompe di calore cedono il calore  $Q^-$  ad un sistema a temperatura  $T > T_a$ . Con riferimento al primo principio della termodinamica, possono quindi essere definiti due coefficienti d'effetto utile distinti, rispettivamente per i cicli inversi frigoriferi

$$\varepsilon = \frac{Q^+}{|L_n^-|} = \frac{Q^+}{|Q^-| - Q^+} \geq 0 \quad (3.41)$$

ed i cicli inversi a pompa di calore

$$\varepsilon' = \frac{|Q^-|}{|L_n^-|} = \frac{|L_n^-| + Q^+}{|L_n^-|} = 1 + \frac{Q^+}{|L_n^-|} = 1 + \varepsilon \geq 1 \quad (3.42)$$

Si noti come, dalla definizione (3.42), si evinca che il coefficiente di effetto utile del ciclo a pompa di calore supera sempre di un'unità il coefficiente di effetto utile del ciclo frigorifero corrispondente. Invece, sulla base delle definizioni poste, nulla può essere ancora detto sui limiti superiori dei coefficienti di effetto utile. Nel Capitolo 4, tuttavia, si vedrà come anche i coefficienti di effetto utile debbano soddisfare alle restrizioni imposte dal secondo principio della termodinamica. Nel Capitolo 13, infine, si vedrà come siano tecnicamente realizzabili dei cicli inversi nei quali l'effetto termico è ottenuto a spese di una fornitura di calore. In tal caso, tuttavia, le definizioni (3.41) e (3.42) devono essere opportunamente modificate.

### Esempio 3.4

Il ciclo termodinamico di una centrale termonucleare presenta un rendi-

mento di conversione pari a 0,32. Si calcoli quanto calore deve essere fornito al ciclo stesso per ogni unità di lavoro netto ottenuto.

*Soluzione*

Con riferimento all'Eq. (3.40) si ha

$$\frac{Q^+}{L_n^+} = \frac{1}{\eta} = \frac{1}{0,32} = 3,125$$

Si noti che, in base alle Eq. (3.38) e (3.40), risulta anche

$$\frac{|Q^-|}{L_n^+} = \frac{Q^+ - L_n^+}{L_n^+} = \frac{Q^+}{L_n^+} - 1 = 3,125 - 1 = 2,125$$

Pertanto si può concludere che, per ottenere 1 kJ di lavoro netto, vanno forniti al ciclo 3,125 kJ di calore, dei quali 2,125 sono poi scaricati nell'ambiente.

**Esempio 3.5**

Il ciclo termodinamico di un impianto frigorifero presenta un coefficiente d'effetto utile pari a 2,5. Si calcoli quanto calore è prelevato a bassa temperatura per ogni unità di lavoro netto fornito.

*Soluzione*

Con riferimento all'Eq. (3.41) si ha

$$\frac{Q^+}{|L_n^-|} = \varepsilon = 2,5$$

Si noti che, in base alle Eq. (3.39) e (3.41), risulta anche

$$\frac{|Q^-|}{|L_n^-|} = \frac{Q^+ + |L_n^-|}{|L_n^-|} = \frac{Q^+}{|L_n^-|} + 1 = 2,5 + 1 = 3,5$$

Pertanto si può concludere che, per prelevare 2,5 kJ di calore a temperatura inferiore a quella ambiente, occorre fornire al ciclo 1 kJ di lavoro e scaricare nell'ambiente 3,5 kJ di calore.

### Esempio 3.6

Il ciclo termodinamico di una pompa di calore presenta un coefficiente d'effetto utile pari a 3. Si calcoli quanto calore è ottenuto per ogni unità di lavoro netto fornito.

#### *Soluzione*

Con riferimento all'Eq. (3.42) si ha

$$\frac{|Q^-|}{|L_n^-|} = \varepsilon' = 3$$

Si noti che, in base alle Eq. (3.39) e (3.42), risulta anche

$$\frac{Q^+}{|L_n^-|} = \frac{|Q^-| - |L_n^-|}{|L_n^-|} = \frac{|Q^-|}{|L_n^-|} - 1 = 3 - 1 = 2$$

Pertanto si può concludere che, per ottenere 3 kJ di calore a temperatura superiore a quella ambiente, occorre fornire al ciclo 1 kJ di lavoro e prelevare dall'ambiente 2 kJ di calore gratuito.

## 3.6 CALORI SPECIFICI

In una trasformazione quasi statica generica, il calore specifico può essere

definito come rapporto tra la quantità di calore scambiata e la variazione di temperatura

$$c = \frac{dQ}{dT} \quad (3.43)$$

Ovviamente, tale definizione conduce a stime dei calori specifici variabili da un valore infinito, nelle trasformazioni isoterme, ad un valore uguale a zero, nelle trasformazioni adiabatiche. Il calore specifico (3.43) è quindi una caratteristica del processo considerato ma, con la denominazione di calori specifici, si denotano anche proprietà delle sostanze per la cui determinazione è opportuno fare riferimento a particolari trasformazioni quasi statiche.

In una trasformazione quasi statica generica, nell'ipotesi di validità dell'espressione differenziale (3.5) del primo principio, si ha

$$dQ = du + p dv \quad (3.44)$$

dove  $u$  è una funzione di stato che, per una sostanza omogenea, può venire espressa in funzione di due sole variabili (in base alla già ricordata "regola delle fasi"). Ponendo, ad esempio,  $u = u(T, v)$  ne deriva che il differenziale dell'energia interna può essere scritto nella forma

$$du = \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT + \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_T dv \quad (3.45)$$

Pertanto, combinando la (3.44) con la (3.45), si ha

$$dQ = \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT + \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_T + p \right] dv \quad (3.46)$$

Nel caso particolare di una trasformazione quasi statica a volume specifico

costante, risulta quindi

$$dQ = \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT \quad (3.47)$$

ovvero

$$c = \frac{dQ}{dT} = \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v = c_v(T, v) \quad (3.48)$$

dove  $c_v$  viene chiamato calore specifico a volume costante e, come vedremo, è un'importante proprietà termofisica delle sostanze.

In una trasformazione quasi statica, dalla (3.44) e dalla definizione d'entalpia, si ottiene anche

$$dQ = du + p dv = (dh - p dv - v dp) + p dv = dh - v dp \quad (3.49)$$

dove  $h$  è una funzione di stato che, per una sostanza omogenea, può venire espressa in funzione di due sole variabili (in base alla già ricordata "regola delle fasi"). Ponendo, ad esempio,  $h = h(T, p)$  ne deriva che il differenziale dell'entalpia può essere scritto nella forma

$$dh = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p dT + \left( \frac{\partial h}{\partial p} \right)_T dp \quad (3.50)$$

Pertanto, combinando la (3.49) con la (3.50), si ha

$$dQ = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p dT + \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial p} \right)_T - v \right] dp \quad (3.51)$$

Nel caso particolare di una trasformazione quasi statica a pressione costante, risulta quindi

$$dQ = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p dT \quad (3.52)$$



ovvero

$$c = \frac{dQ}{dT} = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p = c_p(T, p) \quad (3.53)$$

dove  $c_p$  è chiamato calore specifico a pressione costante e, come vedremo, è un'importante proprietà termofisica delle sostanze.

### 3.6.1 Calori Specifici delle Sostanze Incomprimibili

Un caso interessante è rappresentato dai calori specifici di sostanze che, come i liquidi ed i solidi, sono praticamente incomprimibili e quindi si trasformano mantenendo  $dv = 0$ . Per queste sostanze, la relazione (3.45) implica che l'energia interna sia funzione della sola temperatura. Di conseguenza, l'entalpia può essere scritta nella forma

$$h(T, p) = u(T) + pv \quad (3.54)$$

ed il calore specifico a pressione costante, pari alla derivata parziale dell'entalpia rispetto alla temperatura valutata a pressione costante, può venire espresso come

$$c_p = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p = \frac{du}{dT} + \frac{d}{dT}(pv) = \frac{du}{dT} + p \frac{dv}{dT} + v \frac{dp}{dT} = \frac{du}{dT} = c_v \quad (3.55)$$

in quanto il volume specifico non varia, mentre la pressione è costante per ipotesi. Pertanto, nelle sostanze incomprimibili si ha

$$c_p = c_v = c \quad (3.56)$$

e ciò consente di evitare distinzioni tra i calori specifici e di valutare direttamente le variazioni di energia interna e di entalpia. Infatti, integrando la (3.45) tra la temperatura di riferimento  $T_0$  e la temperatura generica  $T$ , si

ottiene

$$u - u_0 = \int_{T_0}^T c(T) dT \quad (3.57)$$

dove si è assunto  $u = u_0$  per  $T = T_0$ . Tenendo conto della costanza del volume, dalla (3.54) intesa come funzione di più variabili, si ha invece

$$h - h_0 = (u + pv) - (u_0 + p_0 v_0) = u - u_0 + v(p - p_0) \quad (3.58)$$

essendo  $v = v_0$ . Pertanto, sostituendo la (3.58) nella (3.57) si ottiene

$$h - h_0 = \int_{T_0}^T c(T) dT + v(p - p_0) \quad (3.59)$$

dove  $p_0$  è la pressione dello stato di riferimento nel quale si è assunto  $h = h_0$ . Se poi il calore specifico non dipende dalla temperatura, l'espressione (3.57), e di conseguenza anche la (3.59), si semplificano ulteriormente, in quanto è possibile portare il calore specifico fuori dai segni di integrale ottenendo

$$u - u_0 = c(T - T_0) \quad (3.60)$$

e

$$h - h_0 = c(T - T_0) + v(p - p_0) \quad (3.61)$$

Infine si vuol far notare che, nelle definizioni date, si è fatto riferimento, implicitamente, all'unità di massa, misurando  $c_v$  e  $c_p$  in joule o chilojoule per chilogrammo e per kelvin, cioè  $[J/(kg \text{ K})]$  o  $[kJ/(kg \text{ K})]$ . Se si fa riferimento alla quantità di materia unitaria, si ottiene

$$\bar{c}_v = M c_v \quad (3.62)$$

e

$$\bar{c}_p = M c_p \quad (3.63)$$

dove  $M$  è la massa molare e  $\bar{c}_v$  e  $\bar{c}_p$  sono misurati in joule, o kilojoule, per chilomole e per kelvin, cioè  $[\text{J}/(\text{kmol K})]$  o  $[\text{kJ}/(\text{kmol K})]$ . Analogamente, l'energia interna molare e l'entalpia molare di una sostanza omogenea possono venire espresse come

$$\bar{u} = M u \quad (3.64)$$

ed

$$\bar{h} = M h \quad (3.65)$$

dove  $\bar{u}$  ed  $\bar{h}$  sono misurate in joule, o kilojoule, per chilomole, cioè  $[\text{J}/\text{kmol}]$  o  $[\text{kJ}/\text{kmol}]$ .

### Esempio 3.7

Si determini l'entalpia dell'acqua, alla temperatura di  $80^\circ\text{C}$ , ma a due diverse pressioni pari, rispettivamente, a  $611\text{ Pa}$  ed  $1\text{ MPa}$ , assumendo  $h_0 = 0$  per  $T_0 = 273,16\text{ K}$  e  $p_0 = 611\text{ Pa}$ . Nel calcolo si consideri l'acqua incomprimibile e si faccia riferimento ai valori costanti delle proprietà:  $c = 4,187\text{ kJ}/(\text{kg K})$  e  $v = 0,001\text{ m}^3/\text{kg}$ .

#### Soluzione

Nelle ipotesi poste, dall'Eq. (3.61) si ha

$$h = c(T - T_0) + v(p - p_0) \cong ct + v(p - p_0)$$

Pertanto, con  $t = 80^\circ\text{C}$  e  $p = p_0$ , si ottiene

$$h = ct = 4,187 \cdot 80 = 334,96\text{ kJ/kg}$$

mentre, per  $t = 80^\circ\text{C}$  e  $p = 1\text{ MPa}$ , si ottiene

$$h = ct + v(p - p_0) = 4,187 \cdot 80 + 0,001 \cdot (1000 - 0,611) = 336,0\text{ kJ/kg}$$

Come si vede, già a temperature relativamente basse, l'errore che si com-

mette trascurando l'influenza della pressione sull'entalpia è dell'ordine dello 0,3%, e quindi del tutto accettabile nei calcoli tecnici. Poiché dal confronto tra la (3.59) e la (3.57) si ha

$$(h - h_0) - (u - u_0) = v(p - p_0)$$

è legittimo concludere che, nei fluidi incomprimibili, le variazioni d'entalpia e d'energia interna sono praticamente coincidenti.

### Esempio 3.8

Si esprima l'aumento di temperatura che si verifica in un fluido incomprimibile a seguito di una compressione adiabatica senza attriti.

#### Soluzione

In assenza d'attriti, dall'Eq. (2.24) si ha

$$L'_{eu} = -v(p_u - p_e) - \frac{w_u^2 - w_e^2}{2} - g(z_u - z_e)$$

mentre, per una compressione adiabatica, dall'Eq. (3.22) si ricava

$$L'_{eu} = (h_e - h_u) - \frac{w_u^2 - w_e^2}{2} - g(z_u - z_e)$$

Nella fattispecie si ha quindi

$$h_e - h_u = v(p_e - p_u)$$

D'altra parte, in base alle definizioni d'entalpia e d'energia interna per un fluido incomprimibile, si ha anche

$$h_e - h_u = (u_e - u_u) + (p_e v_e - p_u v_u) \cong c(T_e - T_u) + v(p_e - p_u)$$

Poiché le due espressioni della differenza d'entalpia devono valere contem-

poraneamente, si deve concludere che risulta

$$T_e \cong T_u$$

Pertanto, nei fluidi incomprimibili, non si hanno variazioni significative di temperatura a seguito di una compressione adiabatica, senza attriti.

### Esempio 3.9

Si determini l'aumento di temperatura, dovuto agli attriti, che si verifica nel fluido incomprimibile (acqua), nella situazione di cui all'Esempio 2.6, assumendo  $c = 4,187 \text{ kJ/kg K}$ .

#### Soluzione

Per un fluido incomprimibile, l'Eq. (2.24) può essere scritta nella forma

$$L'_{eu} = -v(p_u - p_e) - \frac{w_u^2 - w_e^2}{2} - g(z_u - z_e) - |R_{eu}^-|$$

e tale relazione, sostituita nella (3.22), fornisce

$$\begin{aligned} Q_{eu} &= (h_u - h_e) - v(p_u - p_e) - |R_{eu}^-| = (u_u - u_e) + v(p_u - p_e) \\ &\quad - v(p_u - p_e) - |R_{eu}^-| = c(T_u - T_e) - |R_{eu}^-| \end{aligned}$$

ovvero

$$T_u - T_e = \frac{1}{c} (Q_{eu} + |R_{eu}^-|)$$

Nell'Esempio 2.7 si aveva  $|R_{eu}^-| = 30 \text{ J/kg}$  e quindi l'aumento di temperatura dovuto ai soli attriti (escluso, cioè, un eventuale scambio termico con l'esterno  $Q_{eu}$ ) era pari a

$$T_u - T_e = \frac{|R_{eu}^-|}{c} = \frac{30}{4187} = 0,007 \text{ K}$$

Come si vede, gli aumenti di temperatura dovuti agli attriti viscosi sono generalmente modesti e, per questo motivo, non sono facilmente rilevati dalle misure sperimentali.

### **3.7 CONCLUSIONI**

In questo capitolo si è formulato il primo principio della termodinamica per i sistemi chiusi ed i sistemi aperti. Si sono poi illustrate diverse analisi di primo principio relative al comportamento di apparecchiature, componenti e cicli tecnologici. Infine, si sono definiti rigorosamente i calori specifici delle trasformazioni e delle sostanze, con particolare riguardo alle definizioni dei calori specifici a volume costante ed a pressione costante per le sostanze omogenee. Quale prima applicazione delle definizioni poste, si sono ricavate le espressioni dell'energia interna e dell'entalpia per i fluidi incomprimibili.

---

# CAPITOLO 4

## SECONDO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

---

### 4.1 GENERALITÀ

Nel capitolo precedente si sono illustrati i bilanci energetici per sistemi chiusi e aperti e si è espresso il primo principio della termodinamica come principio di conservazione dell'energia. Il fatto che l'energia totale si conservi, passando da una forma all'altra, non significa, però, che tutte le forme d'energia siano equivalenti. L'equivalenza stabilita dal primo principio è, infatti, quantitativa e non implica necessariamente un'equivalenza qualitativa. Per distinguere tra le diverse forme d'energia in base alla qualità, servono perciò degli strumenti aggiuntivi che sono forniti, appunto, dal secondo principio della termodinamica.

In questo capitolo vengono illustrati, dapprima, il secondo principio della termodinamica ed il teorema di Carnot. Su queste basi, si definiscono la scala termodinamica delle temperature ed il potenziale entropia e si mostra come il primo principio possa essere formulato con riferimento ai soli parametri interni di un sistema. Successivamente, si discutono i bilanci d'entropia e le loro implicazioni per sistemi chiusi ed aperti. Infine, utilizzando la teoria matematica delle forme differenziali, si determinano varie relazioni tra le proprietà termodinamiche, ponendo le basi per la valutazione quantitativa, in ipotesi molto generali, di grandezze come entalpia, energia interna ed entropia.

## 4.2 ENUNCIATI DEL SECONDO PRINCIPIO

Gli enunciati “storici” del secondo principio sono dovuti a Clausius ed a Kelvin-Planck. L’enunciato di Clausius stabilisce che *è impossibile costruire una macchina, operante secondo un processo ciclico, il cui unico effetto sia il trasferimento di calore da un corpo a temperatura più bassa ad un corpo a temperatura più alta*. L’enunciato di Kelvin-Planck afferma invece che *è impossibile costruire una macchina, operante secondo un processo ciclico, il cui unico effetto sia la trasformazione in lavoro di tutto il calore proveniente da una sorgente a temperatura uniforme e costante nel tempo*.

Le parole chiave per la comprensione dei due enunciati sono “unico” e “ciclico”. Infatti, è chiaro che le macchine frigorifere possono trasferire il calore da corpi a temperatura più bassa a corpi a temperatura più alta, ma non come “unico” effetto poiché per funzionare richiedono, ad esempio, lavoro sotto forma d’energia elettrica. Analogamente, nelle trasformazioni ad energia interna costante dei sistemi chiusi, vi è uguaglianza tra lavoro e calore scambiati, ma non è possibile realizzare un “ciclo” di sole trasformazioni ad energia interna costante.

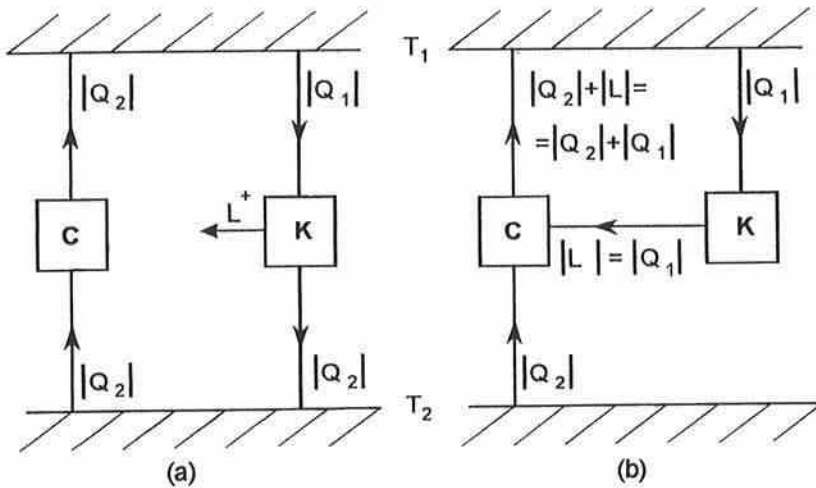
E’ importante osservare che i due enunciati del secondo principio sono tra loro equivalenti, come si può facilmente dimostrare procedendo “per assurdo”. A tale proposito, si supponga di avere a disposizione due sorgenti/pozzi di calore a temperature  $T_1$  e  $T_2$  uniformi e costanti nel tempo, con  $T_1 > T_2$ .

Se non valesse l’enunciato di Clausius, con riferimento allo schema di Fig. 4.1 (a) sarebbe lecito supporre che una quantità di calore  $Q_2$  potesse andare spontaneamente da  $T_2$  a  $T_1$ . In questo modo, senza violare il primo principio, sarebbe lecito anche produrre la quantità di lavoro  $L^+ = |Q_1| - |Q_2|$  in un ciclo diretto che scaricasse alla temperatura  $T_2$  la quantità di calore  $|Q_2|$ . Pertanto, nell’universo, tutto accadrebbe come se la quantità di calore  $|Q_1| - |Q_2|$  si trasformasse integralmente in lavoro, con ciò contraddicendo



l'enunciato di Kelvin-Planck.

Al contrario, se non valesse l'enunciato di Kelvin-Planck, con riferimento allo schema di Fig. 4.1 (b) sarebbe lecito supporre di poter trasformare integralmente in lavoro la quantità di calore  $Q_1^+$ . In questo modo, senza violare il primo principio, sarebbe possibile azionare una macchina frigorifera che trasferisse una quantità di calore  $|Q_2|$ , addizionata del lavoro  $L^+ = Q_1^+$ , da  $T_2$  a  $T_1$ . Pertanto, nell'universo, tutto accadrebbe come se la quantità di calore  $|Q_2|$  passasse da  $T_2$  a  $T_1$ , con ciò contraddicendo l'enunciato di Clausius.



**Figura 4.1** Equivalenza degli enunciati del secondo principio: (a) la violazione dell'enunciato di Clausius comporta la violazione dell'enunciato di Kelvin-Planck e (b) la violazione dell'enunciato di Kelvin-Planck comporta la violazione dell'enunciato di Clausius.

Da una lettura in termini operativi degli enunciati del secondo principio, è possibile trarre due conclusioni molto importanti. Dall'enunciato di Kelvin-Planck si deduce che calore e lavoro non sono equivalenti poiché il calore non può essere trasformato integralmente in lavoro mentre, in base al primo principio, il lavoro può essere trasformato integralmente in calore. Di conseguenza i cicli diretti (nei quali si fornisce calore per ottenere lavoro)

sono, necessariamente, caratterizzati da un rendimento minore di uno. Dall'enunciato di Clausius si deduce invece l'esistenza di un senso privilegiato dei processi termici, in quanto il calore può andare spontaneamente dai corpi a temperatura più alta a quelli a temperatura più bassa, ma non viceversa. L'enunciato di Kelvin-Planck e l'enunciato di Clausius costituiscono quindi un'introduzione al problema generale della reversibilità delle trasformazioni termodinamiche.

### 4.3 REVERSIBILITÀ ED IRREVERSIBILITÀ

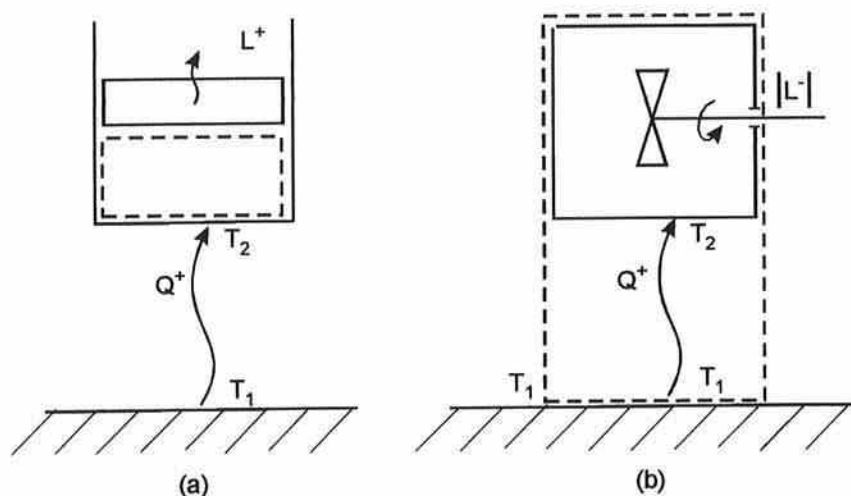
La differenza qualitativa più importante tra i diversi tipi di trasformazioni, o processi, termodinamici è costituita dalla possibilità, o meno, di tornare indietro senza alcuna spesa di lavoro esterno. In base a questo criterio, sono definiti reversibili i processi che si svolgono in modo da consentire il ritorno allo stato iniziale senza lasciare alcuna traccia nell'universo.

I processi reversibili sono necessariamente quasi-statici, in quanto devono poter essere invertiti a seguito di variazioni infinitesime delle condizioni esterne. Inoltre, i processi reversibili sono caratterizzati dall'assenza di attriti poiché, come si è visto nei capitoli precedenti, gli attriti trasformano energia meccanica, di tipo coerente, in energia interna delle molecole, di tipo incoerente. Infine, si può affermare che, nei processi reversibili, gli scambi termici devono avere luogo con differenze infinitesime di temperatura, poiché l'enunciato di Clausius proibisce l'inversione spontanea degli scambi termici in presenza di differenze finite di temperatura. In negativo, si può quindi affermare che sono irreversibili tutti i processi che non sono costituiti da una successione di stati di equilibrio, che non sono privi di attriti o che comportano degli scambi termici con differenze di temperatura non nulle.

Secondo la localizzazione delle irreversibilità, è possibile distinguere tra processi internamente ed esternamente irreversibili. Ovviamente una trasformazione reversibile, oltre ad essere quasi statica, è sia internamente sia

esternamente reversibile. Invece una trasformazione internamente reversibile può essere esternamente irreversibile, e viceversa. Nelle definizioni precedenti vi è però un certo grado di arbitrarietà, in quanto le irreversibilità possono stare all'interno od all'esterno secondo come sono scelti i confini del sistema. Due esempi significativi di questo modo di ragionare sono illustrati in Fig. 4.2.

Nella Fig. 4.2 (a), la trasformazione è internamente reversibile perché eventuali attriti sullo stantuffo sono esterni al sistema, mentre la quantità di calore  $Q^+$  è fornita alla stessa temperatura  $T_2$  dei confini. Tuttavia, la trasformazione è anche esternamente irreversibile perché, fuori dal sistema, il calore passa dalla temperatura  $T_1$  alla temperatura  $T_2 < T_1$ . Nella Fig. 4.2 (b) invece, la trasformazione è esternamente reversibile, se non vi sono attriti sulla tenuta della ventola, perché la quantità di calore  $Q^+$  è fornita alla stessa temperatura  $T_1$  dei confini del sistema. In compenso, la trasformazione è internamente irreversibile perché, dentro il sistema, si dissipa lavoro ed il calore passa dalla temperatura  $T_1$  alla temperatura  $T_2 < T_1$ .



**Figura 4.2** Esempi d'irreversibilità esterne ed interne in processi quasi statici: (a) trasformazione internamente reversibile ed esternamente irreversibile e (b) trasformazione internamente irreversibile ed esternamente reversibile.

Sulla base dell'esperienza è possibile ricavare molti altri esempi di questo tipo. Va tuttavia rilevato che i processi fisici sono sempre caratterizzati da un certo grado d'irreversibilità e, di conseguenza, le trasformazioni reversibili vanno considerate schematizzazioni concettuali utili in quanto consentono di avere un riferimento ideale per la valutazione delle trasformazioni reali.

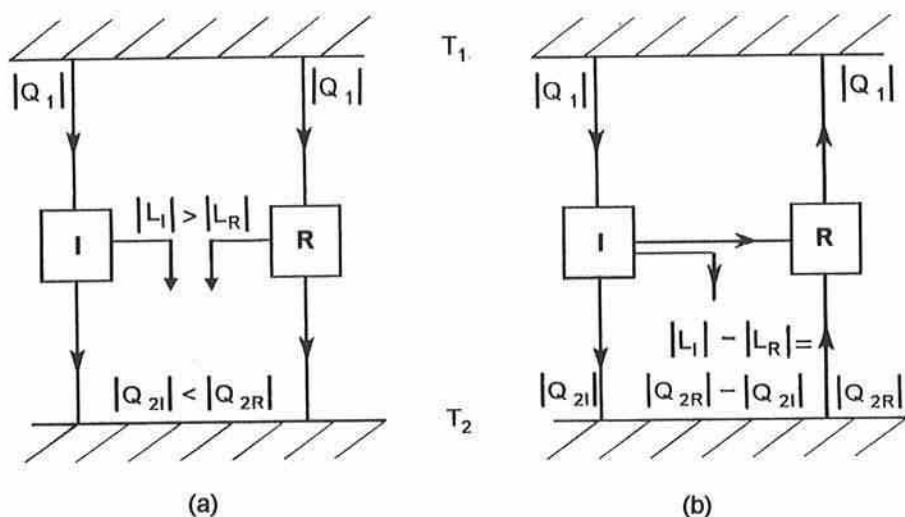
#### 4.4 CICLI TERMODINAMICI REVERSIBILI

L'enunciato di Kelvin-Planck implica che non è possibile trasformare integralmente in lavoro, durante un processo ciclico, una quantità di calore proveniente da una sorgente a temperatura uniforme. Con altre parole, tale impossibilità si può esprimere dicendo che il rendimento dei cicli termici è, necessariamente, minore di uno. Sorge quindi il problema di determinare quale sia il rendimento massimo possibile e, per i cicli che si svolgono tra due temperature, tale risposta è data dal teorema di Carnot.

Si supponga di avere a disposizione una sorgente calda a temperatura  $T_1$  ed un pozzo freddo a temperatura  $T_2 < T_1$ . Le considerazioni del paragrafo precedente suggeriscono che un ciclo ideale sia una successione di trasformazioni tutte reversibili. A questo proposito, il teorema di Carnot afferma che *il rendimento di un ciclo irreversibile è inferiore al rendimento di un ciclo reversibile e che tutti i cicli reversibili hanno lo stesso rendimento.*

La dimostrazione può essere fatta, ancora una volta, per assurdo. Con riferimento alla Fig. 4.3 (a), si potrebbe supporre che un ciclo irreversibile avesse un rendimento più elevato di quello di un ciclo reversibile. In tal caso, la quantità di lavoro prodotta dal ciclo irreversibile supererebbe quella prodotta dal ciclo reversibile. Di conseguenza se con riferimento alla Fig. 4.3 (b) s'invertisse il ciclo reversibile, cambierebbero i versi del lavoro  $L_R$  e delle quantità di calore  $Q_{2R}$  e  $Q_1$  relative al ciclo. Quindi, l'insieme dei due cicli trasformerebbe integralmente in lavoro, contraddicendo l'enunciato di Kelvin-Planck, una quantità netta di calore  $|Q_{2R}| - |Q_{2I}| =$

$|L_I| - |L_R|$  prelevata alla temperatura  $T_2$  e corrispondente alla differenza tra i lavori dei due cicli. Se invece si supponesse che tra due cicli reversibili vi fosse una differenza di rendimento, basterebbe invertire il ciclo reversibile con rendimento minore e ripetere il ragionamento precedente per concludere che si arriverebbe ugualmente ad una violazione dell'enunciato di Kelvin-Planck.



**Figura 4.3** Confronto tra i rendimenti di un ciclo irreversibile (I) ed un ciclo reversibile (R): (a) se, per assurdo, il rendimento del ciclo irreversibile fosse maggiore, allora (b) si avrebbe una violazione dell'enunciato di Kelvin-Planck.

I cicli reversibili devono essere caratterizzati da scambi di calore con l'esterno alle temperature delle sorgenti. In un ciclo bitermico diretto reversibile, la fornitura di calore ha quindi luogo alla temperatura massima  $T_1$ , mentre la cessione di calore avviene alla temperatura minima  $T_2$ . I passaggi da  $T_1$  a  $T_2$  e viceversa, non devono comportare scambi di calore con l'esterno. Infatti, come si vedrà nel seguito, tali percorsi sono adiabatici nel ciclo di Carnot, mentre sono caratterizzati da scambi termici interni in altri cicli reversibili. In questi ultimi cicli, infatti, il calore necessario per portare

il fluido da  $T_2$  a  $T_1$  è fornito dal fluido stesso durante il passaggio inverso da  $T_1$  a  $T_2$ . Storicamente, il primo ciclo bitermico reversibile analizzato in dettaglio è stato il ciclo di Carnot e, per tradizione, tale ciclo è preso a base delle definizioni di temperatura termodinamica ed entropia.

## 4.5 CICLO DI CARNOT E TEMPERATURA TERMODINAMICA

Un ciclo di Carnot diretto, tra le temperature di gas ideale  $T_1$  e  $T_2$ , è composto dalle trasformazioni seguenti, tutte reversibili:

- fornitura di calore isoterma a temperatura  $T_1$ ;
- passaggio adiabatico da  $T_1$  a  $T_2$ ;
- cessione di calore isoterma a temperatura  $T_2$ ;
- passaggio adiabatico da  $T_2$  a  $T_1$ .

Poiché, in base al teorema di Carnot, tutti i cicli bitermici reversibili diretti tra le stesse temperature  $T_1$  e  $T_2$  devono avere lo stesso rendimento di conversione, tale rendimento può dipendere solo dalle temperature, uniche entità comuni ai cicli dell'insieme considerato. Se per semplicità si fa riferimento a cicli attraversati da una massa unitaria di fluido, in base allo schema di Fig. 4.4 (a), si può porre

$$\eta = \frac{L^+}{Q_1^+} = \frac{Q_1^+ + Q_2^-}{Q_1^+} = 1 - \frac{|Q_2^-|}{|Q_1^+|} = 1 - \frac{1}{f(T_1, T_2)} \quad (4.1)$$

Di conseguenza, dall'Eq. (4.1) risulta

$$\frac{|Q_1^-|}{|Q_2^-|} = f(T_1, T_2) \quad (4.2)$$

dove le temperature  $T_1$  e  $T_2$  possono essere scelte arbitrariamente. Pertanto se al posto, rispettivamente, di  $T_2$  e di  $T_1$  si fa riferimento, in sequenza, ad

una terza temperatura  $T_3$ , dalla (4.2) si ottiene

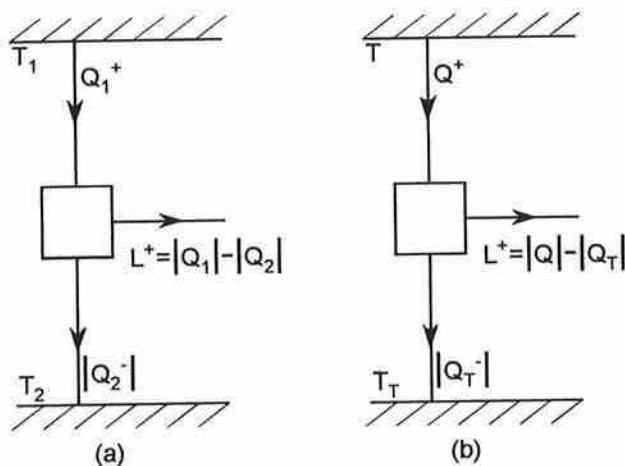
$$\frac{|Q_1|}{|Q_3|} = f(T_1, T_3) \quad (4.3)$$

e

$$\frac{|Q_2|}{|Q_3|} = f(T_2, T_3) \quad (4.4)$$

Dividendo membro a membro la (4.3) e la (4.4), si ottiene ancora

$$\frac{|Q_1|/|Q_3|}{|Q_2|/|Q_3|} = \frac{f(T_1, T_3)}{f(T_2, T_3)} = \frac{|Q_1|}{|Q_2|} = f(T_1, T_2) \quad (4.5)$$



**Figura 4.4** Cicli bitermici diretti: (a) tra le temperature  $T_1$  e  $T_2$  e (b) tra la temperatura generica  $T$  e la temperatura del punto triplo  $T_T$ .

La relazione (4.5) può venir scritta nella forma

$$f(T_1, T_2) = \frac{|Q_1|}{|Q_2|} = \frac{f(T_1, T_3)}{f(T_2, T_3)} = \frac{\psi(T_1)}{\psi(T_2)} = \frac{\Theta_1}{\Theta_2} \quad (4.6)$$

dove la funzione  $\Theta = \psi(T)$  può essere interpretata come temperatura termodinamica, in quanto non dipende da alcuna sostanza materiale. Se però, come si vedrà nel prossimo capitolo, si fa riferimento ad un ciclo di Carnot percorso da un gas ideale, si arriva alla relazione

$$\frac{|Q_1|}{|Q_2|} = \frac{T_1}{T_2} \quad (4.7)$$

nella quale i rapporti tra le quantità di calore scambiate sono espressi come rapporti tra le temperature di gas ideale. Dal confronto tra la (4.6) e la (4.7) emerge così l'uguaglianza dei rapporti tra le temperature termodinamiche e le temperature di gas ideale. Di conseguenza, se si rinuncia all'arbitrarietà nella scelta di  $\Theta_T$  ponendo  $\Theta_T = T_T$ , si ottiene anche l'uguaglianza tra le temperature termodinamiche e le temperature di gas ideale. In tal caso, per un ciclo bitermico reversibile tra la temperatura generica  $T = \Theta$  e la temperatura del punto triplo  $\Theta_T = T_T$ , si ha

$$T = T_T \frac{|Q|}{|Q_T|} = \Theta = \Theta_T \frac{|Q|}{|Q_T|} = 273,16 \frac{|Q|}{|Q_T|} \quad (4.8)$$

dove, con riferimento allo schema di Fig. 4.4 (b), si ha che  $Q$  è la quantità di calore scambiata alla temperatura generica, mentre  $Q_T$  è la quantità di calore scambiata alla temperatura del punto triplo.

Un'altra conseguenza importante delle (4.6) - (4.8), è la possibilità di esprimere il rendimento di un ciclo di Carnot diretto (e d'ogni altro ciclo bitermico reversibile diretto tra le temperature  $T_1$  e  $T_2$ ) come

$$\eta_{Carnot} = \frac{L^+}{Q_1^+} = \frac{Q_1^+ + Q_2^-}{Q_1^+} = 1 - \frac{|Q_2|}{|Q_1|} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (4.9)$$

Considerazioni analoghe si applicano al ciclo di Carnot inverso, schematizzato in Fig. 4.5 (a). Infatti, come indicato in Fig. 4.5 (b), l'unione



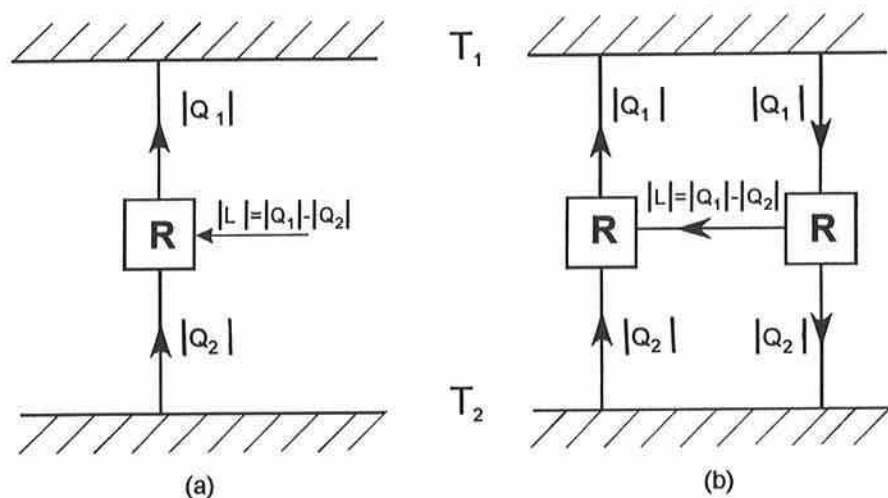
di un ciclo inverso e del corrispondente ciclo diretto reversibile non lascia tracce nell'universo. Di conseguenza, per entrambi i cicli deve necessariamente valere la relazione (4.7), in base alla quale il coefficiente d'effetto utile di un ciclo inverso frigorifero di Carnot può essere scritto nella forma

$$\varepsilon_{Carnot} = \frac{Q_2^+}{|L^-|} = \frac{Q_2^+}{|Q_1^-| - Q_2^+} = \frac{|Q_2|/|Q_1|}{1 - |Q_2|/|Q_1|} = \frac{T_2/T_1}{1 - T_2/T_1} = \frac{T_2}{T_1 - T_2} \quad (4.10)$$

Procedendo allo stesso modo, si ricava che il coefficiente d'effetto utile di un ciclo inverso di Carnot a pompa di calore è pari a

$$\varepsilon'_{Carnot} = \frac{|Q_1^-|}{|L^-|} = \frac{Q_2^+ + |L^-|}{|L^-|} = 1 + \varepsilon_{Carnot} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} \quad (4.11)$$

Ovviamente, i risultati riferiti ai cicli inversi di Carnot valgono per tutti i cicli bitermici inversi reversibili tra le stesse temperature.



**Figura 4.5** Cicli bitermici reversibili: (a) ciclo inverso tra le temperature  $T_1$  e  $T_2$  e (b) accoppiamento tra ciclo inverso e diretto tra le temperature  $T_1$  e  $T_2$

**Esempio 4.1**

Si determini la quantità minima di calore da fornire alla temperatura  $t_1$  di  $500\text{ }^\circ\text{C}$  per ogni unità di lavoro netto ottenuto, nell'ipotesi che la temperatura  $T_2$  sia pari a  $300\text{ K}$ .

*Soluzione*

In questo caso si ha  $T_1 = 500 + 273,15 = 773,15\text{ K}$  e  $T_2 = 300\text{ K}$  mentre, dalle Eq. (4.1) e (4.9), risulta

$$\eta_{Carnot} = \frac{L^+}{Q_1^+} = \frac{Q_1^+ + Q_2^-}{Q_1^+} = 1 - \frac{|Q_2^-|}{|Q_1^+|} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{300}{773,15} = 0,612$$

Poiché nessun ciclo diretto può avere un rendimento più elevato del ciclo di Carnot tra le stesse temperature, si ha

$$\left(\frac{Q_1^+}{L^+}\right)_{\min} = \frac{1}{\eta_{Carnot}} = \frac{1}{0,612} = 1,634$$

Pertanto si può concludere che, nelle ipotesi poste, per ottenere  $1\text{ kJ}$  di lavoro netto, si devono fornire ad un ciclo almeno  $1,634\text{ kJ}$  di calore.

**Esempio 4.2**

Si determini la quantità massima di calore asportabile alla temperatura di  $-10\text{ }^\circ\text{C}$  per ogni unità di lavoro speso, nell'ipotesi che la temperatura ambiente sia pari a  $30\text{ }^\circ\text{C}$ .

*Soluzione*

In questo caso si può fare ricorso ad un ciclo frigorifero di Carnot nel quale si abbia  $T_1 = 30 + 273,15 = 303,15\text{ K}$  e  $T_2 = -10 + 273,15 = 263,15\text{ K}$ . Con riferimento all'Eq. (4.10) risulta quindi

$$\varepsilon_{Carnot} = \frac{Q_2^+}{|L^-|} = \frac{T_2}{T_1 - T_2} = \frac{263,15}{303,15 - 263,15} = 6,579$$

Poiché nessun ciclo frigorifero inverso può avere un coefficiente d'effetto utile più elevato del ciclo di Carnot tra le stesse temperature, si ha

$$\left(\frac{Q_2^+}{|L^-|}\right)_{\max} = \varepsilon_{Carnot} = 6,579$$

Pertanto si può concludere che, nelle ipotesi poste, si asportano, al più, 6,579 kJ di calore per 1 kJ di lavoro speso.

### Esempio 4.3

Si determini il valore assoluto massimo della quantità di calore ottenibile alla temperatura di 45 °C per ogni unità di lavoro speso, nell'ipotesi che la temperatura ambiente sia pari a 0 °C.

#### Soluzione

In questo caso si può fare ricorso ad un ciclo di Carnot a pompa di calore nel quale si abbia  $T_1 = 45 + 273,15 = 318,15$  K e  $T_2 = 273,15$  K. Con riferimento all'Eq. (4.11) risulta quindi

$$\varepsilon'_{Carnot} = \frac{|Q_1^-|}{|L^-|} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} = \frac{318,15}{318,15 - 273,15} = 7,077$$

Poiché nessun ciclo inverso a pompa di calore può avere un coefficiente d'effetto utile più elevato del ciclo di Carnot tra le stesse temperature, si ha

$$\left(\frac{Q_1^-}{L^-}\right)_{\max} = \varepsilon'_{Carnot} = 7,077$$

Pertanto si può concludere che, nelle ipotesi poste, si ottengono, al più, 7,077 kJ di calore per 1 kJ di lavoro speso.

## 4.6 ENTROPIA

Con riferimento alla Fig. 4.4 (a) ed ai segni attribuiti convenzionalmente alle quantità di calore scambiate, l'Eq. 4.9 può essere scritta nella forma

$$\eta_{Carnot} = 1 - \frac{|Q_2|}{|Q_1|} = 1 + \frac{Q_2^-}{Q_1^+} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (4.12)$$

che, per un ciclo reversibile bitermico, equivale a

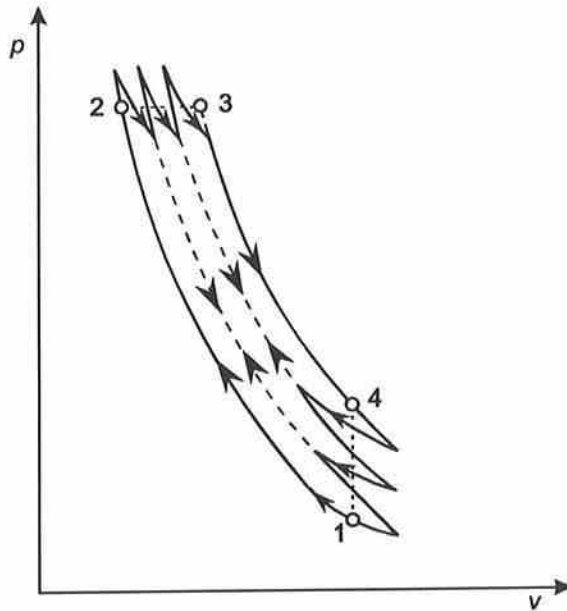
$$\frac{Q_1^+}{T_1} + \frac{Q_2^-}{T_2} = \sum_{j=1}^2 \left( \frac{Q_j}{T_j} \right)_{\text{rev}} = 0 \quad (4.13)$$

Un ciclo reversibile generico può essere sempre approssimato mediante  $n$  cicli elementari bitermici, come indicato nella Fig. 4.6 dove  $n$  è uguale a 3 ed il ciclo ha la forma di quello che, nel Capitolo 11, si vedrà essere un ciclo Diesel. Le trasformazioni che si svolgono all'interno del ciclo base sono, infatti, percorse nei due sensi e quindi si elidono, mentre restano le tracce, sovrapposte ai contorni del ciclo, delle trasformazioni che si svolgono all'esterno. Naturalmente la sovrapposizione è tanto più accurata quanto più grande è il numero  $n$  di cicli elementari utilizzati nella suddivisione. Per ognuno degli  $n$  cicli elementari, si può scrivere una relazione come la (4.13) e quindi, passando al limite con  $n$  tendente ad infinito si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{2n} \left( \frac{Q_j}{T_j} \right)_{\text{rev}} = \oint_{\text{rev}} \frac{dQ}{T} = 0 \quad (4.14)$$

per l'insieme dei cicli. Poiché nell'Eq. (4.14) la funzione integranda è un differenziale esatto, può essere definito un nuovo potenziale "entropia specifica" scrivendo

$$ds = \left( \frac{dQ}{T} \right)_{\text{rev}} \quad (4.15)$$



**Figura 4.6** Suddivisione di un ciclo reversibile in  $n = 3$  cicli elementari bitermici.

Nella (4.15) si è fatto riferimento implicitamente a cicli percorsi dall'unità di massa di fluido, e quindi  $s$  è misurata in joule, o chilojoule, per chilogrammo e kelvin, cioè  $[\text{J}/(\text{kg K})]$  o  $[\text{kJ}/(\text{kg K})]$ . Se si fosse fatto riferimento a cicli percorsi da una mole di sostanza pura, si sarebbe arrivati alla definizione dell'entropia molare

$$\bar{s} = M s \quad (4.16)$$

uguale al prodotto dell'entropia specifica per la massa molare  $M$  della sostanza considerata e misurata in joule, o chilojoule, per kilomole e kelvin, cioè  $[\text{J}/(\text{kmol K})]$  o  $[\text{kJ}/(\text{kmol K})]$ . Se, infine, si fosse fatto riferimento a cicli percorsi da una massa generica  $m$  di sostanza, si sarebbe arrivati alla definizione dell'entropia totale

$$S = m s \quad (4.17)$$

uguale al prodotto dell'entropia specifica per la massa  $m$  della sostanza considerata e misurata in joule, o chilojoule, per kelvin, cioè [J/K] o [kJ/K].

#### 4.6.1 Disuguaglianza di Clausius

Un ciclo bitermico generico (che, a priori, potrebbe essere sia reversibile sia irreversibile) è caratterizzato da un rendimento non superiore al rendimento del ciclo di Carnot tra le stesse temperature. Nell'ipotesi che gli scambi termici abbiano luogo alle temperature delle sorgenti, si ha quindi

$$\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{|Q_1|} = 1 + \frac{Q_2^-}{Q_1^+} \leq 1 - \frac{T_2}{T_1} = \eta_{Carnot} \quad (4.18)$$

ovvero

$$\frac{Q_1^+}{T_1} + \frac{Q_2^-}{T_2} = \sum_{j=1}^2 \frac{Q_j}{T_j} \leq 0 \quad (4.19)$$

Se si ripetono le considerazioni del paragrafo precedente, ma con riferimento al ciclo generico composto da  $n$  cicli elementari e si passa al limite per  $n$  tendente ad infinito, si ottiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{2n} \frac{Q_j}{T_j} = \oint \frac{dQ}{T} \leq 0 \quad (4.20)$$

ovvero

$$\oint \frac{dQ}{T} = -\Delta s_{irr} \quad (4.21)$$

Le relazioni (4.20) e (4.21) sono note come disuguaglianze di Clausius ed in esse il termine  $\Delta s_{irr}$  è la generazione di entropia, sempre positiva in un ciclo irreversibile ed uguale a zero solo in un ciclo reversibile.

La relazione (4.21) è frequentemente espressa in termini dif-

ferenziali. A tal fine si fa riferimento, dapprima, ad un ciclo complessivamente irreversibile, ma composto da una trasformazione irreversibile  $if$  ed una reversibile  $fi$ , per il quale risulta

$$\int_i^f \left( \frac{dQ}{T} \right)_{irr} + \int_f^i \left( \frac{dQ}{T} \right)_{rev} = \int_i^f \left( \frac{dQ}{T} \right)_{irr} - \Delta s = -\Delta s_{irr}$$

$$\Rightarrow \Delta s = \int_i^f \left( \frac{dQ}{T} \right)_{irr} + \Delta s_{irr} \quad (4.22)$$

In termini differenziali si può quindi scrivere

$$ds = \frac{dQ}{T} + ds_{irr} \quad (4.23)$$

dove si intende che  $ds_{irr}$  è positivo se la trasformazione generica è irreversibile, mentre è uguale a zero se la trasformazione generica è reversibile. Si noti che in una trasformazione adiabatica si ha  $dQ=0$  e quindi l'entropia non può diminuire ma può, eventualmente, restare costante se la trasformazione stessa è reversibile. Pertanto, una trasformazione adiabatica reversibile è certamente isoentropica.

La definizione (4.16), o l'Eq. (4.23) con  $ds_{irr} = 0$ , consentono di esprimere il calore scambiato in una trasformazione reversibile come

$$Q_{if} = \int_{s_i}^{s_f} T ds \quad (4.24)$$

In un diagramma  $(T, s)$  l'integrale (4.24), e quindi il calore scambiato, corrispondono all'area sottostante alla trasformazione reversibile, come illustrato nella Fig. 4.7 (a).

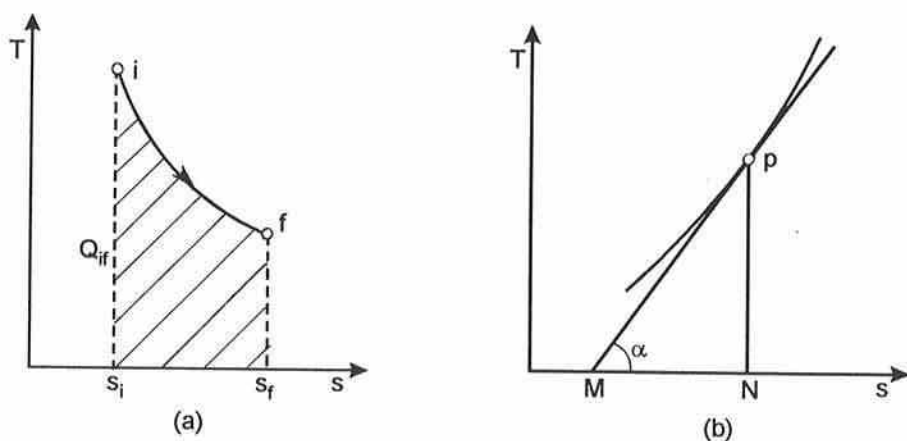
Nel diagramma  $(T, s)$  anche la derivata dell'entropia rispetto alla temperatura, calcolata in un punto qualunque di una trasformazione reversibile, è suscettibile d'interpretazione geometrica in quanto si ha

$$\frac{ds}{dT} = \frac{1}{T} \frac{dQ}{dT} = \frac{c}{T} \quad (4.25)$$

ovvero

$$c = \frac{T}{dT/ds} = \frac{PN}{\operatorname{tg} \alpha} = MN \quad (4.26)$$

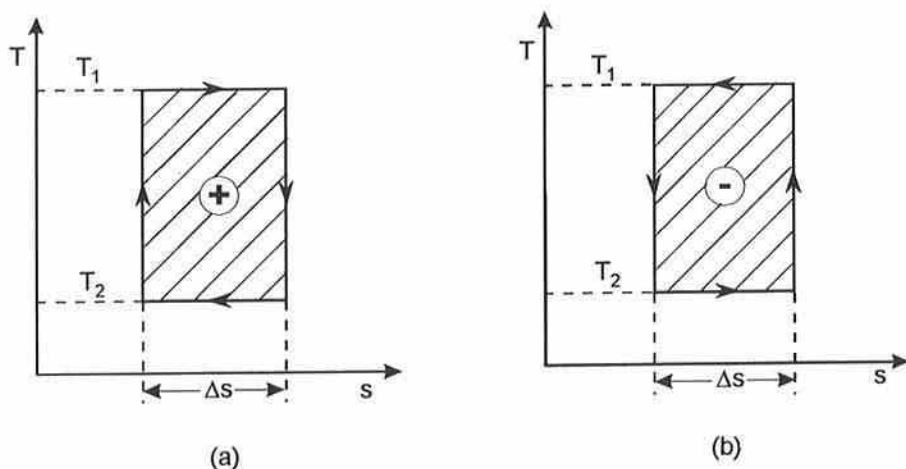
Di conseguenza, in una trasformazione reversibile il calore specifico locale è proporzionale alla sottotangente nel punto alla trasformazione stessa, come illustrato nella Fig. 4.7 (b).



**Figura 4.7** Trasformazione reversibile in un diagramma  $(T, s)$ : area sottostante (a) e sottotangente in un punto (b).

In un diagramma  $(T, s)$  il ciclo di Carnot, costituito da due isoterme e due isoentropiche, è rappresentato da un rettangolo. Come indicato in Fig. 4.8, il ciclo diretto è percorso in senso orario, mentre il ciclo inverso è percorso in senso antiorario. In base all'Eq. (4.24), l'area  $(T_1 - T_2)\Delta s$  del ciclo rappresenta il lavoro netto, in quanto è pari alla differenza tra la quantità di calore scambiata alla temperatura  $T_1$  e la quantità di calore scambiata alla temperatura  $T_2$





**Figura 4.8** Ciclo di Carnot in un diagramma  $(T, s)$ : (a) ciclo diretto e (b) ciclo inverso.

## 4.7 PRIMO PRINCIPIO RIFERITO AI PARAMETRI INTERNI

Per una trasformazione reversibile infinitesima di un sistema aperto l'espressione (3.25) del primo principio, valida per sistemi in deflusso monodimensionale stazionario, porge

$$T ds = dh - v dp \quad (4.27)$$

Infatti, come si vedrà meglio nel Paragrafo 4.7.2, in tal caso si ha:  $dQ = T ds$  e  $dL' = -v dp - dw^2/2 - g dz$ .

In base alla definizione d'entalpia, risulta

$$dh = du + p dv + v dp \quad (4.28)$$

e quindi, sostituendo la (4.28) nella (4.27), si ottiene

$$T ds = du + p dv \quad (4.29)$$

Le Eq. (4.27) e (4.29) vengono spesso considerate espressioni del primo principio riferito ai parametri interni e scritto, rispettivamente, per i sistemi aperti a deflusso monodimensionale stazionario ed i sistemi chiusi. In realtà tali equazioni esprimono relazioni tra potenziali termodinamici e quindi hanno validità generale, che trascende i processi cui si può fare riferimento per ricavarle. In particolare, nel Paragrafo 4.7.2 si vedrà come le (4.27) e (4.29) continuino a valere anche in presenza d'irreversibilità, purché gli stati iniziale e finale siano stati d'equilibrio. Nel seguito, infine, le (4.27) e (4.29) saranno ampiamente utilizzate nella valutazione di proprietà termodinamiche delle sostanze. Un esempio d'applicazione particolarmente semplice è costituito dalla valutazione dell'entropia di sostanze incompressibili (come solidi e liquidi), illustrata nel paragrafo che segue.

#### 4.7.1 Entropia delle Sostanze Incompressibili

Nel Paragrafo 3.6, si era rilevato che il differenziale dell'energia interna di sostanze incompressibili, come solidi e liquidi, può essere scritto nella forma

$$du = c dT \quad (4.30)$$

con

$$c = c_p = c_v \quad (4.31)$$

In aggiunta si era osservato che, per queste sostanze, si ha

$$dh = du + v dp \quad (4.32)$$

in quanto il volume specifico è costante. In tali ipotesi, sia l'Eq. (4.29) che l'Eq. (4.27) porgono

$$\begin{aligned} T ds &= du + p dv = du + 0 \\ &= dh - v dp = (du + v dp) - v dp = du = c dT \end{aligned} \quad (4.33)$$

Integrando la (4.33) tra la temperatura di riferimento  $T_0$  e la temperatura generica  $T$ , si ottiene

$$s - s_0 = \int_{T_0}^T \frac{c(T)}{T} dT \quad (4.34)$$

dove si ha  $s = s_0$  per  $T = T_0$ . Se poi il calore specifico non dipende dalla temperatura, la (4.34) fornisce

$$s - s_0 = c \ln \frac{T}{T_0} \quad (4.35)$$

ovvero l'espressione esplicita delle variazioni d'entropia di una sostanza incomprimibile.

#### Esempio 4.4

Si determini l'entropia specifica dell'acqua alla temperatura di 80 °C, assumendo  $s_0 = 0$  alla temperatura  $T_0 = 273,16$  K.

#### Soluzione

Dall'Eq. (4.35), assunto  $c = 4,187$  kJ/(kg K), si ha

$$s = s_0 + c \ln \frac{T}{T_0} = 0 + 4,187 \ln \frac{80 + 273,15}{273,16} = 1,075 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}$$

Ovviamente, procedure analoghe sono seguite per il calcolo delle entropie di tutte le sostanze liquide e solide.

### 4.7.2 Primo Principio e Bilancio dell'Energia Meccanica

Come si poteva evincere dal procedimento impiegato per ricavarle, le Eq. (4.27) e (4.29) valgono anche in presenza di variazioni d'energia cinetica e potenziale. L'interesse pratico di tale osservazione è evidente per i sistemi a

deflusso monodimensionale stazionario, per i quali non è inutile procedere ad una dimostrazione formale. Nei sistemi a deflusso monodimensionale stazionario, il primo principio (3.25) può essere scritto nella forma differenziale

$$dQ = dL' + dh + \frac{dw^2}{2} + g dz \quad (4.36)$$

A sua volta, il termine corrispondente al lavoro tecnico utile può venire espresso mediante il bilancio dell'energia meccanica (2.24), scritto per una trasformazione infinitesima

$$dL' = -v dp - |dR^-| - \frac{dw^2}{2} - g dz \quad (4.37)$$

Se la trasformazione infinitesima è anche reversibile, si ha

$$dQ = T ds \quad (4.38)$$

dove  $T$  è la temperatura del sistema, mentre risulta

$$dR^- = 0 \quad (4.39)$$

Pertanto nell'ipotesi di reversibilità, sostituendo la (4.37) nella (4.36) e tenendo conto delle (4.38) e (4.39), si ottiene

$$\begin{aligned} dQ = T ds &= \left( -v dp - |dR^-| - \frac{dw^2}{2} - g dz \right) + dh + \frac{dw^2}{2} + g dz \\ &= dh - v dp \end{aligned} \quad (4.40)$$

cioè l'espressione (4.27) del primo principio riferita ai parametri interni.

Le Eq. (4.29) e (4.27), anche se ricavate per trasformazioni reversibili, riguardano proprietà termodinamiche e, come tali, valgono anche per trasformazioni irreversibili purché gli stati iniziale e finale, infinitamente vicini, siano stati d'equilibrio. Pertanto, quando sono presenti solo irreversibi-

lità legate agli attriti (e non agli scambi termici), si ha

$$|dR^-| > 0 \quad (4.41)$$

e dalla (4.23) risulta

$$dQ = T ds - T ds_{irr} \quad (4.42)$$

dove  $T$  è ancora identificabile con la temperatura del sistema. Sostituendo la (4.37) nella (4.36), e tenendo conto delle (4.41) e (4.42), si ottiene

$$\begin{aligned} dQ = T ds - T ds_{irr} &= \left( -v dp - |dR^-| - \frac{dw^2}{2} - g dz \right) + dh + \frac{dw^2}{2} + g dz \\ &= dh - v dp - |dR^-| \end{aligned} \quad (4.43)$$

ovvero, considerando il secondo ed il quarto membro, ancora l'espressione (4.27) con

$$T ds_{irr} = |dR^-| \quad (4.44)$$

L'Eq. (4.44) conferma l'interpretazione del lavoro delle forze d'attrito come una sorgente d'entropia che trasforma energia meccanica (coerente) in energia interna (incoerente).

## 4.8 BILANCI DI ENTROPIA

Come si è più volte osservato, l'entropia può essere generata all'interno dei sistemi e può variare per effetto degli scambi termici con l'esterno. Nei sistemi aperti poi, si possono avere anche flussi d'entropia associati alle entrate ed alle uscite di fluido. Ai fini del calcolo, è conveniente esprimere i bilanci d'entropia, relativi al secondo principio, in forma analoga ai bilanci d'energia, relativi al primo principio.

### 4.8.1 Bilancio di Entropia per i Sistemi Chiusi

Per un sistema chiuso del tipo rappresentato in Fig. 4.9, nell'ipotesi di ragionevole uniformità dell'entropia all'interno, l'integrazione della (4.23) da uno stato d'equilibrio termodinamico iniziale  $i$  ad uno stato d'equilibrio termodinamico finale  $f$ , porge

$$s_f - s_i = \sum \left( \frac{Q_j}{T_j} \right)_{if} + (\Delta s_{irr})_{if}$$

$$\Rightarrow S_f - S_i = \sum \left( \frac{\hat{Q}_j}{T_j} \right)_{if} + (\Delta S_{irr})_{if} \quad (4.45)$$

a seconda che si faccia riferimento all'entropia specifica  $s$  o, come in figura, all'entropia totale  $S = ms$ . Nella (4.45) le sommatorie indicano le quantità d'entropia, specifica o totale, trasferite attraverso gli scambi termici che hanno luogo nelle zone di confine non adiabatiche, mentre i termini relativi alle irreversibilità rappresentano la produzione d'entropia, specifica o totale, durante una trasformazione irreversibile. Come si può notare, il lavoro scambiato con l'esterno non compare nel bilancio d'entropia.

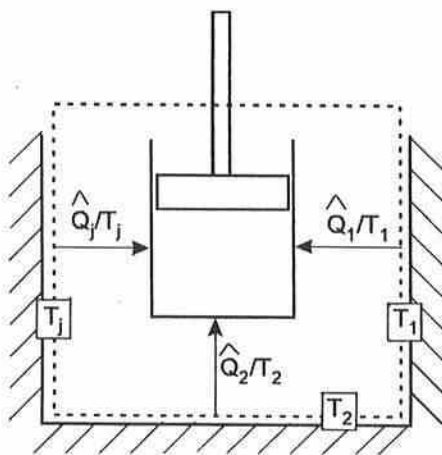


Figura 4.9 Schema d'appoggio per il bilancio d'entropia in un sistema chiuso.

**Esempio 4.5**

Si determini la produzione d'entropia associata alla fornitura di 100 kJ di calore ad 1 kg d'acqua, che inizialmente si trova alla temperatura di 20 °C, utilizzando una sorgente a temperatura  $t_1 = 100$  °C.

*Soluzione*

Nell'ipotesi di calore specifico indipendente dalla temperatura, dal primo principio della termodinamica scritto nella forma (3.3), si ha

$$u_f - u_i = c (T_f - T_i) = Q_{if} - L_{if} = Q_{if}$$

ovvero

$$T_f = T_i + \frac{Q_{if}}{c} = (20 + 273,15) + \frac{100}{4,187} = 317,03 \text{ K}$$

Dall'Eq. (4.45), riferita all'unità di massa ed alla sorgente 1, si ha

$$\begin{aligned} (\Delta s_{irr})_{if} &= s_f - s_i - \left( \frac{Q}{T_1} \right)_{if} = c \ln \left( \frac{T_f}{T_i} \right) - \left( \frac{Q}{T_1} \right)_{if} \\ &= 4,187 \ln \left( \frac{317,03}{293,15} \right) - \frac{100}{373,15} = 0,060 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \end{aligned}$$

in quanto la fornitura di calore all'acqua, con una differenza finita di temperatura, comporta una produzione di entropia.

**Esempio 4.6**

Si determini la produzione di entropia associata al passaggio di 100 kJ di calore, da una sorgente a temperatura  $T_1 = 400$  K ad un pozzo a temperatura  $T_2 = 300$  K.

*Soluzione*

L'Eq. (4.45) ed uno schema analogo a quello illustrato in Fig. 4.9 possono essere ancora utilizzati con riferimento ad una massa qualunque  $m$  all'interno ed all'ipotesi  $S_f = S_i$ , in quanto il passaggio di calore non lascia traccia nel sistema. Poiché risulta  $\hat{Q}_1^+ = -\hat{Q}_2^- = 100 \text{ kJ}$ , si ha

$$\begin{aligned} (\Delta S_{irr})_{if} &= S_f - S_i - \left( \frac{\hat{Q}_1^+}{T_1} + \frac{\hat{Q}_2^-}{T_2} \right) = - \left( \frac{\hat{Q}_1^+}{T_1} + \frac{\hat{Q}_2^-}{T_2} \right) \\ &= - \left( \frac{100}{400} - \frac{100}{300} \right) = 0,083 \frac{\text{kJ}}{\text{K}} \end{aligned}$$

dove la produzione di entropia è associata allo scambio termico interno, che ha luogo con una differenza finita di temperatura.

**Esempio 4.7**

Si determini la produzione di entropia specifica in un ciclo diretto al quale si forniscono  $Q_1^+ = 100 \text{ kJ/kg}$  di calore utilizzando una sorgente a temperatura  $T_1 = 600 \text{ K}$ , mentre si riversano  $Q_2^- = 60 \text{ kJ/kg}$  di calore nell'ambiente esterno a temperatura  $T_2 = 300 \text{ K}$ .

*Soluzione*

L'Eq. (4.45) porge

$$\begin{aligned} (\Delta S_{irr})_{if} &= (s_f - s_i) - \sum \left( \frac{Q_j}{T_j} \right)_{if} = 0 - \left( \frac{Q_1^+}{T_1} + \frac{Q_2^-}{T_2} \right) \\ &= - \frac{100}{600} + \frac{60}{300} = 0,0\bar{3} \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \end{aligned}$$

Poiché la produzione d'entropia non è nulla, il ciclo è irreversibile. Infatti il rendimento di conversione del ciclo



$$\eta = 1 + \frac{Q_2^-}{Q_1^+} = 1 - \frac{60}{100} = 0,4$$

è inferiore al rendimento di conversione

$$\eta_{Carnot} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{300}{600} = 0,5$$

di un ciclo di Carnot tra le stesse temperature.

### Esempio 4.8

Si determini la produzione d'entropia specifica in un ciclo frigorifero che si svolge tra la temperatura  $T_2 = 250$  K e la temperatura  $T_1 = 300$  K, nel quale si ottiene, alla temperatura  $T_2$ , un effetto termico utile pari a  $Q_2^+ = 150$  kJ/kg spendendo una quantità di lavoro pari a 50 kJ/kg.

#### Soluzione

Con riferimento allo schema di Fig. 4.5 (a), il primo principio della termodinamica fornisce

$$|Q_1^-| = Q_2^+ + |L^-| = 150 + 50 = 200 \text{ kJ/kg}$$

In questo caso, dalla (4.45) si ha

$$\begin{aligned} (\Delta s_{irr})_{if} &= (s_f - s_i) - \sum \left( \frac{Q_j}{T_j} \right)_{if} = 0 - \left( \frac{Q_1^-}{T_1} + \frac{Q_2^+}{T_2} \right) \\ &= \frac{200}{300} - \frac{150}{250} = 0,0\bar{6} \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \end{aligned}$$

Poiché la produzione d'entropia non è nulla, il ciclo è irreversibile. Infatti, si può verificare facilmente che il suo coefficiente d'effetto utile è minore di quello di un ciclo frigorifero di Carnot che si svolga tra le stesse temperature.

### 4.8.2 Bilancio di Entropia per i Sistemi Aperti

Con riferimento alla Fig. 4.10 (a), si consideri il sistema chiuso in movimento che, all'istante iniziale  $\vartheta$ , comprende la massa  $m_i = m(\vartheta)$ , contenuta nel volume di controllo, e le masse  $\Delta m_e$ , in procinto di entrare nel volume stesso. Alla massa  $m_i$  è associata l'entropia globale  $S_i = S(\vartheta)$ , mentre alle masse  $\Delta m_e$  sono associate le entropie specifiche uniformi  $s_e$ . Come evidenziato nella Fig. 4.10 (b), all'istante finale  $\vartheta + \Delta\vartheta$  il sistema comprende la massa  $m_f = m(\vartheta + \Delta\vartheta)$ , contenuta nel volume di controllo, e le masse  $\Delta m_u$ , appena uscite. Alla massa  $m_f$  è associata l'entropia globale  $S_f = S(\vartheta + \Delta\vartheta)$ , mentre alle masse  $\Delta m_u$  sono associate le entropie specifiche uniformi  $s_u$ . In base all'Eq. (4.45) riferita alle quantità totali, il bilancio d'entropia nella trasformazione che porta il sistema chiuso in movimento dallo stato iniziale  $i$  allo stato finale  $f$ , può essere scritto nella forma

$$(S_f + \sum \Delta m_u s_u) - (S_i + \sum \Delta m_e s_e) = \sum \left( \frac{\hat{Q}_j}{T_j} \right)_{if} + (\Delta S_{irr})_{if} \quad (4.46)$$

purché, abbandonata l'ipotesi d'uniformità, l'entropia globale del sistema sia definita su base locale come

$$S = \int_V \rho s \, dV \quad (4.47)$$

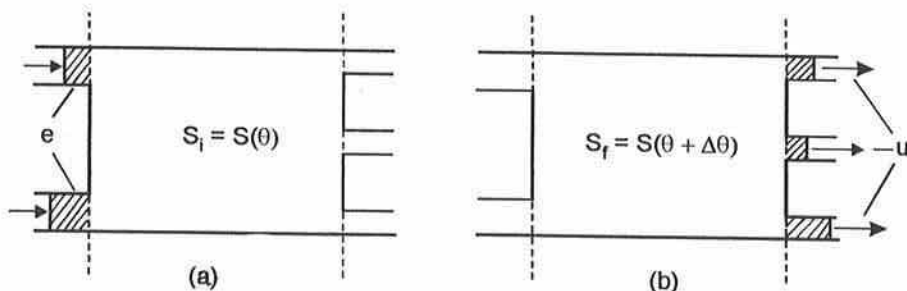


Figura 4.10 Trasformazione di un sistema aperto: (a) stato iniziale e (b) stato finale.

Nella (4.46)  $\hat{Q}_j/T_j$  rappresenta la quantità d'entropia trasferita attraverso la generica zona di confine non adiabatica, ed il termine  $\Delta S_{irr}$  rappresenta la produzione globale d'entropia durante la trasformazione irreversibile. Si noti che, in situazioni d'uniformità, la (4.47) fornisce di nuovo  $S = m s$  e la (4.46) si riduce alla (4.45), valida per i sistemi chiusi, qualora non vi siano entrate ed uscite di fluido.

Se si dividono i due membri della (4.46) per  $\Delta\vartheta$  e si fa tendere  $\Delta\vartheta$  a zero, si arriva all'espressione del bilancio d'entropia scritto in termini di flussi per un sistema aperto che evolve in regime transitorio

$$\frac{dS}{d\vartheta} = \sum \frac{q_j}{T_j} + \sum \dot{m}_e s_e - \sum \dot{m}_u s_u + \dot{S}_{irr} \quad (4.48)$$

Nel caso particolare di regime stazionario, la (4.48) porge

$$\sum \dot{m}_u s_u - \sum \dot{m}_e s_e = \sum \frac{q_j}{T_j} + \dot{S}_{irr} \quad (4.49)$$

in quanto risulta  $dS/d\vartheta = 0$ , mentre resta costante nel tempo il termine di generazione  $\dot{S}_{irr}$ .

Infine, per sistemi in regime stazionario con una sola entrata ed una sola uscita, dalla (4.49) si ottiene

$$\dot{m}(s_u - s_e) = \sum \frac{q_j}{T_j} + \dot{S}_{irr} \quad (4.50)$$

Analogamente, nel caso particolare di sistemi in regime stazionario con una sola entrata ed una sola uscita, l'Eq. (4.46) può essere scritta nella forma

$$s_u - s_e = \sum \left( \frac{1}{\Delta m} \frac{\hat{Q}_j}{T_j} \right)_{if} + \frac{(\Delta S_{irr})_{if}}{\Delta m} = \sum \left( \frac{Q_j}{T_j} \right)_{if} + (\Delta s_{irr})_{if} \quad (4.51)$$

dove, al terzo membro, si fa riferimento all'intervallo di tempo necessario a far entrare, in  $e$ , ed uscire, da  $u$ , la massa unitaria. Il punto di vista su cui si basa l'Eq. (4.51) è quello Euleriano ma, al solito, può essere adottato anche un punto di vista Lagrangiano. In tal modo, ponendo  $i = e$  ed  $f = u$  al terzo membro, l'Eq. (4.51) viene riferita alla massa unitaria che si sposta dall'entrata all'uscita. Si ottiene così

$$s_u - s_e = \sum \left( \frac{Q_j}{T_j} \right)_{eu} + (\Delta s_{irr})_{eu} \quad (4.52)$$

dove le analogie con la (4.45) e la (4.50) sono evidenti. In particolare, la (4.52) avrebbe potuto essere ricavata formalmente, dividendo i due membri della (4.50) per la portata di massa  $\dot{m}$ .

#### **Esempio 4.9**

Si ricavi l'espressione del bilancio d'entropia per i sistemi chiusi in regime transitorio.

#### *Soluzione*

L'Eq. (4.48) è del tutto generale e, se non si hanno entrate ed uscite di fluido, fornisce

$$\frac{dS}{d\vartheta} = \sum \frac{q_j}{T_j} + \dot{S}_{irr}$$

ovvero l'espressione del bilancio di entropia per i sistemi chiusi in regime transitorio.

#### **Esempio 4.10**

Si ricavi l'espressione del bilancio d'entropia per il processo di riempimento d'una bombola, illustrato nel Paragrafo 3.4.4.

### Soluzione

Con riferimento alla schematizzazione di sistema aperto, illustrata in Fig. 3.6, l'Eq. (4.46) porge

$$S_f - \Delta m s_e = \Delta m (s_f - s_e) = (\Delta S_{irr})_{if} \quad \Rightarrow \quad s_f - s_e = (\Delta s_{irr})_{if}$$

Con riferimento alla schematizzazione di sistema chiuso, illustrata in Fig. 3.7, l'Eq. (4.45) porge

$$S_f - S_i = \Delta m (s_f - s_e) = (\Delta S_{irr})_{if} \quad \Rightarrow \quad s_f - s_e = (\Delta s_{irr})_{if}$$

ovvero la stessa relazione ricavata in precedenza. Pertanto, in assenza di scambi termici, la generazione d'entropia nel processo si traduce integralmente in un aumento d'entropia del gas.

### Esempio 4.11

Con riferimento agli Esempi 2.7 e 3.9, si determini l'aumento d'entropia che si verifica nel fluido incomprimibile acqua per effetto di un lavoro delle forze d'attrito pari ad  $|R_{eu}^-| = 30 \text{ J/kg}$ . Si supponga che il processo sia adiabatico e si faccia riferimento ad una temperatura d'entrata pari a 300 K.

### Soluzione

L'aumento di temperatura dovuto agli attriti, calcolato nell'Esempio 3.9, era tale da dar luogo ad una temperatura d'uscita

$$T_u = T_e + \frac{|R_{eu}^-|}{c} = 300 + \frac{30}{4187} = 300,007 \text{ K}$$

Nell'ipotesi d'adiabaticità della trasformazione, dall'Eq. (4.52) si ottiene

$$(\Delta s_{irr})_{eu} = s_u - s_e - \sum \left( \frac{Q_j}{T_j} \right)_{eu} = s_u - s_e = c \ln \left( \frac{T_u}{T_e} \right)$$

$$= 4187 \ln\left(\frac{300,007}{300}\right) = 0,098 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

dove, come si è detto, la produzione d'entropia è associata alla presenza d'attriti. Si noti che, in casi come questo, la produzione d'entropia è esprimibile nella forma

$$(\Delta s_{irr})_{eu} = s_u - s_e = c \ln\left(1 + \frac{T_u - T_e}{T_e}\right)$$

Quindi, a parità di differenza di temperatura  $T_u - T_e$  (cioè di lavoro delle forze d'attrito), la produzione d'entropia risulta tanto maggiore quanto più bassa è la temperatura  $T_e$ , ovvero tanto minore quanto più alta è la temperatura  $T_e$ . Pertanto la conversione d'energia meccanica in energia termica, ad opera degli attriti, è meno dannosa alle alte che alle basse temperature.

#### Esempio 4.12

Con riferimento allo schema di Fig. 3.4 (a), si determini la produzione d'entropia per unità di tempo in uno scambiatore di calore acqua-acqua, adiabatico verso l'esterno, nel quale si abbia:  $\dot{m}_c = \dot{m}_{ce} = \dot{m}_{cu} = 2 \text{ kg/s}$ ,  $t_{ce} = 80 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $t_{cu} = 60 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $\dot{m}_f = \dot{m}_{fe} = \dot{m}_{fu} = 1 \text{ kg/s}$  e  $t_{fe} = 10 \text{ }^\circ\text{C}$ .

#### Soluzione

Poiché lo scambiatore è adiabatico verso l'esterno, nell'ipotesi di calore specifico dell'acqua indipendente dalla temperatura, si ha

$$\dot{m}_c (h_{ce} - h_{cu}) = \dot{m}_c c (t_{ce} - t_{cu}) = \dot{m}_f (h_{fu} - h_{fe}) = \dot{m}_f c (t_{fu} - t_{fe})$$

da cui si ottiene

$$t_{fu} = t_{ef} + \frac{\dot{m}_c}{\dot{m}_f} (t_{ce} - t_{cu}) = 10 + \frac{2}{1} (80 - 60) = 50 \text{ }^\circ\text{C}$$

Di conseguenza, sempre nell'ipotesi d'adiabaticità dello scambiatore verso l'esterno, dall'applicazione della (4.49) si ottiene

$$\begin{aligned}\dot{S}_{irr} &= \sum \dot{m}_u s_u - \sum \dot{m}_e s_e - \sum \frac{q_j}{T_j} = \sum \dot{m}_u s_u - \sum \dot{m}_e s_e \\ &= \dot{m}_c s_{cu} + \dot{m}_f s_{fu} - \dot{m}_c s_{ce} - \dot{m}_f s_{fe} = \dot{m}_c (s_{cu} - s_{ce}) + \dot{m}_f (s_{fu} - s_{fe}) \\ &= \dot{m}_c c \ln \frac{T_{cu}}{T_{ce}} + \dot{m}_f c \ln \frac{T_{fu}}{T_{fe}} = 2 \cdot 4,187 \cdot \ln \left( \frac{333,15}{353,15} \right) + 1 \cdot 4,187 \cdot \ln \left( \frac{323,15}{283,15} \right) \\ &= -0,4882 + 0,5533 = 0,0651 \text{ kW / K}\end{aligned}$$

Ovviamente, la produzione d'entropia è dovuta agli scambi termici interni che hanno luogo con differenze finite di temperatura.

## 4.9 RELAZIONI DI MAXWELL

In base alla già ricordata regola delle fasi, lo stato di un sistema chimicamente e fisicamente omogeneo, costituito cioè da un'unica sostanza presente con una sola fase, è completamente determinato dalla specificazione di due sole proprietà intensive. Ciò significa che, se si fa riferimento a tre proprietà caratteristiche, esse sono necessariamente legate da qualche relazione funzionale, poiché ogni proprietà intensiva deve potersi esprimere in termini di due qualunque delle altre proprietà intensive. In particolare, tutti i potenziali termodinamici devono potersi esprimere in funzione di due sole variabili indipendenti.

Per determinare esplicitamente le relazioni che intercorrono tra i potenziali termodinamici, conviene partire da alcune forme differenziali particolarmente significative. Ad esempio, le relazioni (4.29) e (4.27) possono essere interpretate anche come espressioni differenziali, rispettivamente, dell'energia interna

$$du = T ds - p dv \quad (4.53)$$

e dell'entalpia

$$dh = T ds + v dp \quad (4.54)$$

Analogamente, le definizioni dell'energia libera di Helmholtz

$$f = u - Ts \quad (4.55)$$

e dell'entalpia libera di Gibbs

$$g = h - Ts \quad (4.56)$$

portano, rispettivamente, alle forme differenziali

$$df = du - T ds - s dT = -p dv - s dT \quad (4.57)$$

e

$$dg = dh - T ds - s dT = v dp - s dT \quad (4.58)$$

dove si è tenuto conto delle (4.53) e (4.54).

In base a ben note proprietà dei differenziali esatti, le relazioni (4.53), (4.54), (4.57) e (4.58) possono essere scritte anche nelle forme equivalenti

$$du = T ds - p dv = \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right)_v ds + \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_s dv \quad (4.59)$$

$$dh = T ds + v dp = \left( \frac{\partial h}{\partial s} \right)_p ds + \left( \frac{\partial h}{\partial p} \right)_s dp \quad (4.60)$$

$$df = -p dv - s dT = \left( \frac{\partial f}{\partial v} \right)_T dv + \left( \frac{\partial f}{\partial T} \right)_v dT \quad (4.61)$$



e

$$dg = v dp - s dT = \left(\frac{\partial g}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)_p dT \quad (4.62)$$

Dal confronto tra il primo ed il secondo membro delle Eq. (4.59) - (4.62) si ottiene

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_v = T = \left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)_p \quad (4.63)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_s = -p = \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_T \quad (4.64)$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_s = v = \left(\frac{\partial g}{\partial p}\right)_T \quad (4.65)$$

e

$$\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_v = -s = \left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)_p \quad (4.66)$$

A questo punto si può osservare che i potenziali termodinamici  $u$ ,  $h$ ,  $f$  e  $g$  sono dei differenziali esatti, esprimibili nella forma generale

$$d\phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_x dy = M(x,y)dx + N(x,y)dy \quad (4.67)$$

dove

$$\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_y\right]_x = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_x\right]_y \Rightarrow \left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)_y \quad (4.68)$$

poiché le derivate parziali miste sono uguali. Applicando questo risultato alle Eq. (4.59) - (4.62), si ottengono le relazioni di Maxwell

$$\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_s = -\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_v \quad (4.69)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s = \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_p \quad (4.70)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T \quad (4.71)$$

e

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \quad (4.72)$$

Per facilitare la memorizzazione, le relazioni di Maxwell possono essere schematizzate nella maniera seguente

$$\left[\frac{\partial(\text{var. mecc. } i)}{\partial(\text{var. term. } k)}\right]_{\text{var. mecc. } j} = \left[\frac{\partial(\text{var. term. } \ell)}{\partial(\text{var. mecc. } j)}\right]_{\text{var. term. } k} \quad (4.73)$$

dove si permuta  $i, j = 1, 2$  tra le due variabili meccaniche (pressione e volume specifico) e  $k, \ell = 1, 2$  tra le due variabili termiche (temperatura ed entropia), mentre il segno (-) compare quando le derivate parziali coinvolgono le coppie  $(T, v)$  e  $(p, s)$ .

Nei paragrafi che seguono si mostrerà come le relazioni di Maxwell consentano d'esprimere entropia, energia interna ed entalpia in funzione delle variabili pressione, volume specifico e temperatura.

#### 4.9.1 Temperatura e Volume Specifico come Variabili Indipendenti

Per valutare le differenze d'entropia tra due stati, in funzione di temperatura e volume specifico, si parte dall'espressione

$$ds = \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_v dT + \left( \frac{\partial s}{\partial v} \right)_T dv \quad (4.74)$$

nella quale, in base alla (4.27), si ha

$$\left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_v = \frac{1}{T} \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v = \frac{c_v}{T} \quad (4.75)$$

Pertanto, tenuto conto della (4.71), si arriva all'espressione

$$ds = \frac{c_v}{T} dT + \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v dv \quad (4.76)$$

che, integrata tra uno stato di riferimento e lo stato generico, fornisce

$$s - s_0 = \int_{T_0}^T \frac{c_v}{T} dT + \int_{v_0}^v \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v dv \quad (4.77)$$

mentre, nel caso particolare di fluidi incomprimibili, porge di nuovo la (4.34).

Per valutare le variazioni d'energia interna si parte dalla relazione (4.53) e si tiene conto della (4.76), scrivendo

$$\begin{aligned} du = T ds - p dv &= \left[ c_v dT + T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v dv \right] - p dv \\ &= c_v dT + \left[ T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v - p \right] dv \end{aligned} \quad (4.78)$$

L'Eq. (4.78), integrata tra lo stato di riferimento ed uno stato generico, fornisce

$$u - u_0 = \int_{T_0}^T c_v dT + \int_{v_0}^v \left[ T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v - p \right] dv \quad (4.79)$$

mentre, nel caso particolare di fluidi incomprimibili, porge di nuovo la (3.57).

Naturalmente, le relazioni soprariportate non sono le uniche espressioni che coinvolgono le variabili indipendenti temperatura e volume specifico. Esse tuttavia sono le più interessanti ai fini di questo corso e, infatti, saranno richiamate più volte nei capitoli che seguono.

#### 4.9.2 Temperatura e Pressione come Variabili Indipendenti

Per valutare le differenze d'entropia tra due stati, in funzione di temperatura e pressione, si parte dalla scrittura

$$ds = \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_p dT + \left( \frac{\partial s}{\partial p} \right)_T dp \quad (4.80)$$

nella quale, in base alla (4.29), si ha

$$\left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{T} \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p = \frac{c_p}{T} \quad (4.81)$$

Pertanto, tenuto conto della (4.72), si arriva all'espressione

$$ds = \frac{c_p}{T} dT - \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dp \quad (4.82)$$

che, integrata tra lo stato di riferimento ed uno stato generico, fornisce

$$s - s_0 = \int_{T_0}^T \frac{c_p}{T} dT - \int_{p_0}^p \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dp \quad (4.83)$$

Per valutare le variazioni d'entalpia si parte dalla relazione (4.54) e si tiene conto della (4.82), scrivendo

$$\begin{aligned} dh &= T ds + v dp = \left[ c_p dT - T \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \right] dp + v dp \\ &= c_p dT - \left[ T \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p - v \right] dp \end{aligned} \quad (4.84)$$

L'Eq. (4.84), integrata tra lo stato di riferimento ed uno stato generico, fornisce

$$h - h_0 = \int_{T_0}^T c_p dT - \int_{p_0}^p \left[ T \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p - v \right] dp \quad (4.85)$$

mentre, nel caso particolare di fluidi incomprimibili, porge di nuovo la (3.59).

Naturalmente, le relazioni soprariportate non sono le uniche espressioni ricavabili a partire dalle variabili indipendenti temperatura e pressione. Esse tuttavia sono le più interessanti ai fini di questo corso ed, infatti, saranno richiamate più volte nei capitoli che seguono.

### Esempio 4.13

Mantenendo costante la temperatura, si valutino le variazioni di  $c_v$  e  $c_p$  in funzione, rispettivamente, del volume specifico e della pressione.

#### Soluzione

Per valutare le variazioni, con il volume specifico, di  $c_v$  si parte dalla relazione (4.75) e si tiene conto delle (4.68) e (4.71), scrivendo

$$\left[ \frac{\partial(c_v / T)}{\partial v} \right]_T = \left[ \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_v \right]_T = \left[ \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial s}{\partial v} \right)_T \right]_v = \left[ \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \right]_v$$

ovvero

$$\left(\frac{\partial c_v}{\partial v}\right)_T = T \left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_v$$

Per valutare le variazioni, con la pressione, di  $c_p$  si parte dalla relazione (4.81) e si tiene conto delle (4.68) e (4.72), scrivendo

$$\left[\frac{\partial(c_p / T)}{\partial p}\right]_T = \left[\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p\right]_T = \left[\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T\right]_p = -\left[\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p\right]_p$$

ovvero

$$\left(\frac{\partial c_p}{\partial p}\right)_T = -T \left(\frac{\partial^2 v}{\partial T^2}\right)_p$$

Le espressioni qui ricavate saranno utilizzate nel prossimo capitolo.

## 4.10 CONCLUSIONI

In questo capitolo si è formulato il secondo principio della termodinamica, e si è dimostrata l'equivalenza tra i due enunciati di Clausius e Kelvin-Planck. Si sono poi introdotti i concetti di reversibilità ed irreversibilità e si è dimostrato il teorema di Carnot, relativo ai rendimenti dei cicli bitermici reversibili. L'estensione dei risultati ottenuti ad un ciclo reversibile generico ha consentito d'arrivare alla definizione d'entropia, mentre l'analisi di un ciclo irreversibile generico ha portato alla formulazione della disuguaglianza di Clausius. Si è poi espresso il primo principio della termodinamica facendo riferimento ai parametri interni del sistema e si sono illustrati i bilanci entropici validi per i sistemi chiusi ed i sistemi aperti. A conclusione del capitolo, sulla base della teoria matematica dei potenziali, si sono ricavate le relazioni di Maxwell dimostrando che proprietà termodinamiche difficilmente misurabili, come entropia, energia interna ed entalpia, possono venir espres-

se in funzione di variabili come pressione, volume specifico e temperatura, più suscettibili di misure dirette. Le relazioni ricavate in questo capitolo costituiranno la base per la determinazione delle proprietà termodinamiche di gas e vapori.

---

# CAPITOLO 5

## GAS IDEALI

---

### 5.1 GENERALITÀ

Nel capitolo precedente si è visto come due proprietà intensive bastino a specificare lo stato termodinamico di un sistema costituito da un'unica sostanza presente con una sola fase. Da ciò si deduce, ad esempio, che le tre proprietà più facilmente misurabili in un gas, cioè pressione, volume specifico e temperatura, sono necessariamente legate da una relazione funzionale. La relazione che lega tra loro pressione, volume specifico e temperatura di un gas è detta equazione di stato.

In questo capitolo sono definiti "ideali" i gas che seguono una particolare equazione di stato. Poi, in base a quest'equazione, vengono espresse le proprietà termodinamiche dei gas ideali e le loro relazioni durante le più importanti trasformazioni di interesse tecnico. Infine, quale applicazione pratica, vengono analizzati gli impianti di compressione ed i cicli funzionali dei compressori alternativi.

### 5.2 EQUAZIONE DI STATO DEI GAS IDEALI

Come si è già osservato, i gas ideali sono costituiti da molecole, prive di un volume proprio, che non esercitano tra loro alcuna azione attrattiva o repulsiva. Dal punto di vista pratico, il modello di gas ideale rappresenta abbastanza bene il comportamento dei gas reali quando la pressione è relativamente bassa (e perciò le molecole sono distanziate tra loro), o quando la



temperatura è relativamente alta (e perciò gli effetti inerziali prevalgono sugli effetti d'attrazione e repulsione). In base alla teoria cinetica, si può dimostrare che i gas ideali seguono l'equazione di stato

$$pV = n\bar{R}T \quad (5.1)$$

dove  $\bar{R}$  gioca il ruolo di costante universale. Di conseguenza, in termodinamica è definito ideale qualunque gas nel quale pressione  $p$ , volume  $V$ , numero di moli  $n$  e temperatura assoluta  $T$  siano legati dalla relazione (5.1).

La costante universale non dipende dal tipo di gas considerato e quindi, per una temperatura fissata, il valore del primo membro dell'Eq. (5.1) è determinato soltanto dal numero di moli presenti nel volume  $V$  ovvero, in ultima analisi, dal numero di molecole del sistema. Per calcolare il valore della costante universale basta allora stimare il volume occupato da una chilomole di un qualunque gas a comportamento ideale, in ben definite condizioni di pressione e temperatura. Poiché 1 kmol di gas ideale occupa 22,414 m<sup>3</sup> alla pressione di 1 atm (= 101,325 kPa) ed alla temperatura di 273,15 K, si ricava

$$\bar{R} = \frac{pV}{nT} = \frac{101,325 \cdot 22,414}{1 \cdot 273,15} = 8,314 \frac{\text{kJ}}{\text{kmol K}} = 8314 \frac{\text{J}}{\text{kmol K}} \quad (5.2)$$

Dividendo entrambi i membri della (5.1) per  $n$ , si ottiene

$$p\bar{v} = \bar{R}T \quad (5.3)$$

dove

$$\bar{v} = V/n \quad (5.4)$$

è il volume molare, espresso in metri cubi per chilomole [m<sup>3</sup>/kmol]. Analogamente dividendo entrambi i membri della (5.1) per la massa  $m$ , valutata come prodotto del numero di moli  $n$  per la massa molare  $M$ , si ottiene

$$p \frac{V}{nM} = \frac{\bar{R}}{M} T \quad (5.5)$$

L'Eq. (5.5) si trova scritta, di solito, nella forma

$$p v = R T \quad (5.6)$$

dove

$$v = \frac{V}{nM} = \frac{V}{m} \quad (5.7)$$

è il volume specifico, mentre

$$R = \frac{\bar{R}}{M} \quad (5.8)$$

è la costante del gas considerato, generalmente espressa in joule, o chilojoule, per chilogrammo e kelvin, cioè [J/(kg K)] o [kJ/(kg K)]. Infine, moltiplicando i due membri dell'Eq. (5.6) per la massa  $m$ , si ottiene un'altra relazione d'uso comune

$$p V = m R T \quad (5.9)$$

Si può dimostrare che, nell'ipotesi di validità delle equazioni di stato dei gas ideali, l'energia interna e l'entalpia sono funzioni della sola temperatura. In tal caso, dalla definizione di calore specifico a volume costante, si ha

$$c_v = \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v = \frac{d u}{d T} \quad (5.10)$$

ed integrando tra uno stato di riferimento ed uno stato generico, si ottiene

$$u - u_o = \int_{T_0}^T c_v(T) d T \quad (5.11)$$

Analogamente, dalla definizione di calore specifico a pressione costante, si ha

$$c_p = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p = \frac{dh}{dT} \quad (5.12)$$

ed integrando tra uno stato di riferimento ed uno stato generico, si ottiene

$$h - h_o = \int_{T_0}^T c_p(T) dT \quad (5.13)$$

Ovviamente, nelle Eq. (5.11) e (5.13), i calori specifici non dipendenti dalla temperatura possono essere portati fuori del segno d'integrale, semplificando ulteriormente le relazioni ottenute. Di solito, si sceglie  $u_0 = h_0 = 0$  per  $T_0 = 273,15$  K e in questo modo, una volta noti i calori specifici, le (5.11) e (5.13) consentono di calcolare agevolmente i valori relativi di  $u$  ed  $h$ . Non va tuttavia dimenticato che la scelta di un riferimento arbitrario, molto comoda ai fini pratici, può essere scorretta quando energia interna ed entalpia compaiono in valore assoluto, e non come differenze, nella stessa relazione. In quest'ultimo caso, conviene eliminare l'entalpia, o l'energia interna, dall'espressione algebrica tenendo conto della definizione:  $h = u + pv$ . Infatti, energia interna ed entalpia possono essere contemporaneamente uguali a zero in uno stato di riferimento solo se, in tale stato, si ha  $p_0v_0 = 0$  ed, in base alla (5.6), ciò si verifica solo alla temperatura di 0 K.

In genere, l'energia interna specifica e l'entalpia specifica di un gas ideale sono espresse in joule, o chilojoule, per chilogrammo, cioè [J/kg] o [kJ/kg]. Di conseguenza, i corrispondenti valori molari  $\bar{u}$  e  $\bar{h}$  sono espressi in joule, o chilojoule, per chilomole, cioè [J/kmol] o [kJ/kmol], e sono ottenuti moltiplicando per  $M$  i valori riferiti all'unità di massa.

### Esempio 5.1

Un recipiente del volume di  $3 \text{ m}^3$  contiene 12 kg di azoto alla pressione di

0,4 MPa. Nell'ipotesi che l'azoto si comporti come un gas ideale, si trovi la temperatura  $T$ .

*Soluzione*

Poiché l'azoto ha massa molare  $M = 28,01$  kg/kmol, dalla definizione (5.8) si ha

$$R = \frac{\bar{R}}{M} = \frac{8,314}{28,01} = 0,2968 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}$$

Di conseguenza, dall'Eq. (5.9) risulta

$$T = \frac{pV}{mR} = \frac{400 \cdot 3}{12 \cdot 0,296812} = 336,9 \text{ K}$$

In alternativa, sarebbe stato possibile calcolare il volume specifico

$$v = \frac{V}{m} = \frac{3}{12} = 0,25 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$$

ed utilizzare la relazione (5.6), ovvero calcolare in sequenza il numero di moli

$$n = \frac{m}{M} = \frac{12}{28,01} = 0,4284 \text{ kmol}$$

il volume specifico molare

$$\bar{v} = \frac{V}{n} = \frac{3}{0,4284} = 7,003 \frac{\text{m}^3}{\text{kmol}}$$

ed utilizzare la relazione (5.3).

**Esempio 5.2**

Si esprimano l'energia interna e l'entalpia di un gas ideale, nell'ipotesi che i

calori specifici non dipendano dalla temperatura.

*Soluzione*

Se si pone  $u_0 = h_0 = 0$  per  $T_0 = 273,15 \text{ K}$  ( $= 0 \text{ }^\circ\text{C}$ ) nelle Eq. (5.11) e (5.13), scritte per calori specifici indipendenti dalla temperatura, si ha

$$u = c_v(T - T_0) = c_v t$$

e

$$h = c_p(T - T_0) = c_p t$$

dove  $t$  indica la temperatura relativa espressa in gradi celsius.

Tuttavia nell'analisi dei sistemi di riempimento, illustrata al Paragrafo 3.4.4, si scriverà la (3.30) nella forma

$$u_f = c_v t_f = h_e = u_e + p_e v_e = c_v t_e + p_e v_e$$

ottenendo così la relazione corretta

$$c_v(t_f - t_e) = p_e v_e$$

e non la relazione

$$u_f = c_v t_f = h_e = c_p t_e$$

sbagliata in quanto dipendente da una temperatura di riferimento  $T_0 = 273,15 \text{ K}$  ( $= 0 \text{ }^\circ\text{C}$ ) scelta in modo arbitrario.

Sarebbe stato invece possibile utilizzare i valori assoluti dell'energia interna e dell'entalpia specifiche, scrivendo

$$u_f = c_v T_f = h_e = c_p T_e$$

in quanto, per un gas ideale, si ha

$$p_0 v_0 = R T_0 = 0$$

nello stato di riferimento  $T_0 = 0 \text{ K}$ .

### Esempio 5.3

Si dimostri che, nelle ipotesi di validità dell'Eq. (5.6), energia interna ed entalpia di un gas ideale dipendono solo dalla temperatura.

#### Soluzione

La dimostrazione segue immediatamente dalle considerazioni svolte nella Sezione 4.9. Sostituendo la (5.6) nell'espressione generale dell'energia interna in funzione di temperatura e volume specifico, si ottiene infatti

$$\begin{aligned} u - u_0 &= \int_{T_0}^T c_v dT + \int_{v_0}^v \left[ T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v - p \right] dv \\ &= \int_{T_0}^T c_v dT + \int_{v_0}^v \left( T \frac{R}{v} - p \right) dv = \int_{T_0}^T c_v dT \end{aligned}$$

Analogamente, sostituendo la (5.6) nell'espressione generale dell'entalpia in funzione di temperatura e pressione, si ha

$$\begin{aligned} h - h_0 &= \int_{T_0}^T c_p dT + \int_{p_0}^p \left[ T \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p - v \right] dp \\ &= \int_{T_0}^T c_p dT + \int_{p_0}^p \left( T \frac{R}{p} - v \right) dp = \int_{T_0}^T c_p dT \end{aligned}$$

Inoltre, sostituendo la (5.6) nelle espressioni delle derivate dei calori specifici, si ottiene

$$\left( \frac{\partial c_v}{\partial v} \right)_T = T \left( \frac{\partial^2 p}{\partial T^2} \right)_v = 0$$

e

$$\left(\frac{\partial c_p}{\partial p}\right)_T = -T \left(\frac{\partial^2 v}{\partial T^2}\right)_p = 0$$

Pertanto, i calori specifici  $c_v$  e  $c_p$  e, di conseguenza, l'energia interna e l'entalpia dei gas ideali possono dipendere, al più, dalla temperatura.

### 5.2.1 Calori Specifici dei Gas Ideali

Dalle Eq. (5.10) e (5.12) e dalla definizione d'entalpia si ottiene

$$dh = c_p dT = d(u + pv) = c_v dT + R dT \quad (5.14)$$

ovvero

$$c_p = c_v + R \quad (5.15)$$

Pertanto, indicando con

$$k = \frac{c_p}{c_v} \quad (5.16)$$

il rapporto, sempre maggiore di 1, tra il calore specifico a pressione costante ed il calore specifico a volume costante, si arriva immediatamente alle espressioni

$$c_v = \frac{1}{k-1} R \quad (5.17)$$

e

$$c_p = \frac{k}{k-1} R \quad (5.18)$$

In base alla teoria cinetica, l'energia interna specifica di un gas ideale è esprimibile come

$$u = \frac{1}{2} \ell RT \quad (5.19)$$

dove  $\ell$  è il numero di gradi di libertà della molecola ed  $RT/2$  è l'energia cinetica associata ad ogni grado di libertà. Di conseguenza risulta anche

$$c_v = \frac{du}{dT} = \frac{\ell}{2}R \quad (5.20)$$

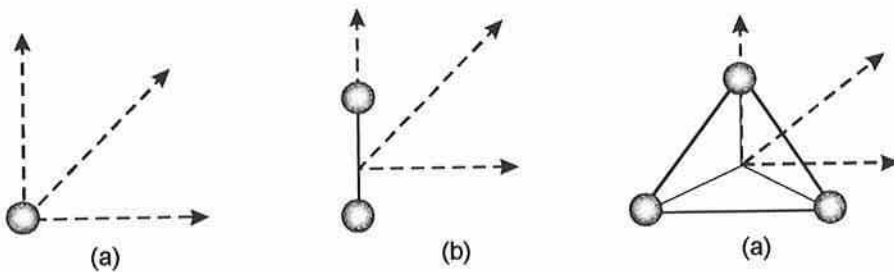
$$c_p = c_v + R = \frac{\ell+2}{2}R \quad (5.21)$$

e

$$k = \frac{c_p}{c_v} = \frac{\ell+2}{\ell} \quad (5.22)$$

Per i gas monoatomici, e per i gas pluriatomici a temperature non troppo elevate, i valori di  $\ell$  dipendono solo dal numero di atomi della molecola, come indicato in Fig. 5.1. Così si ha

- $\ell = 3$ , corrispondenti a tre traslazioni, per i gas monoatomici (ad esempio: elio, neon e argon);
- $\ell = 5$ , corrispondenti a tre traslazioni e due rotazioni, per i gas biatomici (ad esempio: idrogeno, ossigeno e azoto) ed
- $\ell = 6$ , corrispondenti a tre traslazioni e tre rotazioni, per i gas con tre o più atomi (ad esempio: vapor d'acqua, anidride carbonica e metano).



**Figura 5.1** Gradi di libertà: (a)  $\ell = 3$  traslazioni per le molecole monoatomiche, (b)  $\ell = 5$  (3 traslazioni e 2 rotazioni) per le molecole biatomiche e (c)  $\ell = 6$  (3 traslazioni e 3 rotazioni) per le molecole con tre o più atomi.



In base alla (5.22) si ha quindi:  $k = 1, \bar{6}$  per i gas monoatomici,  $k = 1,4$  per i gas biatomici e  $k = 1, \bar{3}$  per i gas triatomici. A temperature elevate, la definizione geometrica dei gradi di libertà resta valida solo per gas monoatomici, in quanto le molecole con due o più atomi diventano sede di moti vibratori. Questi moti comportano un aumento dei gradi di libertà e, di conseguenza, provocano un aumento dei calori specifici con la temperatura.

Per concludere si vuol osservare che, essendo i calori specifici  $c_v$  e  $c_p$  espressi in joule, o chilojoule, per chilogrammo e kelvin, cioè  $[J/(kg K)]$  o  $[kJ/(kg K)]$ , i valori molari  $\bar{c}_v$  e  $\bar{c}_p$ , sono espressi in joule, o chilojoule, per chilomole e kelvin, cioè  $[J/(kmol K)]$  o  $[kJ/(kmol K)]$ , e sono ottenuti moltiplicando per  $M$  i corrispondenti valori riferiti all'unità di massa.

#### Esempio 5.4

Si calcolino i calori specifici dell'azoto, nell'ipotesi che l'azoto si comporti come un gas ideale a calori specifici costanti.

#### Soluzione

Poiché l'azoto è un gas biatomico caratterizzato dalla costante  $R = 0,2968$   $kJ/(kg K)$ , dalle (5.16) - (5.18) si ha

$$c_v = \frac{1}{k-1} R = \frac{1}{1,4-1} 0,2968 = 0,7420 \frac{kJ}{kg K}$$

$$\bar{c}_v = M c_v = 28,01 \cdot 0,7420 = 20,78 \text{ kJ} / (\text{kmol K})$$

$$c_p = k c_v = 1,4 \cdot 0,7420 = 1,039 \text{ kJ} / (\text{kg K})$$

$$\bar{c}_p = M c_p = 28,01 \cdot 1,039 = 29,10 \text{ kJ} / (\text{kmol K})$$

Sostituendo i valori di  $c_v$  e  $c_p$  nelle Eq. (5.11) e (5.13), si ricavano immediatamente i valori dell'energia interna e dell'entalpia.

### 5.3 ENTROPIA DEI GAS IDEALI

L'entropia dei gas ideali può essere determinata in base alle relazioni generali ricavate nella Sezione 4.9 od, in alternativa, può essere calcolata direttamente utilizzando le espressioni del primo principio riferite ai parametri interni. Ad esempio, dall'espressione differenziale (4.29) del primo principio, si ha

$$T ds = du + p dv = c_v dT + \frac{RT}{v} dv \quad (5.23)$$

e quindi risulta

$$ds = c_v \frac{dT}{T} + R \frac{dv}{v} = c_v \left[ \frac{dT}{T} + (k-1) \frac{dv}{v} \right] \quad (5.24)$$

Integrando l'Eq. (5.24) tra uno stato di riferimento ed uno stato generico, ed assumendo che  $c_v$  e  $k$  non dipendano dalla temperatura, si ottiene

$$s - s_0 = c_v \ln \frac{T}{T_0} + R \ln \frac{v}{v_0} = c_v \ln \left[ \frac{T}{T_0} \left( \frac{v}{v_0} \right)^{k-1} \right] \quad (5.25)$$

Nell'Eq. (5.25) si è mantenuta la corrispondenza con l'Eq. (5.24), in quanto sia l'espressione al secondo membro sia l'espressione al terzo membro sono utilizzate nella pratica.

Analogamente, dall'espressione differenziale (4.27) del primo principio, si ha

$$T ds = dh - v dp = c_p dT - \frac{RT}{p} dp \quad (5.26)$$

e quindi risulta

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} = c_p \left[ \frac{dT}{T} - \left( \frac{k-1}{k} \right) \frac{dp}{p} \right] \quad (5.27)$$

Integrando l'Eq. (5.27) tra uno stato di riferimento ed uno stato generico, ed assumendo che  $c_p$  e  $k$  non dipendano dalla temperatura, si ottiene

$$s - s_0 = c_p \ln \frac{T}{T_0} - R \ln \frac{p}{p_0} = c_p \ln \left[ \frac{T}{T_0} \left( \frac{p}{p_0} \right)^{(1-k)/k} \right] \quad (5.28)$$

Nell'Eq. (5.28) si è mantenuta la corrispondenza con l'Eq. (5.27), in quanto sia l'espressione al secondo membro sia l'espressione al terzo membro sono utilizzate nella pratica.

Infine, sostituendo nell'Eq. (5.25) la relazione

$$\frac{T}{T_0} = \frac{pv}{p_0 v_0} \quad (5.29)$$

si ottiene l'espressione dell'entropia in funzione di volume specifico e pressione

$$s - s_0 = c_v \ln \left[ \frac{p}{p_0} \left( \frac{v}{v_0} \right)^k \right] \quad (5.30)$$

Di solito, si pone  $s_0 = 0$  per  $T_0 = 273,15$  K,  $p_0 = 101,325$  kPa e  $v_0 = RT_0 / p_0$  e si misura l'entropia specifica  $s$  in joule, o chilojoule, per chilogrammo e kelvin, cioè [J/(kg K)] o [kJ/(kg K)]. Di conseguenza, i valori dell'entropia molare  $\bar{s}$  sono espressi in joule, o chilojoule, per chilomole e kelvin, cioè [J/(kmol K)] o [kJ/(kmol K)], e sono ottenuti moltiplicando per  $M$  i corrispondenti valori riferiti all'unità di massa.

### Esempio 5.5

Si calcoli il valore dell'entropia specifica dell'azoto, alla temperatura di 400

K ed alla pressione di 200 kPa, nell'ipotesi che l'azoto si comporti come un gas ideale a calori specifici costanti.

### Soluzione

Facendo riferimento ai valori calcolati in precedenza e ponendo  $s_0 = 0$  per  $T_0 = 273,15$  K e  $p_0 = 101,325$  kPa, dalla (5.28) si ha

$$s = c_p \ln \frac{T}{T_0} - R \ln \frac{p}{p_0} = 1,039 \ln \frac{400}{273,15} - 0,2968 \ln \frac{200}{101,325}$$

$$= 0,3963 - 0,2018 = 0,1945 \text{ kJ / (kg K)}$$

Procedimenti analoghi, fondati sull'impiego della (5.25) e della (5.30), sono utilizzati nella valutazione dell'entropia in funzione di temperatura e volume specifico, o di pressione e volume specifico. Ovviamente, è appena il caso di far notare che l'entropia dei gas ideali, a differenza dell'energia interna e dell'entalpia, non può venire espressa in funzione della sola temperatura.

## 5.4 TRASFORMAZIONI DEI GAS IDEALI

In questa sezione sono ricavate le principali relazioni utilizzate nell'analisi dei processi che coinvolgono gas ideali. Nelle applicazioni del primo principio si fa riferimento, a seconda dei casi, a sistemi chiusi od a sistemi aperti in regime monodimensionale stazionario.

### 5.4.1 Isocore

Si dicono isocore le trasformazioni in cui il volume specifico si mantiene costante. La relazione (5.25) consente il tracciamento delle trasformazioni isocore sul diagramma  $(T, s)$  e l'andamento logaritmico risultante è illu-

strato nella Fig. 5.2 (a). Si noti che, in base all'Eq. (5.25), le isocore sono curve parallele sul diagramma  $(T, s)$ . Infatti, la distanza orizzontale tra due qualunque isocore  $v_1$  e  $v_2$  resta costante in quanto, per due punti sulla stessa isoterma, si ha sempre

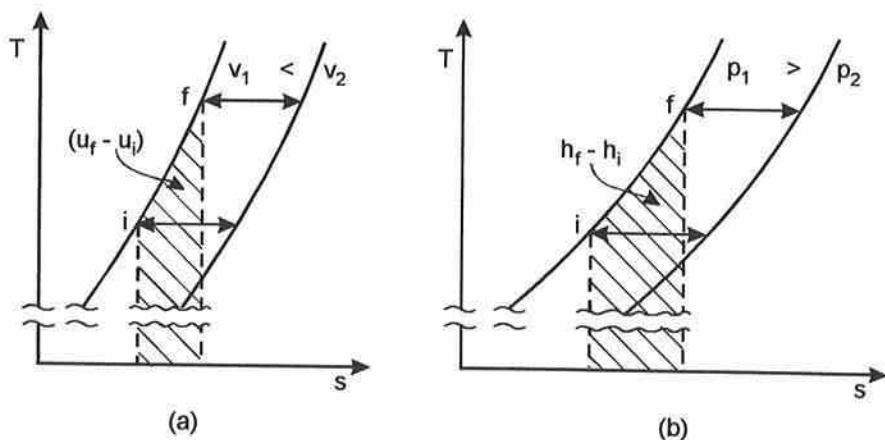
$$s_2 - s_1 = R \ln \frac{v_2}{v_1} = c_v \ln \left( \frac{v_2}{v_1} \right)^{k-1} \quad (5.31)$$

Il primo principio della termodinamica, per una trasformazione isocora internamente reversibile, può essere scritto nella forma

$$T ds = dQ = du = c_v dT \quad (5.32)$$

e quindi, integrando la (5.32) tra uno stato iniziale  $i$  ed uno stato finale  $f$ , si ricava

$$u_f - u_i = \int_{T_i}^{T_f} c_v dT = Q_{if} = \int_{s_i}^{s_f} T ds \quad (5.33)$$



**Figura 5.2** Piano  $(T, s)$ : (a) andamenti delle isocore e differenze di energia interna; (b) andamenti delle isobare e differenze di entalpia.

Pertanto, come evidenziato in Fig. 5.2 (a), la differenza d'energia interna tra due punti qualunque di un'isocora internamente reversibile è data dall'area sottostante al tratto di trasformazione che, sul diagramma  $(T, s)$ , congiunge i due punti stessi.

Nell'ipotesi di variazioni trascurabili d'energia cinetica e potenziale, il lavoro scambiato durante una trasformazione isocora internamente reversibile è uguale a zero per un sistema chiuso, mentre il lavoro tecnico scambiato è pari a

$$L'_{eu} = - \int_{p_e}^{p_u} v dp = v(p_e - p_u) \quad (5.34)$$

per un sistema aperto in regime stazionario monodimensionale.

#### 5.4.2 Isobare

Si dicono isobare le trasformazioni in cui la pressione si mantiene costante. La relazione (5.28) consente il tracciamento delle trasformazioni isobare sul diagramma  $(T, s)$  e l'andamento logaritmico risultante è illustrato nella Fig. 5.2 (b). Si noti che, in base all'Eq. (5.28), le isobare sono curve parallele sul diagramma  $(T, s)$ . Infatti, la distanza orizzontale tra due qualunque isobare  $p_1$  e  $p_2$  resta costante in quanto, per due punti sulla stessa isoterma, si ha sempre

$$s_2 - s_1 = -R \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right) = c_p \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{(1-k)/k} \quad (5.35)$$

Il primo principio della termodinamica, per una trasformazione isobara internamente reversibile, può essere scritto nella forma

$$T ds = dQ = dh = c_p dT \quad (5.36)$$

e quindi, integrando la (5.36) tra uno stato iniziale  $i$  ed uno stato finale  $f$ , si

ricava

$$h_f - h_i = \int_{T_i}^{T_f} c_p dT = Q_{if} = \int_{s_i}^{s_f} T ds \quad (5.37)$$

Pertanto, come evidenziato in Fig. 5.2 (b), la differenza d'entalpia tra due punti qualunque di un'isobara internamente reversibile è data dall'area sottostante al tratto di trasformazione che, sul diagramma  $(T, s)$ , congiunge i due punti stessi.

Nell'ipotesi di variazioni trascurabili d'energia cinetica e potenziale, il lavoro tecnico scambiato durante una trasformazione isobara internamente reversibile di un sistema aperto monodimensionale stazionario, è uguale a zero, mentre si ha

$$L_{if} = \int_{v_i}^{v_f} p dv = p(v_f - v_i) \quad (5.38)$$

per il lavoro scambiato da un sistema chiuso.

### 5.4.3 Isoterme

Si dicono isoterme le trasformazioni in cui la temperatura si mantiene costante. In questo caso, dall'equazione di stato (5.6) si ottiene

$$p v = p_i v_i = p_f v_f = RT = \text{cost} \quad (5.39)$$

dove  $i$  è lo stato iniziale ed  $f$  è lo stato finale.

La differenza d'entropia tra gli stati  $i$  ed  $f$  di un'isoterma, è esprimibile in base alle relazioni (5.25) e (5.28) ed alle proprietà dei logaritmi

$$s_f - s_i = c_v \ln \left( \frac{v_f}{v_i} \right)^{k-1} = R \ln \frac{v_f}{v_i} = c_p \ln \left( \frac{p_f}{p_i} \right)^{(1-k)/k} = R \ln \frac{p_i}{p_f} \quad (5.40)$$

Per trasformazioni isoterme internamente reversibili, le espressioni (4.29) e (4.27) del primo principio riferite ai parametri interni, forniscono

$$\begin{aligned} dQ &= T ds = du + p dv = c_v dT + p dv = p dv \\ &= dh - v dp = c_p dT - v dp = -v dp \end{aligned} \quad (5.41)$$

Dalla (5.41), nell'ipotesi che si abbia  $i = e$  ed  $f = u$ , si ricava

$$Q_{if} = \int_{v_i}^{v_f} p dv = RT \int_{v_i}^{v_f} \frac{dv}{v} = RT \ln \frac{v_f}{v_i} = -RT \ln \frac{p_f}{p_i} \quad (5.42)$$

per i sistemi chiusi, e

$$Q_{eu} = - \int_{p_e}^{p_u} v dp = -RT \int_{p_e}^{p_u} \frac{dp}{p} = -RT \ln \frac{p_u}{p_e} = RT \ln \frac{v_u}{v_e} = Q_{if} \quad (5.43)$$

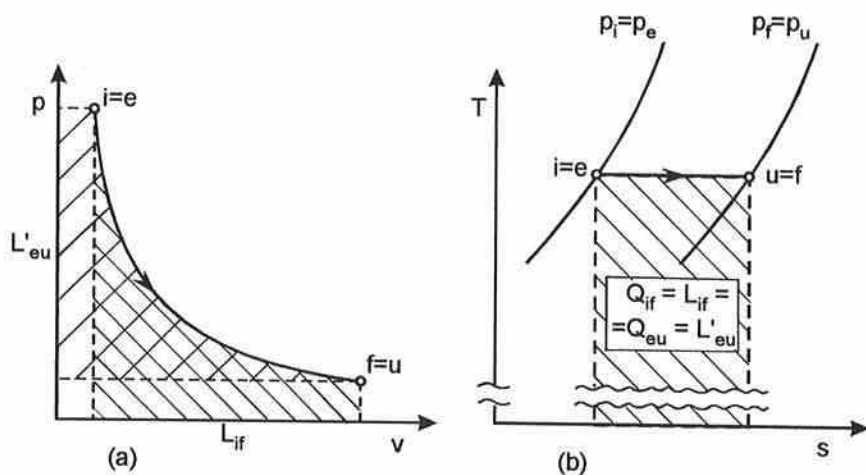
Attese le (5.42) e (5.43), in base al primo principio della termodinamica si ottiene

$$\begin{aligned} L_{if} &= Q_{if} - (u_i - u_f) = Q_{if} = RT \ln \frac{v_f}{v_i} = -RT \ln \frac{p_f}{p_i} \\ &= Q_{eu} = h_u - h_e + L'_{eu} \\ &= L'_{eu} = RT \ln \frac{v_u}{v_e} = -RT \ln \frac{p_u}{p_e} \end{aligned} \quad (5.44)$$

se le variazioni di energia cinetica e potenziale sono trascurabili. In tali ipotesi, come si può vedere anche dalla Fig. 5.3, il lavoro senza deflusso ed il lavoro con deflusso sono uguali tra loro ed uguali alle quantità di calore scambiate. Nella Fig. 5.3 (a), l'uguaglianza dei lavori corrisponde alla ben nota proprietà delle iperboli equilateri ( $p v = \text{cost}$ ) mentre, nella Fig. 5.3 (b), l'uguaglianza dei lavori deriva dalla (5.44) e dal significato fisico dell'area sottostante alla trasformazione.



A conclusione del paragrafo si vuol osservare che le espressioni (5.44) del lavoro avrebbero potuto essere ottenute anche integrando le definizioni:  $dL = p dv$  e  $dL' = -v dp$  come negli Esempi 2.1 e 2.4.



**Figura 5.3** Lavoro in trasformazioni isoterme reversibili: (a) diagramma  $(p, v)$  e (b) diagramma  $(T, s)$ .

### Esempio 5.6

Nell'ipotesi che siano trascurabili le variazioni d'energia cinetica e potenziale, si calcolino il lavoro ed il calore scambiati per unità di massa durante una trasformazione isoterma reversibile, alla temperatura di 300 K. Nella trasformazione l'azoto, assimilabile ad un gas a comportamento ideale, aumenta la sua pressione in modo tale che si abbia  $p_u / p_e = 5$ .

#### Soluzione

Poiché si ha  $R = 0,2968 \text{ kJ}/(\text{kg K})$ , si ottiene

$$Q_{eu} = L'_{eu} = -RT \ln \frac{p_u}{p_e} = -0,2968 \cdot 300 \ln 5 = -143 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

con riferimento, ad esempio, ad un sistema aperto monodimensionale sta-

zionario. Come risulta dal segno delle quantità scambiate, la compressione isoterma richiede una fornitura di lavoro ed una uguale, contemporanea asportazione di calore.

#### 5.4.4 Isoentropiche ed Adiabatiche

Poiché nelle trasformazioni internamente reversibili si ha

$$dQ = T ds \quad (5.45)$$

le trasformazioni isoentropiche sono adiabatiche e, viceversa, le trasformazioni adiabatiche internamente reversibili sono anche isoentropiche. Per  $s = \text{cost}$ , dalle Eq. (5.25), (5.28) e (5.30), valide per gas a calori specifici costanti, si ottiene in sequenza

$$T v^{k-1} = \text{cost} \quad (5.46)$$

$$T p^{(1-k)/k} = \text{cost} \quad (5.47)$$

e

$$p v^k = \text{cost} \quad (5.48)$$

In alternativa, sempre nell'ipotesi di calori specifici costanti, le relazioni (5.46) - (5.48) avrebbero potuto essere ricavate senza far ricorso alla nozione di entropia, utilizzando l'equazione di stato dei gas ideali ed il primo principio scritto per trasformazioni adiabatiche reversibili.

Per le trasformazioni adiabatiche, nell'ipotesi di variazioni trascurabili d'energia cinetica e potenziale, il primo principio della termodinamica può essere scritto nella forma

$$dL = -du = -c_v dT \quad (5.49)$$

per i sistemi chiusi, e nella forma

$$dL' = -dh = -c_p dT = -k c_v dT = k dL \quad (5.50)$$

per i sistemi aperti in regime stazionario monodimensionale. Nell'ipotesi aggiuntiva di calore specifico costante dalla (5.49), valida per sistemi chiusi, si ricava

$$\begin{aligned} L_{if} = u_i - u_f &= - \int_{T_i}^{T_f} c_v dT = c_v (T_i - T_f) = \frac{c_v}{R} (p_i v_i - p_f v_f) \\ &= \frac{1}{k-1} (p_i v_i - p_f v_f) = \frac{1}{k-1} p_i v_i \left( 1 - \frac{p_f v_f}{p_i v_i} \right) \end{aligned} \quad (5.51)$$

Se poi, oltre che adiabatiche, le trasformazioni sono anche isoentropiche, sostituendo la (5.48) nella (5.51) si ottiene

$$L_{if} = \frac{1}{k-1} p_i v_i \left[ 1 - \frac{p_f}{p_i} \left( \frac{p_f}{p_i} \right)^{-1/k} \right] = \frac{1}{k-1} p_i v_i \left[ 1 - \left( \frac{p_f}{p_i} \right)^{(k-1)/k} \right] \quad (5.52)$$

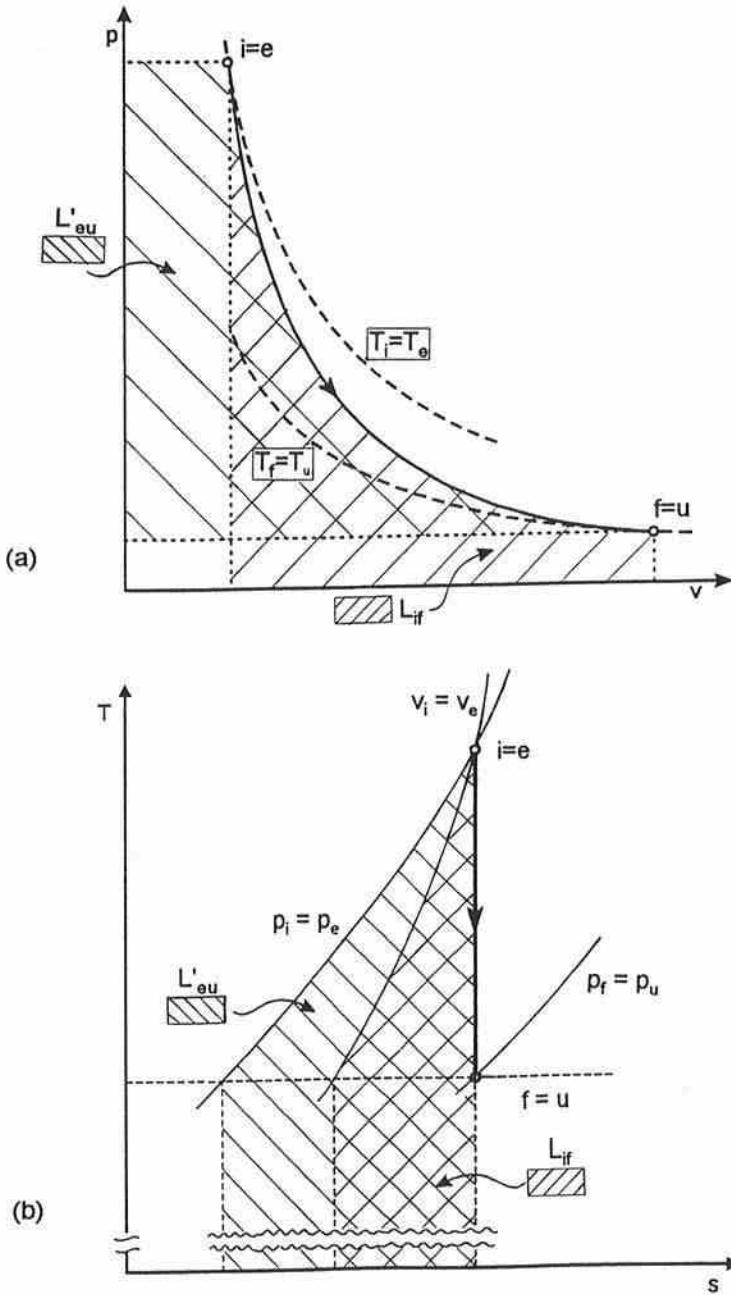
Analogamente, nell'ipotesi aggiuntiva di calore specifico costante, dalla (5.50), valida per sistemi aperti, si ricava l'espressione

$$L'_{eu} = h_e - h_u = c_p (T_e - T_u) = \frac{k}{k-1} p_e v_e \left( 1 - \frac{p_u v_u}{p_e v_e} \right) = k L_{if} \quad (5.53)$$

nella quale si è posto  $i = e$  ed  $f = u$ . Se poi, oltre che adiabatiche le trasformazioni sono anche isoentropiche, dalle (5.52) e (5.53) si ottiene

$$L'_{eu} = \frac{k}{k-1} p_e v_e \left[ 1 - \left( \frac{p_u}{p_e} \right)^{(k-1)/k} \right] \quad (5.54)$$

La relazione tra i lavori  $L_{if}$  ed  $L'_{eu}$  nelle trasformazioni adiabatiche reversibili, è illustrata nella Fig. 5.4. In Fig. 5.4 (a) i lavori corrispondono, in maniera intuitiva, alle aree individuate dalle trasformazioni, mentre in Fig. 5.4 (b) i lavori corrispondono alle aree associate, rispettivamente, alle differenze d'energia interna ( $u_i - u_f$ ) nei sistemi chiusi, ed alle differenze d'entalpia ( $h_e - h_u$ ) nei sistemi aperti.



**Figura 5.4** Lavoro in trasformazioni adiabatiche reversibili: (a) diagramma  $(p, v)$  e (b) diagramma  $(T, s)$ .

Nel diagramma  $(T, s)$  dei gas ideali, le linee ad energia interna costante ed a entalpia costante coincidono con le isoterme. Pertanto nella Fig. 5.4 (b), la differenza d'energia interna corrisponde all'area sottostante all'isocora  $v_i = v_e$ , compresa tra il punto a temperatura  $T_i$  ed il punto a temperatura  $T_f$ . Analogamente, la differenza d'entalpia corrisponde all'area sottostante all'isobara  $p_e = p_i$ , compresa tra il punto a temperatura  $T_e = T_i$  ed il punto a temperatura  $T_u = T_f$ .

A conclusione del paragrafo si vuol osservare che le espressioni (5.52) e (5.54) avrebbero potuto essere ottenute anche tenendo conto della (5.48) nell'integrazione delle definizioni:  $dL = p dv$  e  $dL' = -v dp$ .

### Esempio 5.7

Nell'ipotesi che siano trascurabili le variazioni d'energia cinetica e potenziale, si calcoli il lavoro specifico scambiato durante una trasformazione isoentropica monodimensionale stazionaria in un sistema aperto. Nella trasformazione l'azoto, assimilabile ad un gas a comportamento ideale, entra alla temperatura di 300 K ed aumenta la sua pressione in modo tale che si abbia  $p_u / p_e = 5$ .

### Soluzione

L'azoto è un gas biatomico per il quale si ha  $R = 0,2968 \text{ kJ}/(\text{kg K})$  e  $k = 1,4$ . Dall'equazione di stato si ottiene:  $p_e v_e = R T_e$  e quindi, per la soluzione del problema, basta applicare la relazione (5.54), scritta nella forma

$$L'_{eu} = \frac{k}{k-1} R T_e \left[ 1 - \left( \frac{p_u}{p_e} \right)^{(k-1)/k} \right]$$

$$= \frac{1,4}{0,4} \cdot 0,2968 \cdot 300 \left( 1 - 5^{0,4/1,4} \right) = -182 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Come si vede dal confronto con i risultati dell'Esempio 5.6, la compressione

isoentropica comporta una spesa di lavoro superiore a quella richiesta dalla compressione isoterma con le stesse condizioni d'entrata e lo stesso rapporto delle pressioni.

### Esempio 5.8

Si ricavino le relazioni (5.46) - (5.48) senza far ricorso alla nozione d'entropia.

#### Soluzione

Per una trasformazione adiabatica internamente reversibile di un gas ideale, si ha

$$du + dL = c_v dT + p dv = c_v dT + \frac{RT}{v} dv = c_v dT + \frac{(c_p - c_v)T}{v} dv = 0$$

da cui, dividendo per  $c_v$  ed integrando, nell'ipotesi di  $k = c_p/c_v$  costante, si ottiene

$$\int \frac{dT}{T} + (k-1) \int \frac{dv}{v} = \ln(Tv^{k-1}) + \text{cost} = 0$$

ovvero, la relazione (5.46). Sostituendo nella (5.46) l'equazione di stato e le espressioni dei calori specifici di un gas ideale, si possono ricavare anche le relazioni (5.47) e (5.48) senza fare ricorso alla definizione d'entropia.

### Esempio 5.9

Si dimostri l'equivalenza tra temperatura termodinamica e temperatura di gas ideale.

#### Soluzione

Si faccia riferimento al ciclo diretto di Carnot percorso dall'unità di massa di gas ideale, come schematizzato nella Fig. 5.5. Per la fornitura di calore

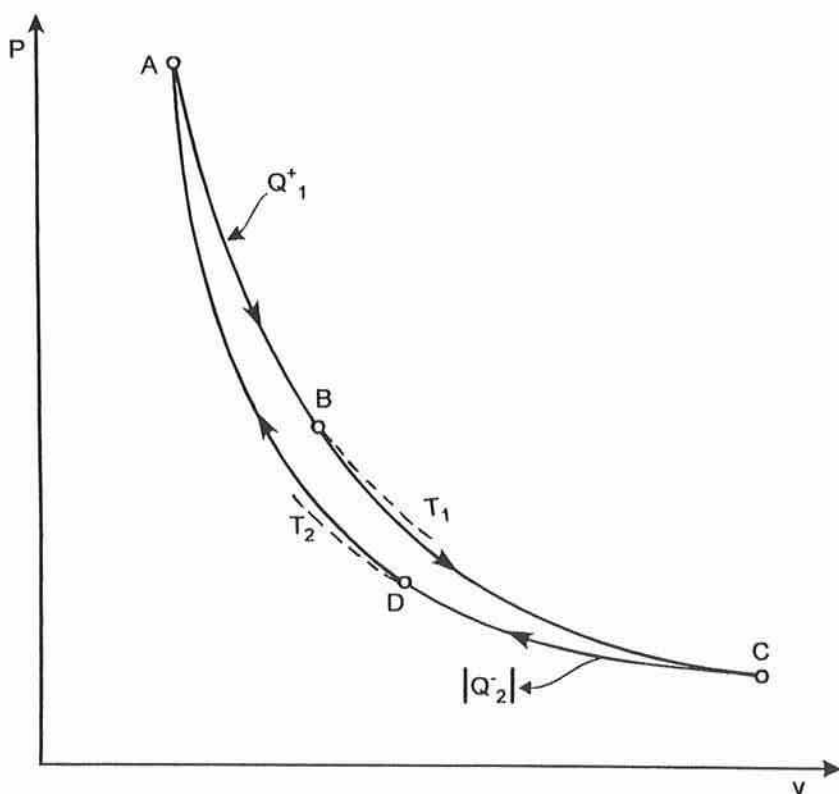
isoterma si ha

$$|Q_1| = Q_{AB}^+ = \int_{v_A}^{v_B} \frac{RT_1}{v} dv = RT_1 \ln \frac{v_B}{v_A}$$

mentre per la cessione di calore isoterma si ha

$$|Q_2| = -Q_{CD}^- = |Q_{CD}^-| = - \int_{v_C}^{v_D} \frac{RT_2}{v} dv = RT_2 \ln \frac{v_C}{v_D}$$

Per le trasformazioni adiabatiche reversibili, dall'Esempio 5.8 si ha



**Figura 5.5** Ciclo diretto di Carnot percorso da un gas ideale.

$$c_v \frac{dT}{T} + R \frac{dv}{v} = 0$$

per cui risulta

$$\int_{T_1}^{T_2} c_v \frac{dT}{T} = -R \int_{v_B}^{v_C} \frac{dv}{v} = R \ln \frac{v_B}{v_C}$$

nell'espansione, e

$$\int_{T_1}^{T_2} c_v \frac{dT}{T} = -R \int_{v_A}^{v_D} \frac{dv}{v} = R \ln \frac{v_A}{v_D}$$

nella compressione. Dividendo membro a membro le due relazioni precedenti, si ottiene

$$\ln \frac{v_B}{v_C} = \ln \frac{v_A}{v_D} \Rightarrow \frac{v_B}{v_A} = \frac{v_C}{v_D}$$

senza bisogno di ipotesi sulla costanza dei calori specifici. Pertanto, il rendimento del ciclo di Carnot, percorso da un gas ideale, è pari a

$$\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{|Q_1|} = 1 - \frac{R T_2 \ln(v_C / v_D)}{R T_1 \ln(v_B / v_A)} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

Tale relazione non richiede la definizione preliminare dell'entropia o della temperatura termodinamica, perché deriva direttamente dall'equazione di stato dei gas ideali e dal primo principio della termodinamica. Pertanto essa costituisce la dimostrazione del fatto che, in un ciclo di Carnot percorso da un gas ideale, si ha

$$\frac{|Q_1|}{|Q_2|} = \frac{T_1}{T_2}$$

dove  $T$  è la temperatura di gas ideale, come anticipato nel Capitolo 4.



### 5.4.5 Rendimenti Isoentropici

Molto spesso le espansioni e compressioni che hanno luogo nelle turbine e nei compressori reali possono essere considerate adiabatiche ma non isoentropiche, a causa dei fenomeni dissipativi sempre presenti nei processi tecnologici.

Le trasformazioni cui si fa riferimento, qualora fossero anche reversibili potrebbero essere rappresentate dai segmenti verticali  $\overline{eu'}$  in Fig. 5.6. In realtà, a causa dei fenomeni dissipativi, il punto finale è caratterizzato da un'entropia maggiore di quella del punto iniziale. Le trasformazioni adiabatiche reali sono quindi rappresentate dalle curve  $\overline{eu}$ , segnate a tratto in quanto non costituite da una successione di stati d'equilibrio.

Il rendimento isoentropico dell'espansione  $\eta_{ie}$  è dato dal rapporto tra il lavoro tecnico ottenuto nella trasformazione adiabatica reale ed il lavoro tecnico ottenibile nella trasformazione isoentropica. Poiché entrambe le trasformazioni sono adiabatiche, nell'ipotesi di variazioni trascurabili d'energia cinetica e potenziale, si ha

$$\eta_{ie} = \frac{L'_{eu}}{L'_{is}} = \frac{h_e - h_u}{h_e - h_{u'}} \quad (5.55)$$

Analogamente, il rendimento isoentropico della compressione  $\eta_{ic}$  è dato dal rapporto tra il lavoro tecnico che si potrebbe spendere nella trasformazione isoentropica ed il lavoro tecnico speso nella trasformazione adiabatica reale. Poiché entrambe le trasformazioni sono adiabatiche, nell'ipotesi di variazioni trascurabili d'energia cinetica e potenziale, si ha

$$\eta_{ic} = \frac{|L'_{is}|}{|L'_{eu}|} = \frac{h_{u'} - h_e}{h_u - h_e} \quad (5.56)$$

Le definizioni (5.55) e (5.56) valgono per tutti i fluidi. Tuttavia, se le

trasformazioni riguardano gas ideali nei quali possono essere trascurate le variazioni dei calori specifici con la temperatura, si ha anche

$$\eta_{ie} = \frac{h_e - h_u}{h_e - h_{u'}} = \frac{c_p(T_e - T_u)}{c_p(T_e - T_{u'})} = \frac{T_e - T_u}{T_e - T_{u'}} \quad (5.57)$$

e

$$\eta_{ic} = \frac{h_{u'} - h_e}{h_u - h_e} = \frac{c_p(T_{u'} - T_e)}{c_p(T_u - T_e)} = \frac{T_{u'} - T_e}{T_u - T_e} \quad (5.58)$$

Il lavoro tecnico ottenuto nell'espansione adiabatica reale è inferiore al lavoro ottenibile nella trasformazione isoentropica. La differenza

$$L'_{is} - L'_{eu} = (h_e - h_{u'}) - (h_e - h_u) = h_u - h_{u'} \quad (5.59)$$

è rappresentata dall'area segnata a tratteggio in Fig. 5.6 (a). Infatti, i due punti  $u$  ed  $u'$  si trovano sulla stessa isobara e quindi, integrando la (5.36), si ha

$$h_u - h_{u'} = \int_{s_{u'}}^{s_u} T ds \quad (5.60)$$

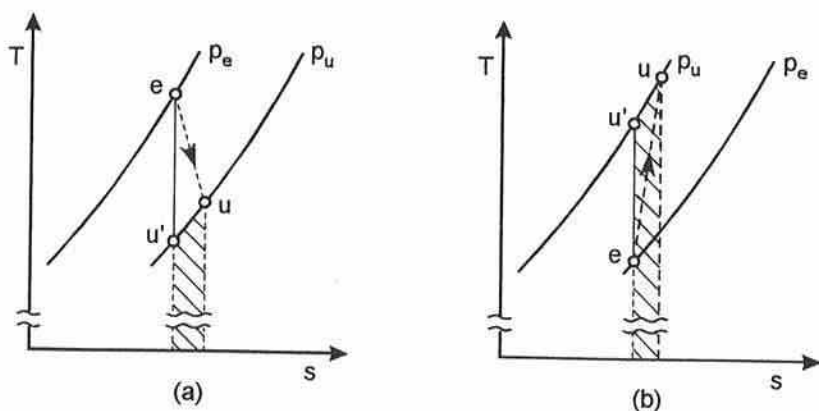
Analogamente, il lavoro tecnico speso nella compressione adiabatica reale è superiore, in modulo, al lavoro tecnico che si sarebbe potuto spendere nella compressione isoentropica. La differenza

$$|L'_{eu}| - |L'_{is}| = (h_u - h_e) - (h_{u'} - h_e) = h_u - h_{u'} \quad (5.61)$$

è rappresentata ancora dall'area segnata a tratteggio in Fig. 5.6 (b).

Il rendimento isoentropico d'espansione è uguale a zero nei processi di laminazione poiché, in questo caso, l'espansione adiabatica non è accompagnata da alcuna produzione di lavoro tecnico utile. Al contrario, il rendi-

mento isoentropico di compressione non può mai annullarsi in quanto, con una differenza di pressione non nulla tra uscita ed entrata, il lavoro di compressione isoentropico non può essere uguale a zero.



**Figura 5.6** Rendimenti isoentropici delle trasformazioni adiabatiche: (a) espansione e (b) compressione.

### Esempio 5.10

Nell'ipotesi che siano trascurabili le variazioni d'energia cinetica e potenziale, si calcoli il lavoro tecnico specifico di compressione, e si determinino la temperatura all'uscita e l'entropia specifica generata in una trasformazione adiabatica monodimensionale stazionaria, caratterizzata da  $\eta_{ic} = 0,86$ . Nella trasformazione l'azoto, assimilabile ad un gas a comportamento ideale, entra alla temperatura di 300 K ed aumenta la sua pressione in modo tale che si abbia  $p_u / p_e = 5$ .

### Soluzione

Nell'Esempio 5.7 si era già trovato che il lavoro ideale, in una trasformazione isoentropica, è pari a  $|L'_{is}| = 182 \text{ kJ/kg}$ . Pertanto, dalla definizione (5.56) si ha

$$|L'_{eu}| = \frac{|L'_{is}|}{\eta_{ic}} = \frac{182}{0,86} = 212 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Dall'Eq. (5.47) si ricava

$$T_{u'} = T_e \left( \frac{p_e}{p_u} \right)^{(1-k)/k} = T_e \left( \frac{p_u}{p_e} \right)^{(k-1)/k} = 300 \cdot 5^{0,4/1,4} = 475 \text{ K}$$

e quindi, dalla (5.58) si ottiene

$$T_u = T_e + \frac{1}{\eta_{ic}} (T_{u'} - T_e) = 300 + \frac{1}{0,86} (475 - 300) = 503,5 \text{ K}$$

Infine, dalla (5.28) si ha

$$s_u - s_e = s_u - s_{u'} = c_p \ln \frac{T_u}{T_{u'}} = 1,039 \ln \frac{503,5}{475} = 0,0605 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}$$

Dal bilancio d'entropia per il sistema aperto considerato si ha

$$s_u - s_e = \sum \left( \frac{Q_j}{T_j} \right)_{eu} + (\Delta s_{irr})_{eu} = (\Delta s_{irr})_{eu}$$

attesa l'ipotesi di adiabaticità. Rispetto al caso ideale, il lavoro tecnico speso nella compressione è aumentato della quantità

$$\begin{aligned} |L'_{eu}| - |L'_{is}| &= h_u - h_{u'} = c_p (T_u - T_{u'}) \\ &= 1,039(503,5 - 475) = 29,6 \text{ kJ / kg} \end{aligned}$$

corrispondente al 16,2% circa del lavoro isoentropico.

## 5.5 TRASFORMAZIONI POLITROPICHE

Si dicono politropiche le trasformazioni in cui pressione e volume specifico sono legati dalla relazione

$$pv^n = \text{cost} \quad (5.62)$$

dove  $n$  è una costante che può assumere qualunque valore, compreso tra  $-\infty$  e  $+\infty$ . Va tuttavia notato che valori negativi di  $n$  implicano aumenti, o diminuzioni, simultanei di pressione e volume specifico e quindi corrispondono a trasformazioni di nessun interesse pratico. Tra le trasformazioni con  $n$  positivo, si annoverano le trasformazioni investigate nel paragrafo precedente, dal momento che la (5.62) porge:

- $v = \text{cost}$     per     $n = \infty$
- $p = \text{cost}$     per     $n = 0$
- $T = \text{cost}$     per     $n = 1$
- $s = \text{cost}$     per     $n = k = c_p / c_v$

L'andamento, sul piano  $(p, v)$ , di queste speciali politropiche è illustrato nella Fig. 5.7. Si noti come, in base alla (5.62), la pendenza delle politropiche sia pari a

$$\left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_n = - (pv^n) \frac{n}{v^{n+1}} = -n \frac{p}{v} \quad (5.63)$$

Pertanto la pendenza delle isoentropiche ( $n = k$ ), è  $k$  volte maggiore della pendenza delle isoterme ( $n = 1$ ), risultando

$$\left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_s = -k \frac{p}{v} = k \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_T \quad (5.64)$$

Inoltre si può facilmente constatare che, al primo ed al terzo quadrante del piano  $(p, v)$ , afferiscono solo trasformazioni politropiche caratterizzate da valori negativi dell'esponente: ad esempio, con  $n = -1$  si ha la retta d'equazione  $p = v$  che attraversa, appunto, il primo ed il terzo quadrante.

Se la trasformazione politropica interessa un gas ideale, l'Eq. (5.62) può essere manipolata sulla base dell'equazione di stato (5.6), ottenendo

$$p v^n = \frac{RT}{v} v^n = \text{cost} \Rightarrow T v^{n-1} = \text{cost} \quad (5.65)$$

e

$$(p v^n)^{1/n} = p^{1/n} \frac{RT}{p} = R T p^{(1-n)/n} = \text{cost}^{1/n} \Rightarrow T p^{(1-n)/n} = \text{cost} \quad (5.66)$$

Se le variazioni d'energia cinetica e potenziale sono trascurabili, si ha anche

$$\begin{aligned} L_{if} &= \int_{v_i}^{v_f} p \, dv = \int_{v_i}^{v_f} \frac{p_i v_i^n}{v^n} \, dv = \frac{p_i v_i^n}{1-n} \left( v^{1-n} \Big|_{v_i}^{v_f} \right) \\ &= \frac{p_f v_f^n}{1-n} v_f^{1-n} - \frac{p_i v_i^n}{1-n} v_i^{1-n} = \frac{p_i v_i - p_f v_f}{n-1} = \frac{1}{n-1} p_i v_i \left( 1 - \frac{p_f v_f}{p_i v_i} \right) \\ &= \frac{1}{n-1} p_i v_i \left[ 1 - \frac{p_f}{p_i} \left( \frac{p_f}{p_i} \right)^{-1/n} \right] = \frac{1}{n-1} p_i v_i \left[ 1 - \left( \frac{p_f}{p_i} \right)^{(n-1)/n} \right] \quad (5.67) \end{aligned}$$

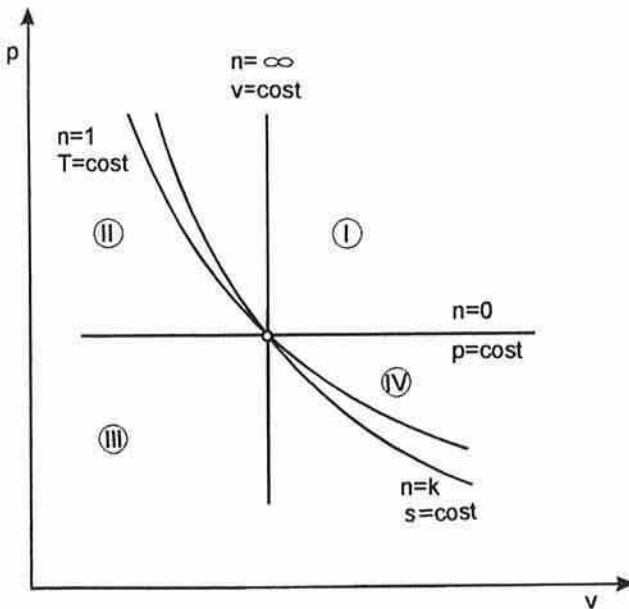


Figura 5.7 Andamento di alcune politropiche sul piano  $(p, v)$ .

per trasformazioni politropiche reversibili di un sistema chiuso, ed

$$\begin{aligned}
 L'_{eu} &= - \int_{p_e}^{p_u} v \, dp = \int_{p_u}^{p_e} \frac{p_e^{1/n} v_e}{p^{1/n}} \, dp = \frac{p_e^{1/n} v_e}{1-1/n} \left( p^{1-1/n} \Big|_{p_u}^{p_e} \right) \\
 &= \frac{n}{n-1} (p_e v_e - p_u v_u) = \frac{n}{n-1} p_e v_e \left( 1 - \frac{p_u v_u}{p_e v_e} \right) \\
 &= \frac{n}{n-1} p_e v_e \left[ 1 - \frac{p_u}{p_e} \left( \frac{p_u}{p_e} \right)^{-1/n} \right] = \frac{n}{n-1} p_e v_e \left[ 1 - \left( \frac{p_u}{p_e} \right)^{(n-1)/n} \right] \quad (5.68)
 \end{aligned}$$

per trasformazioni politropiche reversibili di un sistema aperto. Pertanto, assunto  $i = e$  ed  $f = u$  nelle ipotesi poste, il lavoro tecnico  $L'_{eu}$  scambiato in un sistema aperto risulta  $n$  volte maggiore del lavoro  $L'_{if}$  scambiato in un sistema chiuso, essendo  $L'_{eu} = n L'_{if}$ .

A conclusione del paragrafo, si vuol far notare che le espressioni (5.67) e (5.68) cadono in difetto per  $n = 1$ . In tal caso, tuttavia, le trasformazioni sono isoterme e, nel calcolo del lavoro, possono essere utilizzate le relazioni proprie delle isoterme.

### Esempio 5.11

Nell'ipotesi che siano trascurabili le variazioni di energia cinetica e potenziale, si calcoli il lavoro tecnico specifico scambiato durante una trasformazione politropica reversibile avente  $n = 1,3$ . Nella trasformazione l'azoto, assimilabile ad un gas a comportamento ideale, entra alla temperatura di 300 K ed aumenta la sua pressione in modo tale che si abbia  $p_u / p_e = 5$ .

#### Soluzione

Per la soluzione del problema basta tenere conto, nella (5.68), dell'equazione di stato dei gas ideali. Si ottiene così

$$L'_{eu} = \frac{n}{n-1} R T_e \left[ 1 - \left( \frac{p_u}{p_e} \right)^{(n-1)/n} \right]$$

$$= \frac{1,3}{0,3} 0,2968 \cdot 300 \left( 1 - 5^{0,3/1,3} \right) = -173,5 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Come si vede dal confronto con gli Esempi 5.6 e 5.7, la compressione politropica reversibile ( $n = 1,3$ ), comporta una spesa di lavoro inferiore a quella richiesta dalla compressione isoentropica ( $n = k = 1,4$ ), ma superiore a quella richiesta dalla compressione isoterma ( $n = 1$ ). Il fatto che l'andamento della compressione politropica reversibile sia intermedio tra quelli di un'adiabatica reversibile (assenza di scambio termico) e di un'isoterma reversibile (raffreddamento così intenso da mantenere la temperatura costante), indica che la trasformazione comporta una cessione di calore oltre che, evidentemente, una fornitura di lavoro.

### 5.5.1 Calore Specifico di una Trasformazione Politropica

In una trasformazione politropica reversibile di un gas ideale, il calore specifico della trasformazione può essere definito, al solito, come rapporto tra il calore scambiato e le variazioni di temperatura.

Per un sistema chiuso, nell'ipotesi di calore specifico  $c_v = \text{cost}$ , si ha

$$Q_{if} = c_v (T_f - T_i) + \int_{v_i}^{v_f} p \, dv \quad (5.69)$$

dove

$$\int_{v_i}^{v_f} p \, dv = \frac{p_f v_f - p_i v_i}{1-n} = \frac{R (T_f - T_i)}{1-n} = c_v \frac{k-1}{1-n} (T_f - T_i) \quad (5.70)$$

Sostituendo la (5.70) nella (5.69) si ottiene



$$Q_{if} = c_v(T_f - T_i) + c_v \frac{k-1}{1-n}(T_f - T_i) = c_v \frac{k-n}{1-n}(T_f - T_i) \quad (5.71)$$

ovvero

$$c_n = \frac{Q_{if}}{T_f - T_i} = c_v \frac{k-n}{1-n} \quad (5.72)$$

dove  $c_n$  è il calore specifico della trasformazione politropica.

Analogamente, per un sistema aperto monodimensionale stazionario, nell'ipotesi di calore specifico  $c_p = \text{cost}$ , si ha

$$Q_{eu} = c_p(T_u - T_e) - \int_{p_e}^{p_u} v \, dp \quad (5.73)$$

dove

$$\begin{aligned} - \int_{p_e}^{p_u} v \, dp &= \frac{n}{1-n}(p_u v_u - p_e v_e) \\ &= \frac{n}{1-n}R(T_u - T_e) = \frac{n}{1-n}(c_p - c_v)(T_u - T_e) \end{aligned} \quad (5.74)$$

Sostituendo la (5.74) nella (5.73) si ottiene quindi

$$Q_{eu} = c_p(T_u - T_e) + \frac{n}{1-n}(c_p - c_v)(T_u - T_e) = c_v \frac{k-n}{1-n}(T_u - T_e) \quad (5.75)$$

ovvero

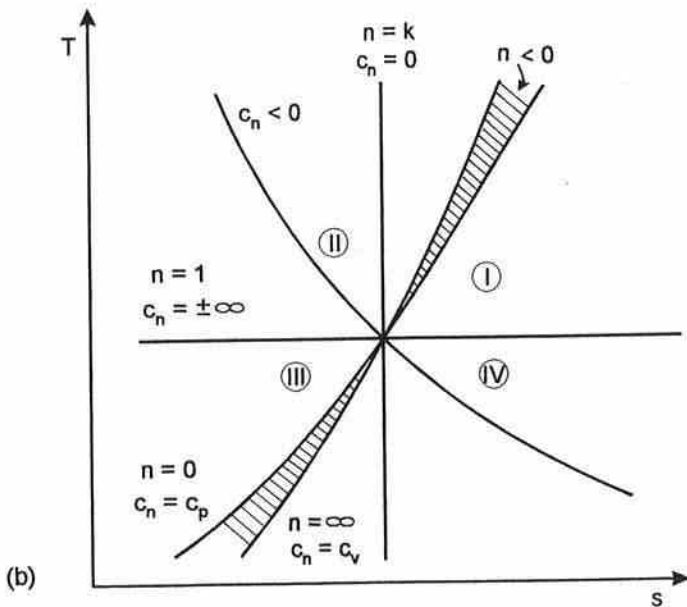
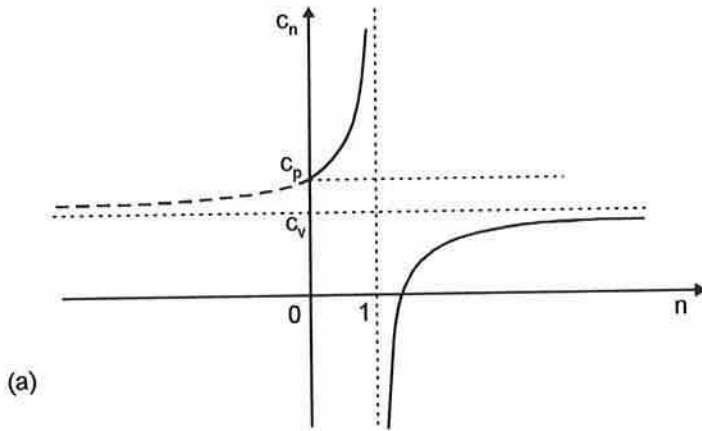
$$c_n = \frac{Q_{eu}}{T_u - T_e} = c_v \frac{k-n}{1-n} \quad (5.76)$$

dimostrando che  $c_n$  non varia rispetto alla (5.72).

Gli andamenti del calore specifico delle politropiche, espressi in funzione del parametro  $n$ , sono diagrammati in Fig. 5.8 (a). Come si può vedere

dal grafico e dalle Eq. (5.72) e (5.76), risulta

- $c_n = c_v$  per  $n = \pm\infty$
- $c_n = c_p$  per  $n = 0$
- $c_n = \pm\infty$  per  $n = 1$
- $c_n = 0$  per  $n = k = c_p / c_v$



**Figura 5.8** Politropiche: (a) andamenti del calore specifico in funzione di  $n$  e (b) rappresentazione sul piano  $(T, s)$ .

In base alle osservazioni precedenti ed alla proporzionalità tra calore specifico e sottotangente in una trasformazione reversibile sul piano  $(T, s)$ , si ottengono facilmente gli andamenti delle politropiche illustrati nella Fig. 5.8 (b). Si noti come le isocore siano più ripide delle isobare in quanto è  $c_v < c_p$ . Inoltre, si può facilmente constatare che le trasformazioni politropiche afferenti al secondo ed al quarto quadrante del piano  $(T, s)$  sono caratterizzate da calore specifico negativo. Esse presentano, infatti, valori di  $n$  compresi nell'intervallo  $1 < n < k$  in cui si hanno segni opposti per le quantità di calore scambiato e le variazioni di temperatura. Al contrario, le trasformazioni politropiche afferenti al primo ed al terzo quadrante sono caratterizzate da calore specifico positivo, in quanto presentano segni opposti per le quantità di calore scambiato e le variazioni di temperatura

### Esempio 5.12

Nell'ipotesi che siano trascurabili le variazioni di energia cinetica e potenziale, si calcoli il calore scambiato per unità di massa dall'azoto ( $k = 1,4$ ) durante una trasformazione politropica reversibile avente  $n = 1,3$ . Nella trasformazione l'azoto, assimilabile ad un gas a comportamento ideale, entra alla temperatura di 300 K ed aumenta la sua pressione in modo tale che si abbia  $p_u / p_e = 5$ .

#### Soluzione

In base alla definizione (5.76) ed all'Eq. (5.66), si ha

$$\begin{aligned} Q_{eu} &= c_n(T_u - T_e) = c_v \frac{k-n}{1-n} \left[ T_e \left( \frac{T_u}{T_e} - 1 \right) \right] \\ &= \left( \frac{R}{k-1} \frac{k-n}{1-n} \right) \left\{ T_e \left[ \left( \frac{p_u}{p_e} \right)^{(n-1)/n} - 1 \right] \right\} \\ &= \left( \frac{0,2968}{0,4} \frac{0,1}{1-1,3} \right) \left[ 300 \left( 5^{0,3/1,3} - 1 \right) \right] = -0,2473 \cdot 134,93 = -33,37 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \end{aligned}$$

Come si vede dal confronto con l'Esempio 5.6, la compressione politropica ( $n = 1,3$ ) comporta una refrigerazione del gas caratterizzata, però, da un'asportazione di calore molto più moderata di quella richiesta dalla compressione isoterma ( $n = 1$ ) con le stesse condizioni di entrata e lo stesso rapporto delle pressioni. Inoltre, essendo in questo caso  $1 < n = 1,3 < k$ , il calore specifico risulta negativo. Infatti, dalla relazione precedente si ha

$$T_u - T_e = T_e \left[ \left( \frac{p_u}{p_e} \right)^{(n-1)/n} - 1 \right] = 134,93$$

e

$$c_n = c_v \frac{k-n}{1-n} = \frac{Q_{eu}}{T_u - T_e} = -\frac{33,97}{134,93} = -0,2473 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}$$

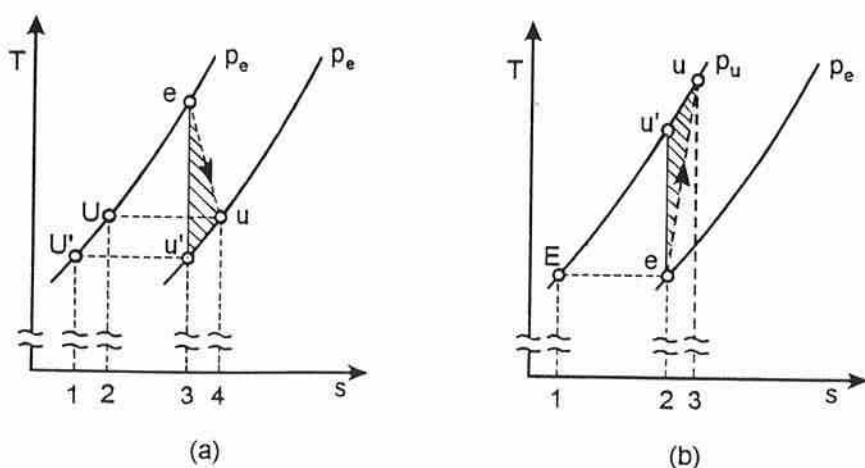
poiché la variazione di temperatura e la quantità di calore scambiata hanno segno opposto. Pertanto, nella rappresentazione di Fig. 5.8 (b), la trasformazione politropica in esame afferisce al secondo quadrante.

### 5.5.2 Rendimenti Politropici

Come si è detto, i rendimenti isoentropici danno indicazioni, utilissime ai fini pratici, sugli scostamenti tra il lavoro tecnico adiabatico, scambiato in una trasformazione reale, ed il lavoro tecnico isoentropico, che potrebbe essere scambiato in una trasformazione adiabatica ideale. Tali scostamenti non sono però imputabili completamente agli attriti ed agli aumenti d'entropia ad essi collegati. Infatti, nelle trasformazioni adiabatiche reali, l'energia meccanica dissipata dagli attriti viene convertita in energia termica e, di conseguenza, i gas escono a temperature più alte che nelle corrispondenti trasformazioni isoentropiche. Gli aumenti di temperatura inducono, a loro volta, aumenti di volume specifico che si riflettono sul lavoro scambiato nelle trasformazioni reali. Per distinguere tra gli effetti sul lavoro degli aumenti d'entropia e di volume specifico, si introduce il concetto di rendi-

mento politropico.

Con riferimento alla Fig. 5.9 si considerino ancora le espansioni, adiabatiche ma non isoentropiche, che hanno luogo nelle turbine e nei compressori reali. Come nella definizione dei rendimenti isoentropici, si trascurino le variazioni d'energia cinetica e potenziale tra ingresso ed uscita. Infine, si supponga che le trasformazioni adiabatiche irreversibili reali abbiano un andamento approssimabile mediante trasformazioni politropiche reversibili con esponente  $n$  opportuno.



**Figura 5.9** Rendimenti politropici delle trasformazioni adiabatiche: (a) espansione e (b) compressione.

Per la trasformazione politropica reversibile e la corrispondente trasformazione adiabatica reale, considerate insieme, si ha

$$dQ_p = T ds = T ds_{irr} = |dR^-| \quad (5.77)$$

dove il primo ed il secondo membro si riferiscono alla trasformazione politropica reversibile, mentre il terzo e quarto membro si riferiscono alla trasformazione adiabatica irreversibile. Nelle ipotesi poste, il lavoro tecnico scambiato nella trasformazione adiabatica reale infinitesima può venire e-

spesso come

$$\begin{aligned} dL' &= -dh = -v dp - |dR^-| = -v dp - T ds_{irr} \\ &= -v dp - T ds = dL'_p - dQ_p \end{aligned} \quad (5.78)$$

dove il terzo e quarto membro si riferiscono alla trasformazione adiabatica irreversibile, mentre il quinto e sesto membro si riferiscono alla trasformazione politropica reversibile. Dall'integrazione della (5.78), si ricava

$$\begin{aligned} L'_{eu} &= h_e - h_u = - \int_e^u v dp - |R_{eu}^-| \\ &= - \int_e^u v dp - \int_e^u T ds = L'_p - Q_{eu} \end{aligned} \quad (5.79)$$

Si può osservare che la (5.79) implica la (2.28) scritta nella forma

$$L'_{eu} = - \int_e^u v dp - |R_{eu}^-| = L'_p - |R_{eu}^-| \quad (5.80)$$

Infatti, in assenza di variazioni d'energia cinetica e potenziale, il lavoro tecnico adiabatico scambiato con l'esterno è pari alla somma algebrica del lavoro tecnico delle forze interne di pressione, cioè del lavoro politropico in questo caso, e del lavoro delle forze interne d'attrito. Dall'Eq. (5.80) appare allora evidente che il lavoro tecnico d'espansione (positivo) è ridotto dalla presenza degli attriti, mentre il lavoro tecnico di compressione (negativo) è aumentato, in valore assoluto, dalla presenza degli attriti.

Nelle definizioni dei rendimenti politropici d'espansione e compressione si confrontano i lavori scambiati nelle trasformazioni adiabatiche reali con i corrispondenti lavori scambiati nelle trasformazioni politropiche ideali che presentano lo stesso andamento. Per chiarezza d'esposizione, giunti a

questo punto conviene, però, distinguere tra espansioni, schematizzate in Fig. 5.9 (a), e compressioni, schematizzate in Fig. 5.9 (b).

### Espansione

Il rendimento politropico d'espansione

$$\eta_{pe} = \frac{L'_{eu}}{L'_p} \quad (5.81)$$

è definito come rapporto tra il lavoro tecnico ottenuto nella trasformazione adiabatica reale ed il lavoro tecnico che si potrebbe ottenere nella corrispondente trasformazione politropica reversibile. Entrambi i lavori sono calcolabili direttamente in quanto, nelle ipotesi poste, si ha  $L'_{eu} = h_e - h_u$  per il lavoro tecnico adiabatico (positivo), mentre il lavoro tecnico politropico (positivo) è dato dalla (5.68). Dalle (5.79) e (5.80) si ha poi

$$L'_p = L'_{eu} + |R_{eu}^-| = (h_e - h_u) + \int_e^u T ds \quad (5.82)$$

e quindi i lavori possono essere rappresentati in forma grafica, eventualmente assumendo per semplicità, come in Fig. 5.9 (a), che isoterme ed isentalpiche coincidano. In tal caso si ha che il lavoro tecnico adiabatico corrisponde all'area  $\overline{2Ue3}$  sottostante al tratto d'isobara  $\overline{Ue}$ , il lavoro delle forze d'attrito corrisponde all'area  $\overline{3eu4}$  sottostante al tratto di politropica  $\overline{eu}$  ed il lavoro tecnico politropico corrisponde all'area  $\overline{2Ueu4}$  somma delle due aree sopra menzionate. Di conseguenza, si evince che il rendimento politropico (5.81) è minore od uguale all'unità, in quanto il lavoro tecnico adiabatico è minore od uguale al lavoro politropico (risultando uguale solo in assenza di attriti).

Trattando del rendimento isoentropico d'espansione, si era visto che la differenza tra i lavori tecnici ottenuti in un'espansione isoentropica ed in

un'espansione adiabatica reale corrisponde alla differenza d'entalpia ( $h_u - h_{u'}$ ), e quindi all'area  $\overline{3u'u4}$  sottostante al tratto d'isobara  $\overline{u'u}$ . Tale area è una frazione dell'area  $\overline{3eu4}$  sottostante al segmento di politropica  $\overline{eu}$ . Ciò significa che parte del lavoro dissipato dagli attriti viene recuperata grazie agli aumenti di volume specifico. La frazione di lavoro recuperata  $L'_{rc}$  corrisponde all'area tratteggiata del triangolo mistilineo  $\overline{eu'u}$ , ed è valutabile anche come differenza (non negativa) tra il lavoro tecnico politropico ed il lavoro tecnico isoentropico

$$L'_{rc} = L'_p - L'_{is} \quad (5.83)$$

Infatti, il lavoro tecnico isoentropico  $L'_{is} = h_e - h_{u'}$  corrisponde all'area  $\overline{1U'e3}$  sottostante al tratto d'isobara  $\overline{U'e}$  mentre, per il parallelismo delle isobare, sono uguali le aree  $\overline{1U'U2}$  e  $\overline{3u'u4}$  sottostanti, rispettivamente, ai tratti d'isobara  $\overline{U'U}$  ed  $\overline{u'u}$ . Di conseguenza il lavoro politropico corrisponde anche all'area  $\overline{1U'euu'3}$ , e la differenza (non negativa) tra i lavori al secondo membro della (5.83) corrisponde proprio all'area del triangolo mistilineo  $\overline{eu'u}$ . Essendo  $L'_{rc} \geq 0$ , si ha  $L'_p \geq L'_{is}$  e perciò anche per questa via, dalle definizioni dei rendimenti d'espansione isoentropico e politropico, si deduce che deve essere anche  $\eta_{pe} \leq \eta_{ie}$ .

Se l'espansione riguarda un gas ideale a calori specifici costanti, dalla (5.79) si ricava

$$L'_p = L'_{eu} + \int_e^u T ds = (h_e - h_u) + Q_{eu} = (c_p - c_n)(T_e - T_u) \quad (5.84)$$

e quindi, dalla definizione (5.81), si ottiene

$$\eta_{pe} = \frac{c_p(T_e - T_u)}{(c_p - c_n)(T_e - T_u)} = \frac{1}{1 - c_n/c_p} = \frac{(n-1)/n}{(k-1)/k} \quad (5.85)$$

Si noti che dalla (5.85) risulta certamente  $\eta_{pe} \leq 1$  in quanto l'espansione politropica in esame afferisce al quarto quadrante del diagramma  $(T, s)$ , do-



ve si ha  $1 \leq n \leq k$  e  $c_n \leq 0$  (essendo  $\eta_{pe} = 1$  e  $c_n = 0$  nel caso di espansione isoentropica). Infine si può osservare che, nel caso particolare dei processi di laminazione che interessano i gas ideali, la politropica di riferimento è un'isoterma. In tal caso, il lavoro tecnico ottenuto nella trasformazione adiabatica reale è uguale a zero, mentre il lavoro tecnico ottenibile nell'espansione isoterma ideale viene completamente dissipato dagli attriti.

### Compressione

Il rendimento politropico di compressione

$$\eta_{pc} = \frac{|L'_p|}{|L'_{eu}|} \quad (5.86)$$

è definito come rapporto tra i valori assoluti del lavoro tecnico che si dovrebbe spendere nella trasformazione politropica reversibile e del lavoro tecnico speso nella corrispondente trasformazione adiabatica reale. Entrambi i lavori sono calcolabili direttamente in quanto, nelle ipotesi poste, si ha  $|L'_{eu}| = h_u - h_e$  per il lavoro tecnico reale (negativo), mentre il lavoro tecnico politropico (negativo) è dato ancora dalla (5.68). Dalle (5.79) e (5.80) si ha poi

$$|L'_p| = |L'_{eu}| - |R'_{eu}| = (h_u - h_e) - \int_e^u T ds \quad (5.87)$$

e quindi i lavori possono essere rappresentati in forma grafica, eventualmente assumendo per semplicità, come in Fig. 5.9 (b), che isoterme ed isentalpiche coincidano. In tal caso si ha che il lavoro tecnico adiabatico corrisponde all'area  $\overline{1Eu3}$  sottostante al tratto d'isobara  $\overline{Eu}$ , il lavoro delle forze d'attrito corrisponde all'area  $\overline{2eu3}$  sottostante al tratto di politropica  $\overline{eu}$ , ed il lavoro tecnico politropico corrisponde all'area  $\overline{1Eue2}$  differenza delle due aree sopra menzionate. Di conseguenza, si evince che il rendimento politropico (5.86) è minore od uguale all'unità, in quanto il lavoro

tecnico politropico è minore od uguale, in valore assoluto, al lavoro tecnico adiabatico (risultando uguale solo in assenza di attriti).

Trattando del rendimento isoentropico di compressione, si era visto che il valore assoluto della differenza tra i lavori tecnici spesi in una compressione adiabatica reale ed in una compressione isoentropica corrisponde alla differenza d'entalpia ( $h_u - h_{u'}$ ), e quindi all'area  $\overline{2u'u3}$  sottostante al tratto d'isobara  $\overline{u'u}$ . Tale area è maggiore dell'area  $\overline{2eu3}$  sottostante al segmento di politropica  $\overline{eu}$ . Ciò significa che l'aumento, in valore assoluto, del lavoro speso non è completamente attribuibile agli attriti. Infatti, parte dell'aumento è causato dagli aumenti di volume specifico, e la frazione di lavoro corrispondente viene detta lavoro di controrecupero  $|L'_{cr}|$ , cioè lavoro speso in più. Il lavoro di controrecupero corrisponde all'area del triangolo mistilineo  $\overline{eu'u}$ , ed è valutabile anche come differenza (non negativa) tra i valori assoluti del lavoro tecnico politropico e del lavoro tecnico isoentropico

$$|L'_{cr}| = |L'_p| - |L'_{is}| \quad (5.88)$$

Infatti, il lavoro tecnico isoentropico  $|L'_{is}| = h_{u'} - h_E$  corrisponde all'area  $\overline{1Eu'2}$  sottostante al tratto d'isobara  $\overline{Eu'}$  mentre, come si è visto, il lavoro politropico corrisponde all'area  $\overline{1Eue2}$ . Pertanto la differenza non negativa al secondo membro della (5.88) corrisponde proprio all'area del triangolo mistilineo  $\overline{eu'u}$ . Essendo  $|L'_{cr}| \geq 0$ , si ha  $|L'_p| \geq |L'_{is}|$  e quindi anche per questa via, dalle definizioni dei rendimenti d'espansione isoentropico e politropico, si deduce che deve essere anche  $\eta_{pc} \geq \eta_{ic}$ .

Se l'espansione riguarda un gas ideale a calori specifici costanti, dalla (5.79) si ricava

$$|L'_p| = |L'_{eu}| - \int_e^u T ds = (h_u - h_e) - Q_{eu} = (c_p - c_n)(T_u - T_e) \quad (5.89)$$

e quindi, dalla definizione (5.86), si ottiene

$$\eta_{pc} = \frac{(c_p - c_n)(T_u - T_e)}{c_p(T_u - T_e)} = 1 - \frac{c_n}{c_p} = \frac{(k-1)/k}{(n-1)/n} \quad (5.90)$$

Si noti che dalla (5.90) risulta certamente  $\eta_{pc} \leq 1$  in quanto la compressione politropica in esame afferisce al primo quadrante del diagramma  $(T, s)$ , nella zona in cui si ha  $n \geq k$  e  $c_n \geq 0$  (essendo  $\eta_{pc} = 1$  e  $c_n = 0$  nel caso di compressione isoentropica).

### Esempio 5.13

Con riferimento ai risultati dell'Esempio 5.10, si valuti il rendimento politropico di compressione  $\eta_{pc}$  per la trasformazione adiabatica reale caratterizzata da un rendimento isoentropico di compressione  $\eta_{ic} = 0,86$ .

#### Soluzione

Nell'Esempio 5.10 si aveva

$$T_e = 300 \text{ K}; \quad T_u = 300 \text{ K}; \quad p_u / p_e = 5 \quad \text{e} \quad |L'_{eu}| = 212 \text{ kJ/kg.}$$

Inoltre, dalla relazione

$$\frac{T_u}{T_e} = \left( \frac{p_u}{p_e} \right)^{(n-1)/n}$$

passando ai logaritmi si ricava

$$\frac{n-1}{n} = \frac{\ln(T_u/T_e)}{\ln(p_u/p_e)} = \frac{\ln(300/300)}{\ln 5} = 0,3217$$

ovvero:  $n = 1,474$  ( $> k = 1,4$ ). Il lavoro tecnico politropico, calcolato in base alla (5.68) ed all'equazione di stato dei gas ideali, è pari a

$$L'_p = \frac{n}{n-1} RT_e \left[ 1 - \left( \frac{p_u}{p_e} \right)^{(n-1)/n} \right]$$

$$= \frac{1}{0,3217} 0,2968 \cdot 300 (1 - 5^{0,3217}) = -188 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Di conseguenza, il rendimento politropico vale

$$\eta_{pc} = \frac{|L'_p|}{|L'_{eu}|} = \frac{187}{212} = 0,89$$

ed è, come dev'essere, superiore al rendimento isoentropico. Si noti che il rendimento politropico di compressione avrebbe potuto essere calcolato anche in base alla relazione (5.90). In questo caso, con riferimento al valore  $k = 1,4$  ed all'esponente  $n = 1,474$  della politropica, valutato in precedenza, si sarebbe ottenuto

$$\frac{c_n}{c_p} = \frac{c_v}{c_p} \frac{k-n}{1-n} = \frac{1}{k} \frac{k-n}{1-n} = \frac{1}{1,4} \frac{1,4-1,474}{1-1,474} = 0,1115$$

ed

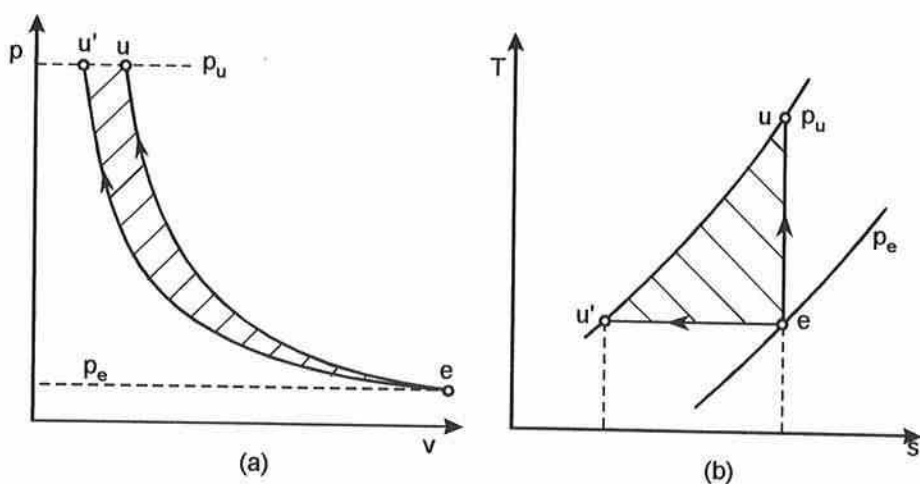
$$\eta_{pc} = 1 - \frac{c_n}{c_p} = 1 - 0,1115 = 0,89$$

a conferma dell'accuratezza dei calcoli precedenti.

## 5.6 IMPIANTI DI COMPRESSIONE

In molte situazioni d'interesse pratico, le condizioni ottimali di funzionamento degli impianti di compressione possono essere determinate facendo riferimento a trasformazioni di un gas ideale che abbiano luogo reversibilmente in un sistema aperto a deflusso monodimensionale stazionario. In questi casi, a parità di condizioni d'entrata e di rapporto delle pressioni, il

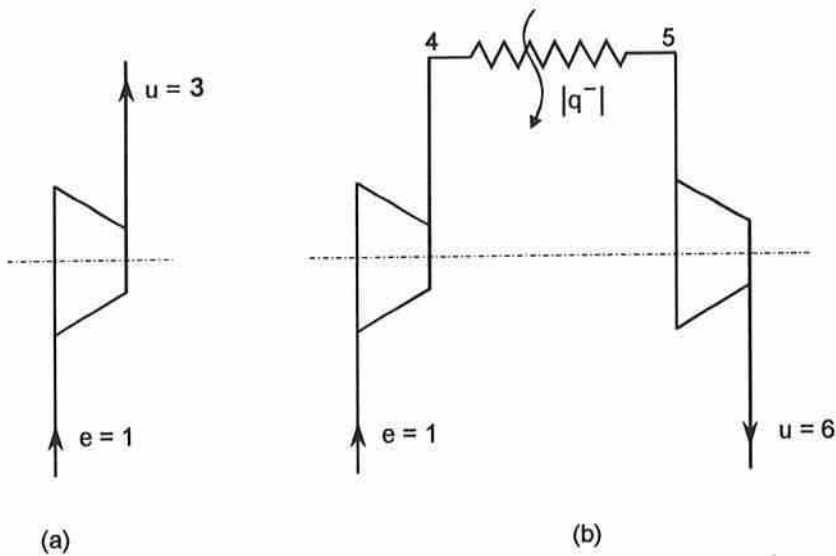
lavoro tecnico di compressione isoterma è minore, in valore assoluto, del lavoro tecnico di compressione adiabatico. In assenza di variazioni d'energia cinetica e potenziale, la differenza tra i due lavori è rappresentata graficamente sul diagramma  $(p, v)$  dall'area tratteggiata in Fig. 5.10 (a), e sul diagramma  $(T, s)$  dall'area tratteggiata in Fig. 5.10 (b). La rappresentazione sul diagramma  $(p, v)$  è intuitiva e non richiede ulteriori spiegazioni. Nella rappresentazione sul diagramma  $(T, s)$ , isoterme ed isoentalpiche coincidono nel caso dei gas ideali. Pertanto il lavoro di compressione adiabatico reversibile coincide con la differenza d'entalpia  $(h_u - h_e) = (h_u - h_{u'})$  ed è rappresentato dall'area sottostante al segmento di curva  $\overline{uu'}$  sull'isobara  $p_u$ . Il lavoro di compressione isoterma reversibile, invece, coincide con il calore scambiato ed è rappresentato dall'area sottostante al segmento d'isoterma  $\overline{eu'}$ . La differenza tra i due lavori corrisponde quindi all'area del triangolo mistilineo  $\overline{u'u'e}$ .



**Figura 5.10** Area corrispondente alla differenza tra i lavori di compressione adiabatico ed isoterma: (a) sul diagramma  $(p, v)$  e (b) sul diagramma  $(T, s)$ .

Nella pratica, in condizioni prossime alla reversibilità, le compressioni tendono ad assomigliare più alle adiabatiche che alle isoterme, in

quanto l'esponente  $n$  della trasformazione politropica che le rappresenta è più vicino a  $k$  che ad 1. Naturalmente, un raffreddamento intenso del compressore può contribuire a ridurre l'esponente  $n$ , ma la velocità con cui avvengono le trasformazioni non consente di comprimere senza aumenti di temperatura. Un modo per avvicinarsi all'andamento isoterma è costituito, semmai, dalla realizzazione di compressioni multiple. Se invece della semplice compressione, schematizzata in Fig. 5.11 (a), si fa ricorso alla doppia compressione con refrigerazione intermedia, schematizzata in Fig. 5.11 (b),



**Figura 5.11** Schemi funzionali in cui la notazione è coordinata con la Fig. 5.12: (a) processo di compressione semplice e (b) processo di compressione doppia con refrigerazione intermedia.

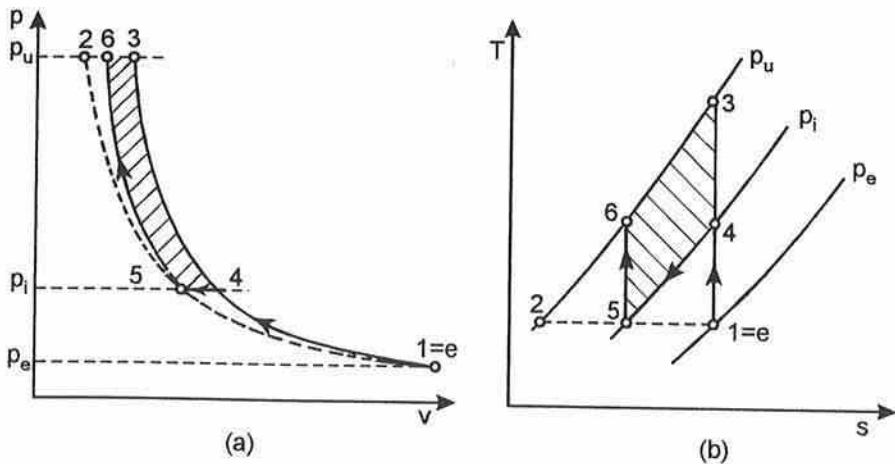
il lavoro teoricamente risparmiabile corrisponde alle aree tratteggiate in Fig. 5.12, dove la refrigerazione intermedia riporta il gas alla temperatura d'entrata. In tale contesto ci si può porre il problema di determinare la pressione intermedia che consente il massimo risparmio teorico di lavoro. Allora, con riferimento alla Fig. 5.12 (a) ed all'Eq. (5.54), si può scrivere

$$L'_{14} + L'_{56} = \frac{k}{k-1} p_e v_e \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{p_i}{p_e} \right)^{(k-1)/k} \right] + \left[ 1 - \left( \frac{p_u}{p_i} \right)^{(k-1)/k} \right] \right\} \quad (5.91)$$

in quanto risulta  $p_e v_e = p_1 v_1 = p_i v_5$ . Derivando due volte la (5.91) rispetto a  $p_i$  si può verificare che, in corrispondenza al valore  $p_i = \sqrt{p_e p_u}$ , si ha un minimo del lavoro totale speso. In corrispondenza a tale valore risulta anche

$$\frac{p_i}{p_e} = \frac{p_u}{p_i} = \sqrt{\frac{p_u}{p_e}} \quad (5.92)$$

e quindi, per rendere minimo il lavoro speso, occorre scegliere rapporti delle pressioni uguali nei due stadi. Si può dimostrare che tale regola può essere estesa, in maniera ovvia, a tutte le compressioni pluristadio e quindi, ad esempio, in una compressione a tre stadi il rapporto ottimale delle pressioni in ciascuno stadio è pari alla radice cubica del rapporto totale  $p_u / p_e$ .



**Figura 5.12** Aree corrispondente alla differenza tra i lavori di compressione adiabatica semplice e doppia con refrigerazione intermedia: (a) sul diagramma ( $p, v$ ) e (b) sul diagramma ( $T, s$ ).

Nella pratica, il risparmio effettivo di lavoro risultante da una compressione multipla è inferiore al risparmio teorico, in quanto l'inserimento degli scambiatori di calore introduce perdite di carico, mentre l'aumento di complessità delle macchine fa aumentare le perdite meccaniche. Invece, benefici certi della compressione multipla sono la riduzione della temperatura finale del gas e, nei compressori alternativi, il miglioramento del rendimento volumetrico (di cui ci si occuperà nel Paragrafo 5.6.2).

### Esempio 5.14

Si dimostri che il lavoro di compressione in due stadi con refrigerazione intermedia presenta un minimo per  $p_i = \sqrt{p_e p_u}$ .

#### Soluzione

Derivando la (5.91) rispetto a  $p_i$ , ed uguagliando a zero il risultato, si ottiene

$$\frac{k-1}{k} \left(\frac{1}{p_e}\right)^{(k-1)/k} \left(\frac{1}{p_i}\right)^{1/k} - \frac{k-1}{k} p_u^{(k-1)/k} p_i^{(1-2k)/k} = 0$$

ovvero

$$\left(\frac{1}{p_e}\right)^{(k-1)/k} \left(\frac{1}{p_i}\right)^{1/k} = p_u^{(k-1)/k} p_i^{(1-2k)/k}$$

da cui segue

$$p_i^{-\frac{1}{k} + \frac{2k-1}{k}} = p_i^{\frac{k-1}{k}} = (p_e p_u)^{\frac{k-1}{k}}$$

cioè l'annullamento della derivata prima per  $p_i = \sqrt{p_e p_u}$ . In corrispondenza a tale valore, il controllo del segno della derivata seconda mostra che si è in presenza di un minimo del lavoro speso.



### 5.6.1 Cicli dei Compressori Alternativi

A differenza dei compressori rotativi di tipo centrifugo od assiale, i compressori alternativi non operano in regime stazionario, pur presentando una sola entrata (lato aspirazione) ed una sola uscita (lato mandata). Infatti, il funzionamento dei compressori alternativi può essere definito ciclico in quanto, come evidenziato nella Fig. 5.13, consiste in una successione di quattro fasi: aspirazione, compressione, mandata ed espansione. L'aspirazione inizia con l'apertura in 4, per depressione, della valvola di entrata del fluido nel cilindro e termina in 1, al punto morto inferiore. La compressione inizia in 1 e termina in 2 con l'apertura, per sovrappressione, della valvola di uscita del fluido dal cilindro. La mandata inizia in 2 e termina in 3, al punto morto superiore. L'espansione del fluido rimasto nel cilindro inizia in 3, e termina in 4 quando subentra l'aspirazione.

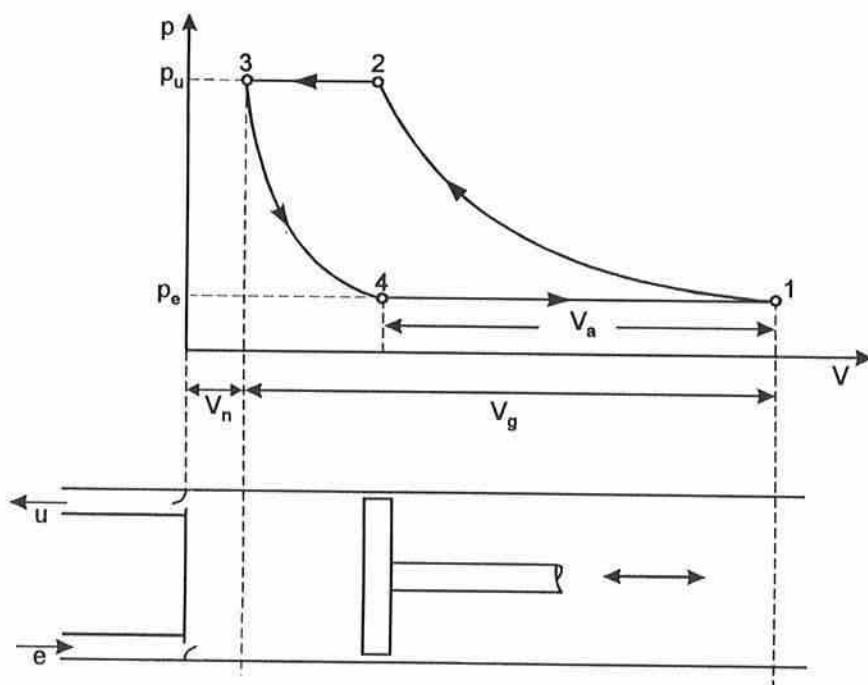


Figura 5.13 Ciclo di funzionamento di un compressore alternativo.

La massa di fluido contenuta nel cilindro di un compressore alternativo è diversa nelle diverse fasi. Di conseguenza, conviene distinguere tra massa di fluido  $m_n$  che rimane nel volume "nocivo"  $V_n = V_3$  e massa di fluido  $m_a$  che viene aspirata, e quindi anche compressa, ad ogni ciclo. Ciò premesso, nell'ipotesi ben verificata in pratica di variazioni trascurabili d'energia cinetica e potenziale, il lavoro tecnico utile per ciclo è pari all'area del ciclo stesso sul diagramma  $(p, V)$ . Infatti tale lavoro può essere calcolato come somma algebrica dei lavori nelle singole fasi e tali lavori sono valutabili, a loro volta, come (forza x spostamento) = [(pressione x area) x spostamento] = (pressione x volume spazzato). Si ha così

$$\hat{L}_{41}^+ = p_e(V_1 - V_4) = (m_a + m_n)p_e v_e - m_n p_e v_e = m_a p_e v_e \quad (5.93)$$

$$\hat{L}_{23}^- = p_u(V_3 - V_2) = m_n p_u v_u - (m_a + m_n)p_u v_u = -m_a p_u v_u \quad (5.94)$$

$$\hat{L}_{12}^- = \int_{V_1}^{V_2} p dV = (m_a + m_n) \int_{v_e}^{v_u} p dv \quad (5.95)$$

e

$$\hat{L}_{34}^+ = \int_{V_3}^{V_4} p dV = -m_n \int_{v_e}^{v_u} p dv \quad (5.96)$$

Di conseguenza, il lavoro totale per ciclo è dato da

$$\begin{aligned} \hat{L} &= \hat{L}_{41}^+ + \hat{L}_{12}^- + \hat{L}_{23}^- + \hat{L}_{34}^+ \\ &= m_a p_e v_e + (m_a + m_n) \int_{v_e}^{v_u} p dv - m_a p_u v_u - m_n \int_{v_e}^{v_u} p dv \\ &= m_a \left( p_e v_e + \int_{v_e}^{v_u} p dv - p_u v_u \right) = -m_a \int_{p_e}^{p_u} v dp \quad (5.97) \end{aligned}$$

e, con riferimento all'unità di massa di fluido aspirato, risulta

$$L' = \frac{\hat{L}}{m_a} = - \int_{p_e}^{p_u} v \, dp \quad (5.98)$$

Pertanto, il lavoro tecnico specifico reversibile nei compressori alternativi, a funzionamento discontinuo, non differisce dal lavoro tecnico specifico reversibile nei compressori centrifughi od assiali, a funzionamento continuo.

### 5.6.2 Rendimento Volumetrico dei Compressori Alternativi

A causa del volume nocivo, che è una caratteristica geometrica del compressore, all'aumentare della pressione di mandata, od al ridursi della pressione d'aspirazione, si riduce il volume aspirato, come messo in evidenza nella Fig. 5.14. Per una valutazione quantitativa di tale riduzione si può fare riferimento ancora alla Fig. 5.13, ponendo

$$V_a = V_g + V_n - V_4 \quad (5.99)$$

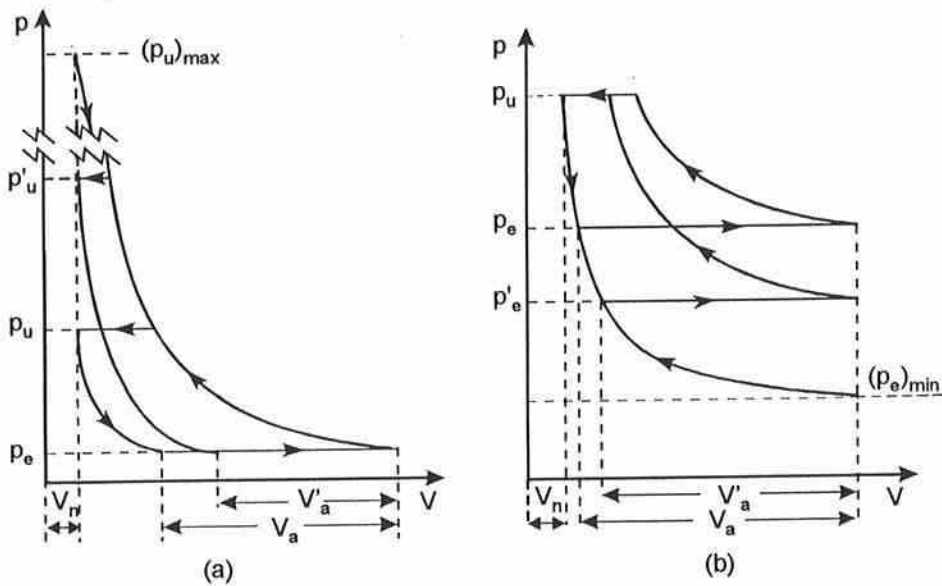
Di conseguenza, in un compressore alternativo il rapporto tra volume aspirato e volume generato, cioè il rendimento volumetrico

$$\eta_v = \frac{V_a}{V_g} = 1 + \frac{V_n}{V_g} - \frac{V_4}{V_g} = 1 - \frac{V_n}{V_g} \left( \frac{V_4}{V_n} - 1 \right) = 1 - \frac{V_n}{V_g} \left( \frac{v_e}{v_u} - 1 \right) \quad (5.100)$$

è funzione decrescente del rapporto tra i volumi specifici all'entrata (aspirazione) ed all'uscita (mandata). Tale rapporto dipende, evidentemente, dal rapporto delle pressioni e, per un gas ideale a calori specifici costanti, può essere determinato in base alla (5.48). Pertanto, sostituendo la (5.48) nella (5.100), si ottiene

$$\eta_v = 1 - \frac{V_n}{V_g} \left[ \left( \frac{p_u}{p_e} \right)^{1/k} - 1 \right] \quad (5.101)$$

Si noti, tuttavia, che il lavoro specifico teorico di compressione non aumenta al ridursi del rendimento volumetrico poiché, in un compressore ideale senza attriti, il fluido rimasto nel volume nocivo restituisce, durante l'espansione, il lavoro speso nella compressione. In teoria, quindi, un rendimento volumetrico basso implica solo che il compressore non è sfruttato bene, in quanto elabora la stessa portata che potrebbe venir compressa da una macchina più piccola avente un rendimento volumetrico più alto.



**Figura 5.14** Riduzione del volume aspirato con: (a) aumento della pressione di mandata o (b) diminuzione della pressione di aspirazione.

In realtà, nei compressori alternativi impiegati nella tecnica si hanno attriti meccanici sulle tenute ed attriti viscosi considerevoli nei passaggi del fluido attraverso le valvole d'aspirazione e mandata. (Infatti, è noto che il

rendimento isoentropico dei compressori alternativi è generalmente inferiore a quello dei compressori centrifughi od assiali). A causa degli attriti l'aumento del numero di cicli di compressione, collegato alla diminuzione del rendimento volumetrico, comporta un aumento del lavoro specifico reale che si somma al peggioramento delle condizioni d'utilizzo del compressore. Di conseguenza, nella pratica il valore  $p_u / p_e = 10$  costituisce il limite superiore del rapporto delle pressioni consigliato per i compressori alternativi.

## 5.7 CONCLUSIONI

In questo capitolo si è data la definizione di gas ideale e si sono espresse le proprietà termodinamiche dei gas ideali in funzione di temperatura, pressione e volume specifico. Successivamente, si sono analizzate le principali trasformazioni di interesse tecnico per gas a comportamento ideale. Come applicazione pratica ci si è soffermati sull'ottimizzazione degli impianti di compressione esaminando, con particolare riguardo, il funzionamento dei compressori alternativi.

---

# CAPITOLO 6

## SOSTANZE PURE

---

### 6.1 GENERALITÀ

Nel capitolo precedente ci si è occupati dei gas ideali. In questo capitolo saranno prese in considerazione le sostanze pure, nei loro diversi stati d'aggregazione: solido, liquido ed aeriforme. Nella fase aeriforme si usa distinguere tra vapori e gas, ma è bene rilevare subito che tale distinzione non ha riscontro nel comportamento termodinamico delle sostanze. Infatti, come vedremo, si parla di gas o vapori a seconda che ci si trovi al di sopra (gas) od al di sotto (vapori) della temperatura di un particolare stato termodinamico denominato punto critico.

Come base di partenza per illustrare i passaggi delle sostanze da una fase d'aggregazione all'altra, saranno presi in esame i diagrammi tridimensionali ( $p, v, T$ ). Dalla proiezione di tali diagrammi sui piani Cartesiani saranno ottenuti i diagrammi bidimensionali ( $p, T$ ) e ( $p, v$ ), più facili da rappresentare e di grande importanza concettuale.

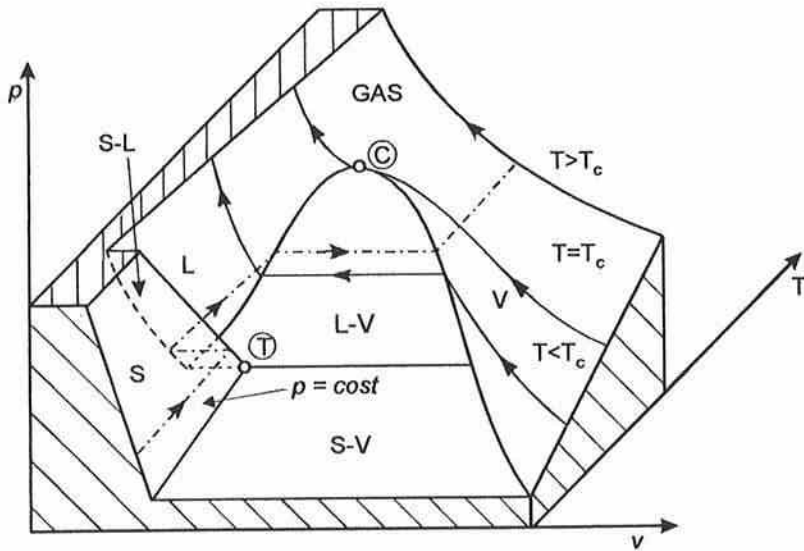
Nel capitolo precedente si era detto che il modello di gas ideale, per quanto si adatti a molti aeriformi, non può essere utilizzato per tutte le situazioni d'interesse tecnico. E' noto, infatti, che il comportamento degli aeriformi, o gas reali, devia tanto più da quello dei gas ideali quanto più aumenta la pressione e diminuisce la temperatura. Quindi, per pressioni relativamente elevate e temperature relativamente basse, le forze d'attrazione intermolecolari ed il volume proprio delle molecole non possono più essere trascurati. Di conseguenza, l'equazione di stato dei gas ideali non è più valida e ciò costringe a cercare nuove relazioni funzionali tra pressione, volume

specifico e temperatura assoluta. In quest'ottica, nel seguito sono illustrate alcune equazioni di stato per i gas reali, che possano essere convenientemente utilizzate nel calcolo delle proprietà termodinamiche e nel successivo tracciamento dei diagrammi.

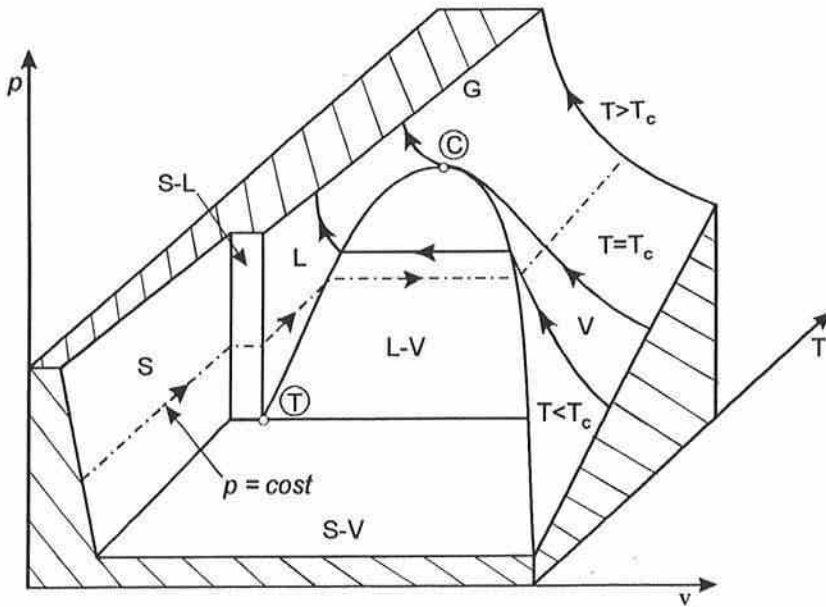
Ai fini della rappresentazione dei cicli termodinamici, sono rilevanti solo le zone dei diagrammi caratterizzate dalla presenza degli stati d'aggregazione liquido ed aeriforme. In tali zone, l'analisi dei cicli è facilitata dalla possibilità di leggere sugli assi coordinati proprietà come l'entalpia e l'entropia. In base a questi criteri, nel seguito saranno illustrati i diagrammi termodinamici  $(T, s)$ ,  $(h, s)$  e  $(p, h)$  comunemente impiegati nella rappresentazione dei cicli termodinamici a vapore diretti ed inversi.

## 6.2 DIAGRAMMI $(p, v, T)$ e $(p, T)$

Nel caso di un fluido che cambia stato di aggregazione, la relazione tra pressione, volume specifico e temperatura può essere rappresentata mediante diagrammi tridimensionali come quelli riportati in Fig. 6.1 ed in Fig. 6.2. Tali diagrammi sono chiamati  $(p, v, T)$ , dal nome delle coordinate Cartesiane scelte per la rappresentazione o, in alternativa, sono detti "collinari" per il loro aspetto. In base alla più volte richiamata regola delle fasi, quando un'unica sostanza ( $M = 1$ ) è presente con una sola fase ( $F = 1$ ), gli stati del sistema sono determinati dalla specificazione di due sole proprietà intensive ( $P = M + 2 - F = 2$ ). Pertanto, in presenza di un'unica fase, gli stati del sistema appartengono ad una superficie  $f(p, v, T) = 0$  che prende il nome dalla fase stessa: solido S, liquido L, vapore V e gas G. Nelle zone di coesistenza tra le diverse fasi: (S-V), (S-L) ed (L-V), si ha invece  $F = 2$  e, di conseguenza, gli stati del sistema sono determinati dalla specificazione di una sola proprietà intensiva ( $P = M + 2 - F = 1$ ). Pertanto, in presenza di due fasi, gli stati del sistema appartengono a superfici di equilibrio sulle quali, ad esempio, pressione e temperatura non variano indipendentemente una dall'altra.



**Figura 6.1** Diagramma collinare per una sostanza, come l'acqua, che diminuisce di volume durante la fusione.



**Figura 6.2** Diagramma collinare per una sostanza che aumenta di volume durante la fusione.

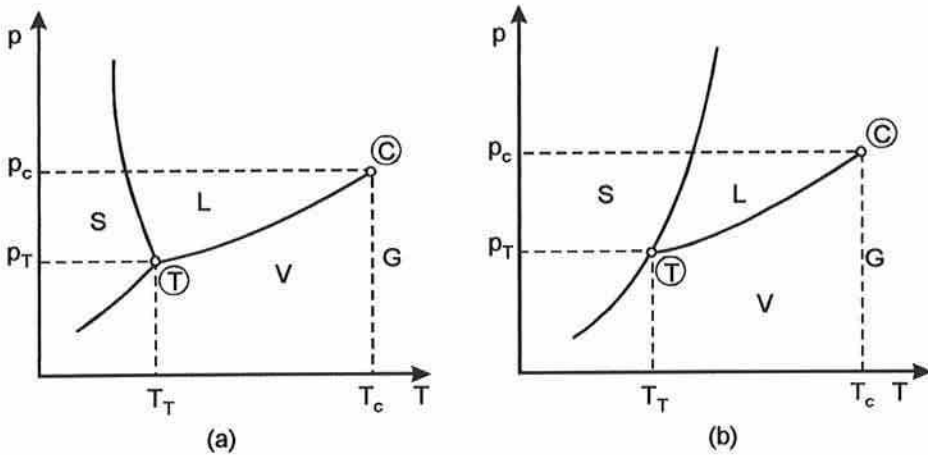


Infine, la presenza contemporanea di tre fasi (S-L-V) individua la linea del punto triplo, in corrispondenza alla quale si ha  $F = 3$  e  $P = 0$ . Nella linea del punto triplo "T", il sistema non ha gradi di libertà ed, infatti, pressione e temperatura sono indipendenti dalle frazioni di solido, liquido e vapore presenti.

Per tutte le sostanze, il passaggio da liquido a vapore avviene a temperature tanto più elevate quanto maggiori sono le pressioni, e sempre con aumenti di volume specifico. Invece, durante la fusione, il volume specifico può diminuire, come nel caso dell'acqua, od aumentare, come nella maggior parte delle sostanze. Le sostanze come l'acqua, che diminuiscono di volume durante la fusione, danno luogo ad un diagramma del tipo rappresentato in Fig. 6.1, dove la fusione avviene a temperature tanto più basse quanto maggiori sono le pressioni. La maggior parte delle sostanze, dà luogo invece ad un diagramma del tipo rappresentato in Fig. 6.2, dove la fusione avviene a temperature tanto più alte quanto maggiori sono le pressioni.

Nelle Fig. 6.1 e 6.2, sono illustrati gli andamenti di un'isobara e di tre isoterme. L'isobara evidenzia il comportamento del volume specifico e delle temperature durante i cambiamenti di fase, mentre le isoterme evidenziano la possibilità, o meno, di entrare nella zona d'equilibrio liquido-vapore aumentando la pressione. Se la temperatura è minore di quella del punto critico "C", aumentando la pressione si porta la sostanza prima allo stato di equilibrio liquido-vapore e, successivamente, allo stato liquido. Se invece la temperatura è superiore a quella critica la sostanza non può essere portata allo stato di equilibrio liquido-vapore per quanto si aumenti la pressione. In base a questa distinzione, se la temperatura è minore di quella critica si preferisce parlare di vapore, mentre se la temperatura è superiore a quella critica si preferisce parlare di gas. Va, tuttavia, precisato che vapori e gas, in quanto aeriformi, non differiscono per lo stato di aggregazione: la distinzione tra essi è convenzionale ed è basata unicamente sulla temperatura (minore o maggiore della temperatura critica) alla quale l'aeriforme si presenta.

Le diverse fasi, e le zone di coesistenza tra le fasi, sono ben individuate nei diagrammi  $(p, T)$ , ottenuti proiettando il diagramma collinare sul piano pressione-temperatura. Attraverso questa proiezione, si arriva a diagrammi del tipo di quelli rappresentati in Fig. 6.3, dove sono evidenziati i comportamenti di fluidi come l'acqua [Fig. 6.3 (a)], o come la maggior parte delle sostanze [Fig. 6.3 (b)]. Il particolare andamento della curva di equilibrio solido-liquido in Fig. 6.3 (a), giustifica il fatto che il punto di fusione del ghiaccio a pressione atmosferica (101,325 kPa) si trova a temperatura inferiore a quella del punto triplo dell'acqua ( $p_T = 0,61 \text{ kPa} < p_{atm}$ ). Invece, per la maggior parte delle sostanze, il diagramma di Fig. 6.3 (b) indica che l'equilibrio solido-liquido si sposta verso temperature più alte a pressioni superiori a quella del punto triplo.



**Figura 6.3** Diagramma  $(p, T)$  per fluidi che si comportano come l'acqua (a) o come la maggior parte delle sostanze (b).

A conclusione del paragrafo, si può osservare che i diagrammi tridimensionali danno luogo a rappresentazioni bidimensionali non troppo accurate, mentre i diagrammi bidimensionali  $(p, T)$  non consentono di riportare le variazioni dei potenziali termodinamici durante i cambiamenti di stato. Per superare queste limitazioni sarebbe possibile utilizzare, in linea di prin-

cipio, i diagrammi  $(p, v)$ , ottenuti proiettando i diagrammi collinari sul piano pressione-volume specifico. Tuttavia, i diagrammi  $(p, v)$  dei vapori non si prestano molto agli usi tecnici, dal momento che non sono quasi mai disegnati in scala lineare a causa della grande variazione tra i volumi specifici delle fasi liquido e vapore (per l'acqua: da 0,001 a  $10^2$  m<sup>3</sup>/kg). Se la scala non è lineare, l'utilità pratica delle rappresentazioni è limitata, in quanto si perde la proporzionalità tra aree e lavori scambiati con l'esterno. Tuttavia, i diagrammi  $(p, v)$  consentono di illustrare, in modo conveniente, alcune proprietà caratteristiche dei vapori e, come tali, saranno presi in considerazione nel paragrafo successivo.

### 6.3 DIAGRAMMA $(p, v)$

Un tipico diagramma  $(p, v)$  è schematizzato in Fig. 6.4, dove si nota come l'isoterma critica separi chiaramente la zona dei vapori da quella dei gas. All'interno della zona di equilibrio tra liquido e vapore, racchiusa dalla curva limite di Andrews, isoterme ed isobare coincidono ed i cambiamenti di stato tra liquido e vapore hanno luogo gradualmente.

Se il fluido è composto da una miscela di liquido e vapore, il suo titolo  $x$  può essere definito come il rapporto fra la massa del vapore e la massa totale della miscela di liquido e vapore

$$x = \frac{m_v}{m_l + m_v} \quad (6.1)$$

Pertanto, quando il titolo è uguale a zero, il punto si trova sul ramo inferiore della curva limite e lo stato corrispondente è definito "liquido saturo". Quando invece il titolo è uguale ad uno, il punto si trova sul ramo superiore della curva limite e lo stato corrispondente è definito "vapore saturo secco". Nella zona d'equilibrio liquido-vapore si parla, genericamente, di "vapore saturo" o "vapore saturo umido". Nell'ipotesi di scala lineare dei volumi specifici, il titolo può essere determinato come in Fig. 6.4, trovando il rap-

porto tra le lunghezze dei segmenti evidenziati

$$x = \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} \quad (6.2)$$

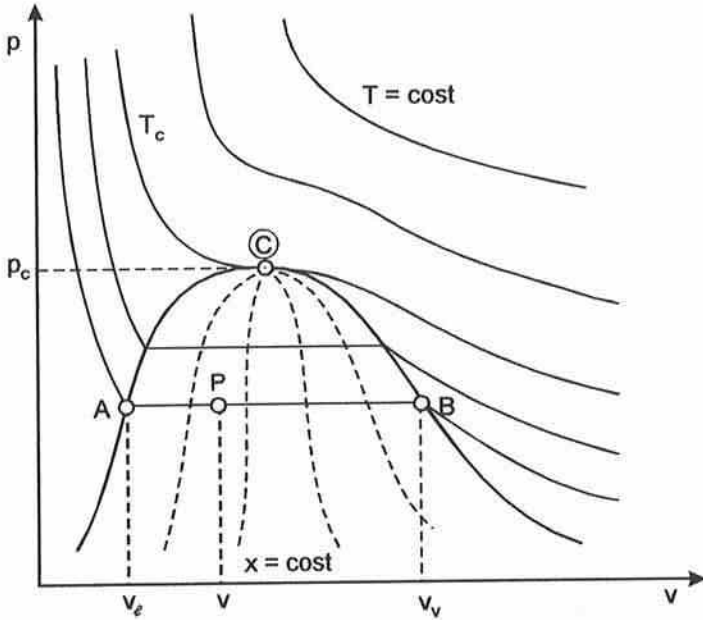


Figura 6.4 Diagramma ( $p, v$ ) dei vapori.

Infatti, tutte le proprietà estensive dei vapori saturi sono esprimibili come somma delle proprietà dei componenti: liquido saturo e vapore saturo secco. Di conseguenza anche il volume totale occupato dalla miscela, proprietà estensiva, può venire espresso dalla relazione

$$(m_\ell + m_v)v = m_\ell v_\ell + m_v v_v \quad (6.3)$$

Pertanto, dividendo i due membri per  $(m_\ell + m_v)$  si trova

$$v = (1-x)v_\ell + xv_v \quad (6.4)$$

ovvero

$$x = \frac{v - v_\ell}{v_v - v_\ell} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} \quad (6.5)$$

In base alle considerazioni riportate più sopra, ogni linea isoterma-isobara come  $\overline{AB}$ , può essere suddivisa in parti proporzionali, corrispondenti ai diversi valori del titolo. Congiungendo i punti interni alla curva limite, caratterizzati dallo stesso titolo, possono quindi essere segnate le curve isotitolo che, ovviamente, si diramano tutte dal punto critico.

### 6.3.1 Equazione di Clausius-Clapeyron

L'equazione di Clausius-Clapeyron consente di determinare le proprietà dei fluidi nelle zone d'equilibrio tra le diverse fasi. Essa può essere ricavata, sotto ipotesi molto generali, partendo dalle relazioni di Maxwell. Dalla relazione che esprime la derivata parziale della pressione rispetto alla temperatura, a volume specifico costante, si ha

$$\left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v = \left( \frac{\partial s}{\partial v} \right)_T \quad (6.6)$$

e, di conseguenza, per un cambiamento di stato si ottiene

$$\frac{dp}{dT} = \frac{s_f - s_i}{v_f - v_i} \quad (6.7)$$

dove si usa la derivata totale in quanto la trasformazione ha un solo grado di libertà. Nell'Eq. (6.7) il punto iniziale  $i$  ed il punto finale  $f$  si collocano, rispettivamente, sul ramo inferiore e su quello superiore della curva che delimita la zona dei vapori saturi.

Nel caso di un cambiamento di stato liquido-vapore, si definisce calore di vaporizzazione (condensazione)  $r$  il calore scambiato per vaporizzare

(condensare) l'unità di massa di liquido (vapore). Ovviamente, il calore di vaporizzazione (condensazione) si misura in joule, o chilojoule, per chilogrammo cioè [J/kg] o [kJ/kg] ed è positivo (fornito) nella evaporazione e negativo (sottratto) nella condensazione. Poiché, come si è detto più volte, il cambiamento di stato liquido-vapore è un processo isoterma, oltre che isobaro, risulta anche

$$s_v - s_\ell = \frac{Q_{\ell v}}{T} = \frac{r}{T} \quad (6.8)$$

dove  $r$  è il calore latente di vaporizzazione, cioè il calore fornito per far passare (reversibilmente) l'unità di massa di fluido dallo stato iniziale di liquido  $i = \ell$  allo stato finale di vapore  $f = v$ . Sostituendo la (6.8) nella (6.7), si ottiene

$$\frac{dp}{dT} = \frac{1}{v_v - v_\ell} \frac{r}{T} \quad (6.9)$$

ed esplicitando rispetto ad  $r$ , si arriva alla equazione di Clausius-Clapeyron

$$r = T(v_v - v_\ell) \frac{dp}{dT} \quad (6.10)$$

Integrando tale relazione si può determinare analiticamente la pressione di saturazione in funzione della temperatura. L'integrazione è particolarmente agevole nella zona dei bassi valori della pressione, dove risulta

$$v_v - v_\ell \cong v_v \cong \frac{RT}{p} \quad (6.11)$$

in quanto si può assumere che i vapori si comportino come gas ideali. Sostituendo la (6.11) nella (6.10) si arriva all'espressione

$$\frac{dp}{p} = \frac{r}{R} \frac{dT}{T^2} \quad (6.12)$$

che può essere integrata da uno stato di riferimento  $(p_0, T_0)$  ad uno stato generico  $(p, T)$

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = \int_{T_0}^T \frac{r}{R} \frac{dT}{T^2} \quad (6.13)$$

Nell'ipotesi che  $r$  possa essere considerato costante, la (6.13) fornisce immediatamente la relazione

$$\ln \frac{p}{p_0} = \frac{r}{R} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \quad (6.14)$$

che lega la pressione alla temperatura di saturazione.

Nonostante la relazione (6.14) sia stata ottenuta in ipotesi abbastanza ristrette, si è verificato sperimentalmente che la relazione generale equivalente

$$\ln p = A - \frac{B}{T} \quad (6.15)$$

ha validità molto estesa, purché  $A$  e  $B$  siano costanti caratteristiche determinate empiricamente per ciascuna sostanza. In prima approssimazione, le costanti  $A$  e  $B$  possono essere trovate semplicemente imponendo che la curva (6.15) passi per il punto triplo ed il punto critico. In questo modo, con riferimento ad alcuni dei valori riportati nella Tabella 6.1, si ottengono gli andamenti illustrati nella Fig. 6.5.

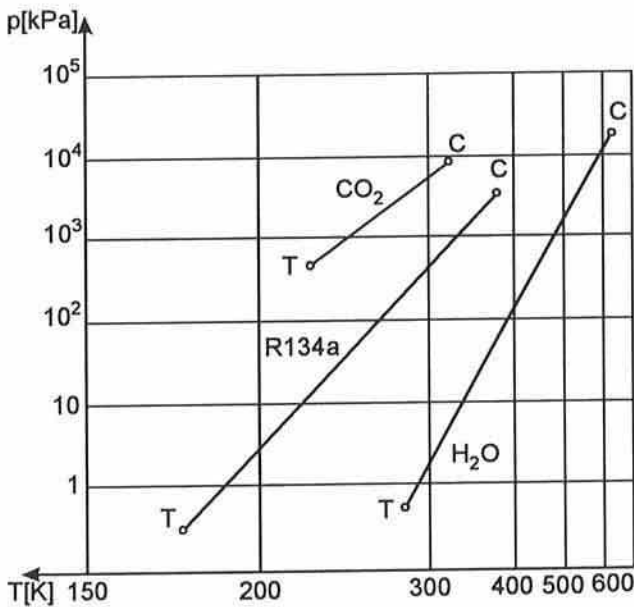
Dalle Eq. (6.14) e (6.15) si evince che, all'aumentare della pressione, cresce la temperatura di saturazione e viceversa, in armonia con quanto previsto dall'equazione di Clausius-Clapeyron. Infatti, dalla (6.10) si ricava che la pendenza  $dp/dT$  della curva d'equilibrio liquido-vapore deve essere positiva, poiché il volume specifico del vapore è sempre più grande del volume specifico del liquido. Nel caso particolare dell'acqua, la (6.15) può essere approssimata mediante la relazione

$$p = 0,1 \left( \frac{t}{100} \right)^4 \quad (6.16)$$

valida tra 90 °C e 250 °C, con  $p$  espresso in MPa e  $t$  in gradi celsius.

**TABELLA 6.1** Punto triplo e punto critico di alcune sostanze.

Sostanza	$p_T$ [kPa]	$T_T$ [K]	$p_c$ [kPa]	$T_c$ [K]
CH <sub>4</sub>	11,72	90,68	4595	190,56
CO <sub>2</sub>	517	216,48	7377	304,20
H <sub>2</sub> O	0,611	273,16	22055	647,13
N <sub>2</sub>	12,53	63,50	3390	126,20
NH <sub>3</sub>	6,10	195,49	11304	405,36
O <sub>2</sub>	0,15	54,36	5043	154,58
R134a	0,39	169,85	4056	374,18



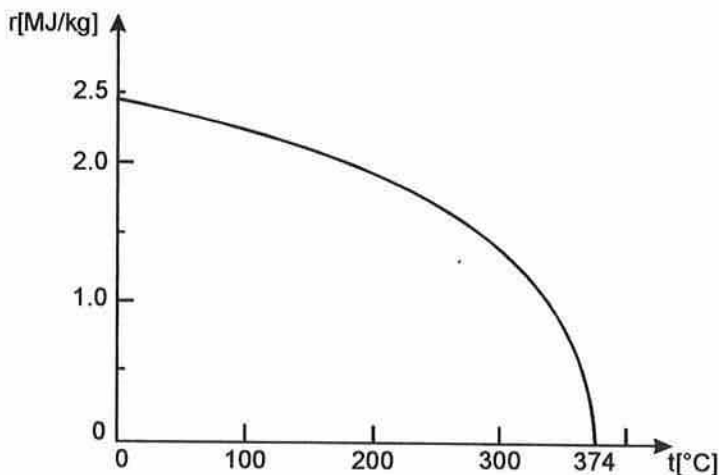
**Figura 6.5** Curve d'equilibrio liquido-vapore.



Se, in alternativa, è nota la curva pressione-temperatura, l'Eq. (6.12) scritta nella forma

$$r \cong \frac{RT^2}{p} \frac{dp}{dT} \quad (6.17)$$

consente una stima del calore di vaporizzazione, valida per bassi valori della pressione. Con l'aumentare della pressione, infatti, il volume specifico del vapore si avvicina sempre più al volume specifico del liquido e, di conseguenza, dall'Eq. (6.10) si ha che il calore di vaporizzazione si riduce progressivamente sino ad annullarsi in corrispondenza al punto critico dove si ha  $v_v = v_l$ . Nel caso particolare dell'acqua, ad esempio, il calore di vaporizzazione ha l'andamento illustrato nella Fig. 6.6.



**Figura 6.6** Andamento del calore di vaporizzazione dell'acqua in funzione della temperatura.

Per un cambiamento di stato solido-liquido, la relazione di Clausius-Clapeyron può essere scritta nella forma

$$\lambda = T (v_l - v_s) \frac{dp}{dT} \quad (6.18)$$

dove  $\lambda$  è il calore latente di fusione, cioè il calore fornito durante la fusione per far passare (reversibilmente) l'unità di massa di fluido dallo stato iniziale di solido  $i = s$  allo stato finale di liquido  $f = \ell$ . Pertanto, se il volume specifico del liquido è più grande del volume specifico del solido, come avviene per la maggior parte delle sostanze, allora la pendenza  $dp/dT$  della curva di equilibrio solido-liquido è positiva. Se invece il volume specifico del liquido è più piccolo del volume specifico del solido, come nel caso dell'acqua, allora la pendenza della curva d'equilibrio solido-liquido è negativa.

### Esempio 6.1

Si ricavi la relazione (6.10) di Clausius-Clapeyron, valida per il cambiamento di fase vapore-liquido, senza ricorrere alle relazioni di Maxwell.

#### Soluzione

Con riferimento alla Fig. 6.7, si consideri un ciclo di Carnot infinitesimo tra le temperature  $T$  e  $(T - dT)$ . Per tale ciclo si ha

$$\eta_{\text{Carnot}} = \frac{T - (T - dT)}{T} = \frac{dT}{T} = \frac{dL}{Q}$$

dove  $Q = r$ , mentre il lavoro coincide con l'area del ciclo

$$dL \cong (v_v - v_\ell) dp$$

Sostituendo nell'espressione del rendimento si ha

$$\frac{dT}{T} = \frac{(v_v - v_\ell)}{r} dp$$

ed, esplicitando rispetto ad  $r$ , si ottiene

$$r = T(v_v - v_\ell) \frac{dp}{dT}$$

ovvero la relazione (6.10).

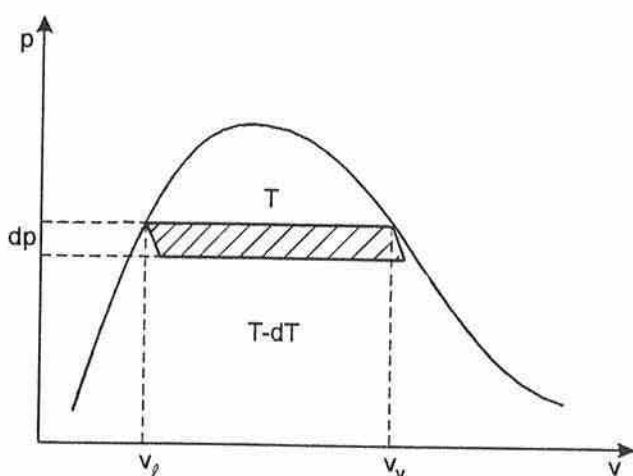


Figura 6.7 Ciclo di Carnot infinitesimo sul diagramma  $(p, v)$  dei vapori.

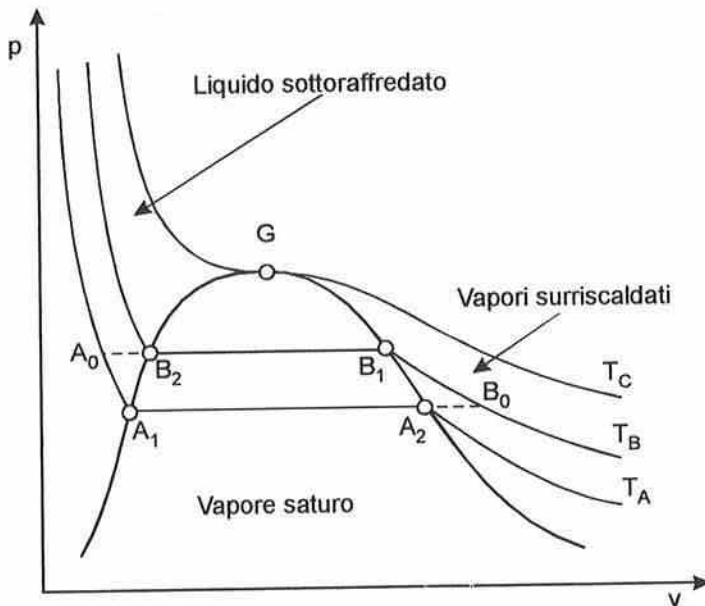
### 6.3.2 Liquido Sottoraffreddato e Vapore Surriscaldato

Nella pratica, capita spesso che i termini “liquido sottoraffreddato” e “vapore surriscaldato” siano usati in modo non appropriato. E' utile quindi fornire le definizioni corrette, riferite alle situazioni schematizzate nella Fig. 6.8.

Si dice “sottoraffreddato”, un liquido in  $A_0$ , perché si trova a temperatura  $T_A$ , inferiore alla temperatura  $T_B$  del liquido saturo in  $B_2$  che ha la stessa pressione, ovvero si trova a pressione  $p_{A0}$  superiore alla pressione  $p_{A1}$  del liquido saturo che ha la stessa temperatura. Pertanto, l'aggettivo sottoraffreddato non fa alcun riferimento al valore della temperatura e, di conseguenza, possono trovarsi nello stato di “sottoraffreddamento” anche liquidi a temperatura notevolmente superiore a quella ambiente. Significativo, a questo proposito, è il caso degli impianti di riscaldamento ad acqua “sottoraffreddata”, nei quali si impiegano pressioni dell'ordine di 0,7 - 1

MPa per poter utilizzare acqua allo stato liquido a temperature dell'ordine di 150 - 160 °C. Naturalmente, nella pratica commerciale, il termine sottoraffreddato non appare particolarmente felice e quindi, spesso, si parla di impianti ad acqua surriscaldata (che non esiste nello stato di equilibrio). Più accurata ed ugualmente rispettosa delle esigenze commerciali appare, semmai, la definizione equivalente d'impianti ad acqua "pressurizzata".

Si dice invece "surriscaldato", un vapore in  $B_0$ , perché si trova a temperatura  $T_B$ , maggiore della temperatura  $T_A$  del liquido saturo in  $A_2$  che ha la stessa pressione, ovvero si trova a pressione  $p_{B_0}$  inferiore alla pressione  $p_{B_1}$  del liquido saturo che ha la stessa temperatura. Pertanto, anche in questo caso, l'aggettivo surriscaldato non fa alcun riferimento al valore della temperatura e, di conseguenza, possono trovarsi nello stato di "surriscaldamento" anche vapori a temperatura ambiente. Significativo, a questo proposito, è il caso del vapor d'acqua contenuto nell'aria che, come vedremo nel seguito, è quasi sempre surriscaldato.



**Figura 6.8** Zone del liquido sottoraffreddato, del vapore saturo e surriscaldato e del gas.

## 6.4 FATTORE DI COMPRIMIBILITÀ

Al Capitolo 5 si è visto come i gas ideali seguano le equazioni di stato

$$p\bar{v} = \bar{R}T \quad (6.19)$$

e

$$pv = RT \quad (6.20)$$

dove  $\bar{R}$  è la costante universale,  $\bar{v}$  è il volume specifico molare,  $R$  è la costante del gas e  $v$  è il volume specifico riferito all'unità di massa. Se quindi si definisce "fattore di comprimibilità" il valore, necessariamente uguale, dei rapporti

$$Z = \frac{p\bar{v}}{\bar{R}T} \left( = \frac{p\bar{v}}{\bar{R}T} \cdot \frac{M}{M} \right) = \frac{pv}{RT} \quad (6.21)$$

dalle Eq. (6.19) e (6.20) segue che, in un gas ideale, si ha  $Z \equiv 1$ . Per un aeriiforme reale, invece, il fattore di comprimibilità è, in generale, diverso da 1 e la differenza è indicativa della deviazione dal comportamento ideale. Infatti, il fattore di comprimibilità può venire espresso in funzione di temperatura e pressione ed è quindi rappresentabile sul piano cartesiano ( $p, Z$ ) mediante una serie di curve parametriche nella temperatura. Se tali curve sono tracciate utilizzando le variabili adimensionali

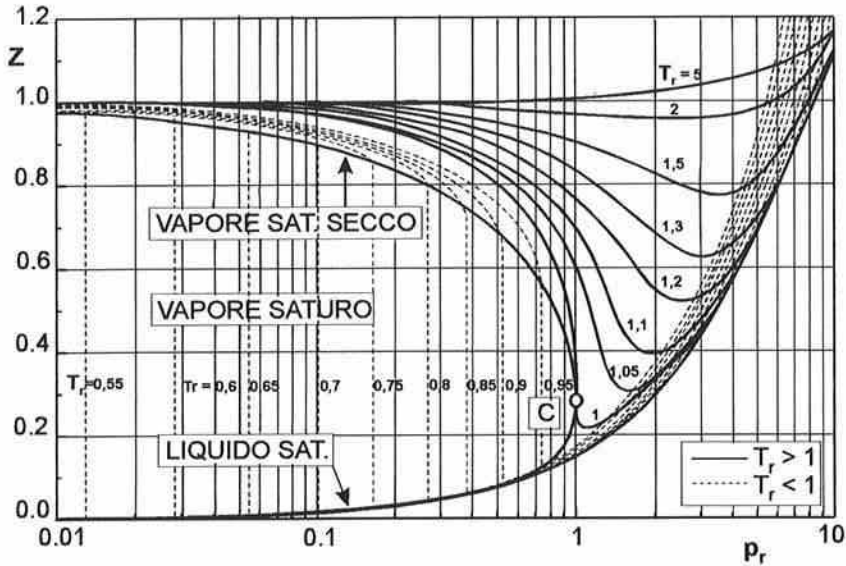
$$p_r = \frac{p}{p_c} \quad (6.22)$$

e

$$T_r = \frac{T}{T_c} \quad (6.23)$$

il principio degli stati corrispondenti garantisce che il diagramma generalizzato così ottenuto è valido, con buona approssimazione, per la maggior parte dei gas reali. Le variabili adimensionali, definite dalle Eq. (6.22) e (6.23), si dicono "ridotte" e si indicano col pedice  $r$ , mentre i valori di rife-

rimento si indicano col pedice  $c$ , in quanto corrispondono alla pressione ed alla temperatura del punto critico. Al fine di poter meglio evidenziare la zona del vapore saturo, spesso la scala delle pressioni ridotte è logaritmica. Si ottiene così il diagramma generalizzato di Fig. 6.9, dove è chiaramente visibile la zona del vapore saturo estesa sino al punto critico ( $T_r = p_r = 1$ ).

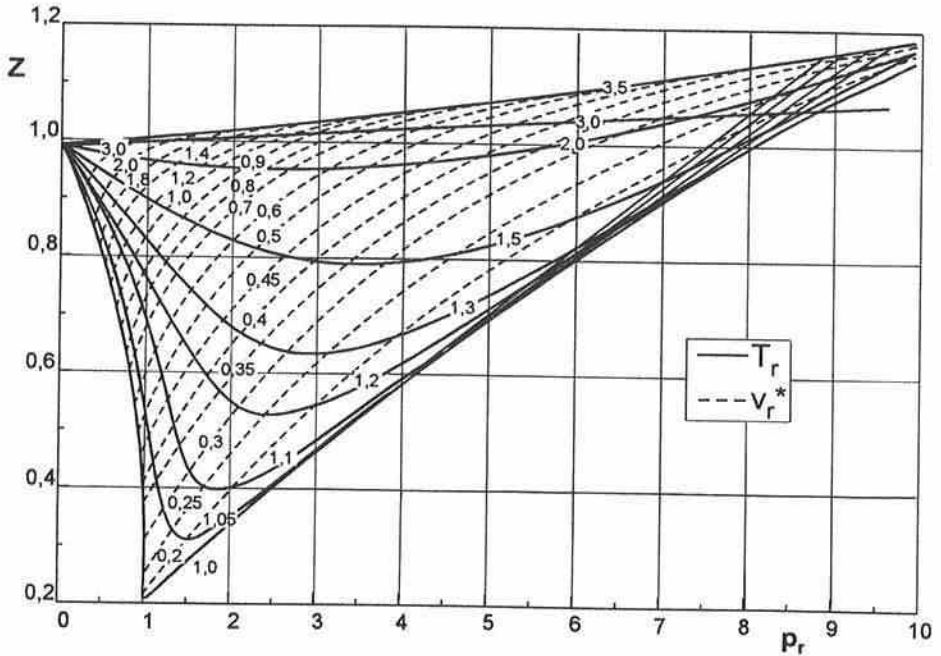


**Figura 6.9** Diagramma generalizzato del fattore di comprimibilità che evidenzia la zona del vapore saturo umido.

Nel diagramma del fattore di comprimibilità, è possibile riportare anche le curve a volume specifico ridotto costante, in modo da consentire la determinazione di  $Z$  in funzione di due qualunque delle tre variabili ridotte: pressione, temperatura e volume specifico. Sperimentalmente si è verificato che, nel tracciamento di tale diagramma, si ottengono risultati migliori se il volume specifico ridotto è definito come

$$v_r^* = \frac{v}{RT_c/p_c} \quad (6.24)$$

anziché come  $v_r = v/v_c$ . Si ricava così il diagramma di Fig. 6.10, con l'indicazione delle curve a  $v_r^* = \text{cost.}$



**Figura 6.10** Diagramma generalizzato del fattore di comprimibilità con l'indicazione delle curve a volume specifico ridotto costante.

Il diagramma generalizzato del fattore di comprimibilità, anche se ottenuto empiricamente, si presta ad essere interpretato in termini di semplici considerazioni di carattere fisico, fondate sulla teoria cinetica dei gas. Ad esempio si può osservare che, nella zona dei bassi valori di  $T_r$ , si ha  $Z > 1$  per alti valori della pressione ridotta, mentre si ha  $Z < 1$  per bassi valori della pressione ridotta. Se si esprime il fattore di comprimibilità nella forma

$$Z = \left( \frac{p}{RT} \right) v \quad (6.25)$$

si può dedurre che, per  $Z > 1$ , il volume specifico del gas è maggiore di

quello occupato dal gas ideale che si trova nelle stesse condizioni di temperatura e pressione mentre, per  $Z < 1$ , il volume specifico del gas è minore di quello occupato dal gas ideale che si trova nelle stesse condizioni di temperatura e pressione. Ciò si giustifica facilmente pensando alle azioni intermolecolari tipiche dei gas reali. Per alti valori della pressione, infatti, le molecole sono vicine e quindi prevalgono le azioni repulsive (che fanno aumentare il volume specifico rispetto al valore di gas ideale). Viceversa, per bassi valori della pressione, le molecole sono lontane e quindi prevalgono le azioni attrattive (che fanno diminuire il volume specifico rispetto al valore di gas ideale). Infine si vuole far notare che nella zona dei  $T_r$  molto elevati (non rappresentata nelle Fig. 6.9 e 6.10 perché di scarso interesse per le applicazioni qui considerate) il fattore di comprimibilità tende a 1. Ciò si giustifica osservando che, al crescere di  $T_r$ , aumenta l'importanza degli effetti inerziali rispetto agli effetti di attrazione e repulsione di modo che, per altissimi valori di  $T_r$ , il comportamento dei gas reali tende al comportamento di gas ideale.

Si noti che, a temperature e pressioni vicine a quella ambiente, i gas di interesse tecnico sono caratterizzati da pressioni ridotte prossime a zero e da temperature ridotte non molto maggiori di 1, essendo  $p_a \ll p_c$  e  $T_a > T_c$ . Pertanto, i punti rappresentativi degli stati di questi gas si trovano tutti nelle vicinanze del punto di coordinate  $p_r = 0$  e  $Z = 1$ .

### Esempio 6.2

Si determinino i valori della pressione e della temperatura ridotte per l'azoto, nelle condizioni di pressione atmosferica e temperatura assoluta pari a 300 K.

#### Soluzione

Per l'azoto si ha  $p_c = 3390$  kPa e  $T_c = 126,20$  K. Di conseguenza, in base alle definizioni (6.22) e (6.23), risulta

$$p_r = \frac{p}{p_c} = \frac{101,325}{3390} = 0,0299$$



e

$$T_r = \frac{T}{T_c} = \frac{300}{126,2} = 2,38$$

A questi valori di pressione e temperatura ridotta, corrisponde un fattore di comprimibilità  $Z \cong 1$  sul diagramma di Fig. 6.9. Pertanto è pienamente giustificata l'ipotesi di considerare l'azoto un gas a comportamento ideale in condizioni prossime a quelle ambiente. Conclusioni simili valgono anche per gran parte dei gas d'interesse pratico quali, ad esempio, l'ossigeno, l'anidride carbonica, l'ammoniaca ed il metano. Infatti, in base alla Tabella 6.1, questi gas sono caratterizzati da valori della pressione critica molto superiori a alla pressione atmosferica e da valori della temperatura critica inferiori alla temperatura ambiente.

## 6.5 EQUAZIONI DI STATO DEGLI AERIFORMI

L'utilizzazione dei diagrammi generalizzati del fattore di comprimibilità, per rappresentare il legame funzionale tra pressione, volume specifico e temperatura, sottintende un approccio grafico alla valutazione delle proprietà termodinamiche. Un tale approccio, tuttavia, mal si concilia con l'uso dei calcolatori elettronici, più adatti all'impiego d'espressioni analitiche piuttosto che alla manipolazione automatica dei diagrammi. D'altra parte l'equazione di stato dei gas ideali, pur utilissima nei calcoli di prima approssimazione, non può essere utilizzata in fase di progettazione di apparecchiature ed impianti quando il fattore di comprimibilità sia diverso da 1. Occorre, quindi, avere a disposizione delle equazioni di stato dei gas reali che possano rappresentare il comportamento degli aeriformi nell'intera regione dei vapori e dei gas. Queste equazioni di stato possono essere suddivise in due grandi classi: teoriche ed empiriche. Per ragioni di spazio qui si accennerà soltanto a tre equazioni di stato: le prime due scelte per il loro interesse teorico, e la terza presa in considerazione per la sua importanza pratica.

### 6.5.1 Equazione di Van der Waals

L'equazione di Van der Waals è la più antica e, forse, la più conosciuta delle equazioni di stato degli aeriformi. Essa conserva, ancor oggi, un grande interesse concettuale poiché tiene conto delle due cause principali che determinano lo scostamento tra i comportamenti di gas ideale e gas reale: il volume non nullo delle molecole e le forze intermolecolari.

La correzione per tener conto del volume non nullo, o "covolume", occupato dalle molecole è espressa mediante la relazione

$$\frac{p}{p_i} = \frac{v}{v - b} \quad (6.26)$$

dove  $b$  è il covolume mentre  $p_i = RT/v$  è la pressione di gas ideale. In base all'equazione dei gas ideali (6.20), la relazione (6.8) può essere scritta nella forma

$$p = \frac{RT}{v - b} \quad (6.27)$$

dove è messo in evidenza che, al tendere ad infinito della pressione, il volume specifico non si annulla, ma diventa uguale al volume occupato dalle molecole.

La correzione per tener conto delle forze intermolecolari si basa sull'ipotesi che, nella maggior parte delle situazioni d'interesse pratico, le molecole siano tra loro distanti abbastanza da far prevalere le azioni attrattive. Ciò si traduce in una diminuzione del valore della pressione rispetto a quello espresso dall'Eq. (6.27), che è riferito all'assenza d'interazioni molecolari. Per convincersene, si può esaminare la Fig. 6.11 nella quale è schematizzato un recipiente che contiene un grande numero di molecole. Per ragioni di simmetria, le forze sulle molecole che si trovano all'interno del recipiente si compensano l'una con l'altra ed hanno quindi risultante nulla. Invece, le forze sulle molecole che si trovano nelle vicinanze della parete

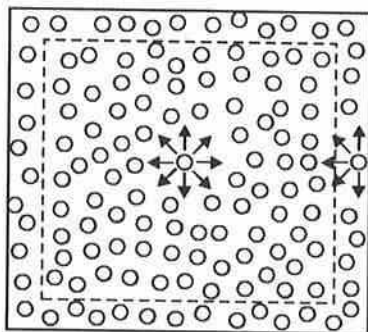
non si compensano completamente ed hanno quindi risultante diretta verso l'interno. Di conseguenza, le azioni intermolecolari (attrattive) frenano le molecole nell'ultimo tratto di percorso prima di urtare le pareti. Poiché la pressione è dovuta, appunto, allo scambio di quantità di moto associato agli urti con le pareti, si deduce che il termine correttivo da apportare all'Eq. (6.27) deve essere negativo. Si ha quindi, per l'equazione in forma finale

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2} \Rightarrow \left( p + \frac{a}{v^2} \right) (v-b) = RT \quad (6.28)$$

dove le costanti positive  $a$  e  $b$  hanno valori diversi per ogni gas. Se si moltiplicano entrambi i membri dell'Eq. (6.28) per  $v / RT$ , si ottiene

$$Z = \frac{pv}{RT} = \frac{v}{v-b} - \frac{a}{RTv} \quad (6.29)$$

ovvero l'espressione, secondo Van der Waals, del fattore di comprimibilità.



**Figura 6.11** Schematizzazione d'interazioni molecolari attrattive in un gas reale.

### 6.5.2 Equazione del Viriale

L'equazione del viriale è ricavata direttamente dalla teoria cinetica dei gas ed è scritta, di solito, come serie di potenze inverse del tipo

$$Z = 1 + \frac{B}{v} + \frac{C}{v^2} + \frac{D}{v^3} + \dots \quad (6.30)$$

dove  $B, C, D \dots$  sono funzioni della temperatura, variabili da gas a gas. In base alla teoria cinetica si ha che  $B$  deriva dalle interazioni delle molecole a due a due,  $C$  dalle interazioni a gruppi di tre, e così via. Le interazioni diminuiscono progressivamente d'importanza e quindi la serie converge con sufficiente rapidità. In particolare, se si trascurano tutte le interazioni, si ha  $Z \equiv 1$  come per i gas ideali.

### 6.5.3 Equazione di Lee-Kesler

L'equazione di Lee-Kesler è una delle più accurate tra le equazioni di stato empiriche. Essa è basata su 12 costanti determinate sperimentalmente per ogni gas e, di solito, è scritta nella forma pseudo viriale

$$Z = 1 + \frac{B}{v_r^*} + \frac{C}{(v_r^*)^2} + \frac{F}{(v_r^*)^5} + \frac{c_4}{T_r^3 (v_r^*)^2} \left[ \beta + \frac{\gamma}{(v_r^*)^2} \right] \exp \left[ -\frac{\gamma}{(v_r^*)^2} \right] \quad (6.31)$$

dove  $T_r$  è definita dall'equazione (6.23),  $v_r^*$  è definito dall'equazione (6.24) mentre si ha

$$B = b_1 - \frac{b_2}{T_r} - \frac{b_3}{T_r^2} - \frac{b_4}{T_r^3} \quad (6.32)$$

$$C = c_1 - \frac{c_2}{T_r} - \frac{c_3}{T_r^3} \quad (6.33)$$

e

$$F = f_1 + \frac{f_2}{T_r} \quad (6.34)$$

Le equazioni (6.31) - (6.34), insieme con l'equazione di Clausius-

Clapeyron, sono comunemente utilizzate per costruire i diagrammi termodinamici d'uso corrente.

## 6.6 DIAGRAMMI TERMODINAMICI

Nella determinazione delle proprietà termodinamiche dei vapori, si sceglie come stato di riferimento quello del liquido saturo in ben precisate condizioni di temperatura-pressione ( $T_0$ ,  $p_0$ ) ed, in corrispondenza allo stato di riferimento, generalmente si assume  $s_0 = h_0 = 0$ . Nel calcolo delle proprietà si parte dalla curva limite inferiore e si utilizzano le relazioni ricavate nei capitoli precedenti. Così, le valutazioni delle proprietà del liquido saturo sono basate sull'impiego delle relazioni valide per i fluidi incomprimibili, eventualmente semplificate assumendo valori costanti del calore specifico. In questo modo, per  $s_0 = 0$  e nell'ipotesi di  $c = \text{cost}$ , l'entropia del liquido saturo può essere scritta nella forma

$$s_\ell = \int_{T_0}^T \frac{c}{T} dT = c \ln \frac{T}{T_0} \quad (6.35)$$

Analogamente, per  $h_0 = 0$  e  $c = \text{cost}$ , l'entalpia del liquido saturo è data dalla relazione

$$h_\ell = \int_{T_0}^T c dT + \int_{p_0}^p v dp = c(T - T_0) + v(p - p_0) \quad (6.36)$$

dove il termine  $v(p - p_0)$  è solitamente trascurabile rispetto al termine  $c(T - T_0)$ , almeno nei punti della curva limite inferiore abbastanza lontani dal punto critico. Se poi, come nel caso dell'acqua, si assume  $T_0 = 273,16$  K, allora la (6.36) può essere approssimata scrivendo

$$h_\ell \cong ct \quad (6.37)$$

dove  $t$  è la temperatura espressa in gradi celsius.

Le proprietà termodinamiche del vapore saturo secco si ottengono immediatamente da quelle del liquido saturo ponendo

$$s_v = s_\ell + \frac{r}{T} \quad (6.38)$$

ed

$$h_v = h_\ell + r \quad (6.39)$$

dove  $r$  è il calore di vaporizzazione e  $T$  è la temperatura dell'isobara-isoterma considerata.

Le proprietà termodinamiche di vapori surriscaldati (e gas) possono essere approssimate mediante le relazioni ricavate al Capitolo 5 per gas ideali a calori specifici costanti. In questo caso, l'entropia e l'entalpia sono espresse come

$$s_{surr} = s_v + \int_{T_v}^T \frac{c_p}{T} dT = s_v + c_p \ln \frac{T}{T_v} \quad (6.40)$$

$$h_{surr} = h_v + \int_{T_v}^T c_p dT = h_v + c_p (T - T_v) \quad (6.41)$$

lungo le isobare, e come

$$s_{surr} = s_v + \int_{T_v}^T \frac{c_v}{T} dT = s_v + c_v \ln \frac{T}{T_v} \quad (6.42)$$

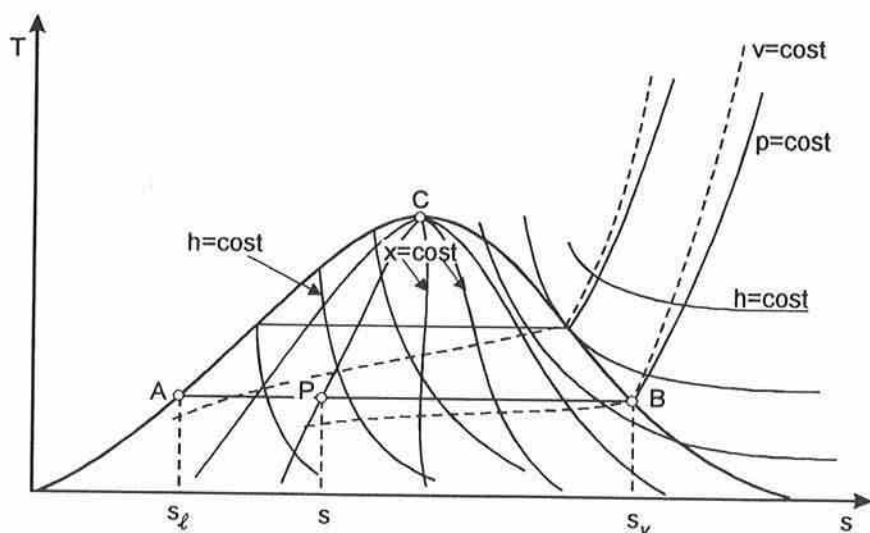
$$\begin{aligned} h_{surr} &= h_v + \int_{T_v}^T c_v dT + \int_{p_v}^p v dp \\ &= h_v + c_v (T - T_v) + v(p - p_v) = h_v + c_p (T - T_v) \end{aligned} \quad (6.43)$$

lungo le isocore. Ovviamente, valutazioni più accurate sono possibili utilizzando le metodologie che saranno illustrate nel Paragrafo 6.7.

Per facilitare la rappresentazione grafica e le analisi energetiche dei cicli termodinamici a vapore, sono stati sviluppati alcuni diagrammi di uso pratico che prendono il nome dagli assi coordinati di riferimento utilizzati:  $(T, s)$ ,  $(h, s)$  e  $(p, h)$ . I diagrammi  $(T, s)$  ed  $(h, s)$  dell'acqua e  $(T, s)$  e  $(p, h)$  del fluido frigorifero R134a sono riportati in Appendice. I diagrammi  $(T, s)$  trovano impiego generale nella rappresentazione di tutti i cicli, ma non si prestano alle analisi quantitative perché non consentono la lettura diretta delle entalpie. Il diagramma  $(h, s)$  è utilizzato, di preferenza, nell'analisi dei cicli per la produzione di lavoro, mentre il diagramma  $(p, h)$  trova impiego nell'analisi dei cicli inversi.

### 6.6.1 Diagramma $(T, s)$

Il diagramma  $(T, s)$  dei vapori è schematizzato in Fig. 6.12, dove si fa riferimento all'acqua fissando, come si è detto, l'origine nel punto a temperatura  $T_0 = 273,16$  K sulla curva limite inferiore.



**Figura 6.12** Diagramma  $(T, s)$  riferito all'acqua, con origine nel punto a temperatura  $T_0 = 273,16$  K sulla curva limite inferiore.

Nella zona del liquido sottoraffreddato, le isobare sono molto vicine alla curva limite inferiore, tanto che sono rappresentate distinte da essa soltanto a scopi didattici. Il titolo in un punto generico all'interno della curva d'equilibrio può essere determinato come in figura, trovando il rapporto  $x = \overline{AP} / \overline{AB}$  tra le lunghezze dei segmenti indicati. Infatti, l'entropia della miscela in P, in quanto proprietà estensiva, può essere scritta nella forma

$$(m_\ell + m_v)s = m_\ell s_\ell + m_v s_v \quad (6.44)$$

e quindi, dividendo i due membri per  $(m_\ell + m_v)$ , si ha

$$s = (1 - x)s_\ell + x s_v \quad (6.45)$$

ovvero

$$x = \frac{s - s_\ell}{s_v - s_\ell} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} \quad (6.46)$$

Di conseguenza, ogni linea isoterma-isobara, come  $\overline{AB}$ , può essere suddivisa in parti corrispondenti ai diversi valori del titolo. Congiungendo i punti interni alla curva limite, caratterizzati dallo stesso titolo, si ottengono le curve isotitolo che, ovviamente, si diramano tutte dal punto critico.

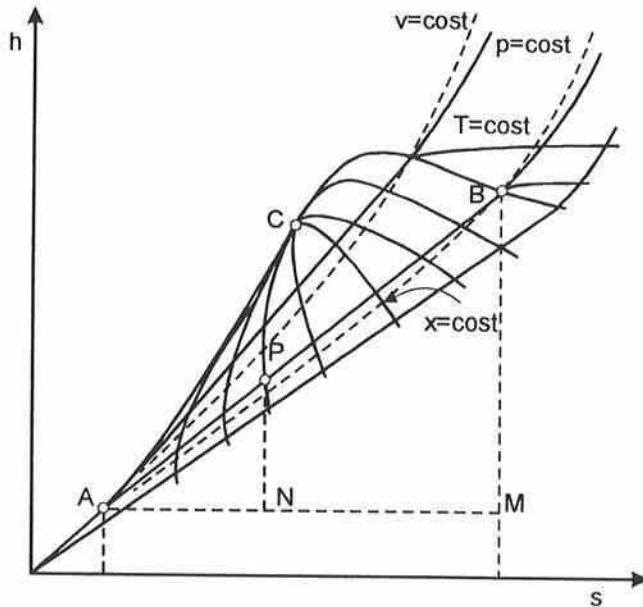
Nel passaggio dall'interno all'esterno della zona del vapore saturo umido

- le isobare presentano un punto angoloso; mentre, nella zona degli aeriformi
- per bassi valori della pressione ed alti valori della temperatura, le isoentalpiche tendono a coincidere con le isoterme e
- le isocore sono più ripide delle isobare, in quanto si ha  $c_v < c_p$  e, come si è detto, i calori specifici nel punto considerato sono proporzionali alle sottotangenti alla trasformazione.



### 6.6.2 Diagramma ( $h, s$ )

Il diagramma ( $h, s$ ) dei vapori è schematizzato in Fig. 6.13, dove si fa ancora riferimento all'acqua ponendo l'origine nel punto a temperatura  $T_0 = 273,16$  K sulla curva limite inferiore.



**Figura 6.13** Diagramma ( $h, s$ ) riferito all'acqua, con origine nel punto a temperatura  $T_0 = 273,16$  K sulla curva limite inferiore.

Il titolo in un punto generico all'interno della curva limite può essere determinato come in figura, trovando il rapporto tra le lunghezze dei segmenti evidenziati. Infatti, per le considerazioni svolte in precedenza, si ha

$$x = \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{NP}}{\overline{MB}} = \frac{s - s_\ell}{s_v - s_\ell} = \frac{h - h_\ell}{h_v - h_\ell} = \frac{rx/T}{r/T} = \frac{rx}{r} = x \quad (6.47)$$

Congiungendo i punti interni alla curva limite caratterizzati dallo stesso ti-

tolo si ottengono le curve isotitolo che, ovviamente, si diramano tutte dal punto critico.

Nella zona dei vapori saturi

- la pendenza delle isobare è proporzionale alla temperatura, in quanto si ha

$$\left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)_p = T \quad (6.48)$$

mentre, essendo la temperatura una funzione continua

- le isobare non presentano punti angolosi nel passaggio dall'interno all'esterno della zona del vapore saturo umido.

Nella zona di vapori surriscaldati e dei gas

- isobare ed isocore presentano andamenti simili a quelli già illustrati nel diagramma  $(T, s)$  e
- le isoterme tendono a coincidere con le isoentalpiche per bassi valori della pressione ed alti valori della temperatura.

### 6.6.3 Diagramma $(p, h)$

Il diagramma  $(p, h)$  dei vapori è schematizzato in Fig. 6.14, dove s'impiega una scala logaritmica per la pressione e si fa riferimento al fluido R134a, utilizzato nella refrigerazione. Si osservi come, nella zona del liquido, le isoterme abbiano un andamento verticale, in quanto praticamente coincidenti con le isoentalpiche. Nella zona dei vapori, il titolo in un punto generico può essere determinato come in figura, trovando il rapporto tra le lunghezze dei segmenti evidenziati. Per la proprietà estensiva entalpia, infatti, si ha

$$h = (1-x)h_\ell + x h_v \quad (6.49)$$

ovvero

$$x = \frac{h - h_\ell}{h_v - h_\ell} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} \quad (6.50)$$

Ancora una volta, congiungendo i punti interni alla curva limite caratterizzati dallo stesso titolo, si ottengono le curve isotitolo che, ovviamente, si diramano dal punto critico.

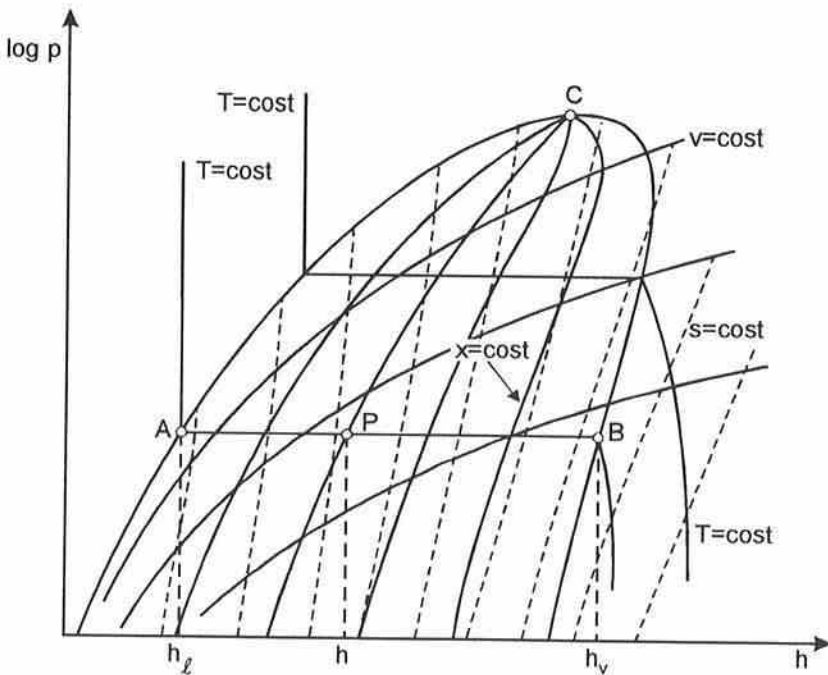
In tutto il diagramma

- le isoentropiche hanno pendenza sempre positiva e non formano punti angolosi in quanto, dall'applicazione del primo principio scritto per i parametri interni, risulta

$$\left(\frac{\partial p}{\partial h}\right)_s = \frac{1}{v} \quad (6.51)$$

Nella zona del vapore surriscaldato e del gas

- per bassi valori della pressione ed alti valori della temperatura, le isoterme tendono a coincidere con le isoentalpiche.



**Figura 6.14** Diagramma  $(p, h)$ , con scala logaritmica delle pressioni, riferito al fluido R134a.

## 6.7 PROPRIETÀ TERMODINAMICHE DEGLI AERIFORMI

Per valutare con grande accuratezza le proprietà termodinamiche dei vapori surriscaldati e dei gas, cioè degli aeriformi, bisogna far ricorso alle relazioni di Maxwell, ricavate al Capitolo 4, ed alle espressioni dei fattori di comprimibilità forniti dalle equazioni di stato. Poiché la maggior parte delle equazioni di stato (e tra esse tutte quelle qui considerate) sono esplicitabili soltanto in termini di pressione, nei calcoli conviene fare riferimento alle relazioni termodinamiche in cui compaiono le derivate parziali della pressione.

Nel calcolo delle proprietà, si segue il percorso  $\overline{OMNP}$ , illustrato nella Fig. 6.15. Il punto di partenza è l'origine delle coordinate O posta in una zona dove la pressione  $p_o$  è abbastanza bassa da far ritenere che le molecole siano molto distanti tra loro, e quindi non esercitino azioni attrattive o repulsive. Il comportamento del gas reale nel punto O è perciò assimilabile a quello di un gas ideale avente la stessa massa molare e, di conseguenza, risulta

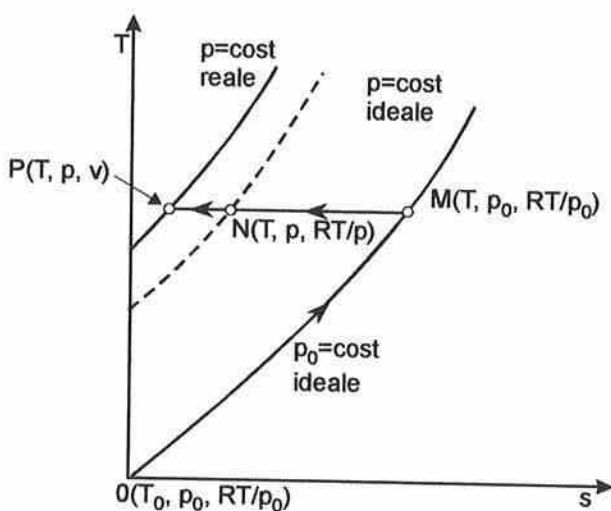
$$v_o = \frac{\bar{R} T_o}{M p_o} = \frac{R T_o}{p_o} \quad (6.52)$$

Il secondo punto M differisce da O solo per la temperatura e quindi, lungo l'isobara  $\overline{OM}$ , il gas si comporta ancora come un gas ideale. Il terzo punto N si trova sulla stessa isoterma di M e differisce da M solo per la pressione. Se, per convenienza di calcolo, si assume che lungo l'isoterma  $\overline{MN}$  il gas si comporti ancora come ideale, il volume specifico lungo  $\overline{MN}$  è ancora valutabile in base all'equazione di stato dei gas ideali e quindi, nel punto N, si ha

$$v_i = \frac{R T}{p} \quad (6.53)$$

Il cammino  $\overline{OMN}$  porterebbe un gas ideale, con la stessa massa molare del

gas reale considerato, fino alle condizioni di temperatura e pressione alle quali si vogliono valutare le proprietà termodinamiche. Tuttavia, le proprietà termodinamiche del gas ideale in N differiscono da quello del gas reale nel punto P. Di conseguenza, il passaggio finale da N a P può essere utilizzato per valutare lo scostamento tra le proprietà del gas reale e quelle del gas ideale, con la stessa massa molare, che si trova nelle stesse condizioni di temperatura e pressione.



**Figura 6.15** Percorso seguito nel calcolo delle proprietà termodinamiche degli aeriformi.

### 6.7.1 Variazioni di Entropia

Le relazioni differenziali utilizzate per valutare le variazioni d'entropia sono la

$$ds = \frac{c_p}{T} dT - \frac{R}{p} dp \quad (6.54)$$

ricavata, per i gas ideali, nel Paragrafo 5.3 e la

$$ds = \frac{c_v}{T} dT + \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v dv \quad (6.55)$$

avente validità generale, ricavata nel Paragrafo 4.9.1.

Con riferimento ai tratti  $\overline{OM}$  (isobaro) ed  $\overline{MN}$  (isoterma), la relazione per i gas ideali (6.54) fornisce, rispettivamente

$$s(M) - s_0 = \int_{T_0}^T \frac{c_p}{T} dT \quad (6.56)$$

dove  $s_0 = s(O)$ , e

$$s(N) - s(M) = - \int_{p_0}^p \frac{R}{p} dp = R \ln \frac{p_0}{p} \quad (6.57)$$

Analogamente, con riferimento al tratto  $\overline{NP}$  (isoterma), la relazione generale (6.55) porge

$$s(P) - s(N) = \int_{RT/p}^v \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v dv \quad (6.58)$$

A sua volta, l'espressione (6.58) può essere valutata sia analiticamente sia numericamente. In quest'ultimo caso, di solito, si fa ricorso ad un'equazione di stato scritta in termini di fattore di comprimibilità. Risulta allora

$$p = \frac{ZRT}{v} \quad (6.59)$$

e, di conseguenza, si ha

$$\left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v = \frac{ZR}{v} + \frac{RT}{v} \left( \frac{\partial Z}{\partial T} \right)_v \quad (6.60)$$

Una volta calcolati gli integrali ai secondi membri delle (6.56) - (6.58), l'entropia in un punto generico  $s(P) = s(T, p, v)$  può essere valutata in base

alla somma

$$s(P) - s_0 = [s(P) - s(N)] + [s(N) - s(M)] + [s(M) - s_0] \quad (6.61)$$

a partire da un valore  $s_0$  noto.

### Esempio 6.3

Si determini il valore dell'entropia specifica dell'azoto alla pressione di 5 MPa ed alla temperatura di 500 K, facendo uso dell'equazione di stato di Van der Waals ed assumendo  $s_0 = 0$  alla pressione di 101,325 kPa ed alla temperatura di 273,15 K.

#### Soluzione

Per l'azoto si ha:  $R = 0,2968$  kJ/(kg K);  $c_p = 1,039$  kJ/(kg K);  $a = 0,174$  kPa/(m<sup>3</sup> / kg)<sup>2</sup> e  $b = 0,0014$  m<sup>3</sup> / kg. Di conseguenza, in base alle definizioni (6.22) e (6.23) ed assumendo  $c_p = \text{cost}$  nella parte di calcolo riguardante il percorso a comportamento ideale, si ottiene

$$\begin{aligned} s(N) - s_0 &= [s(N) - s(M)] + [s(M) - s_0] = R \ln \frac{p_0}{p} + c_p \ln \frac{T}{T_0} \\ &= 0,2968 \ln \frac{101,325}{5000} + 1,039 \ln \frac{500}{273,15} \\ &= -1,157 + 0,628 = -0,529 \text{ kJ / (kg K)} \end{aligned}$$

Per la parte di calcolo riguardante il percorso a comportamento reale, dalla (6.58) e dall'equazione di Van der Waals, si ha

$$\begin{aligned} s(P) - s(N) &= \int_{RT/p}^v \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v dv = \int_{RT/p}^v \frac{R}{v-b} dv \\ &= \int_{(RT/p)-b}^{v-b} \frac{R}{v-b} d(v-b) = \ln(v-b) - \ln \left( \frac{RT}{p} - b \right) \end{aligned}$$

dove  $RT/p$  è il volume specifico "ideale", mentre  $v$  è il volume specifico "reale" che deve essere valutato risolvendo l'equazione di Van der Waals. Si ha così

$$\frac{RT}{p} = \frac{0,2969 \cdot 500}{5000} = 0,0297 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$$

e, procedendo in sequenza, si ottiene

$$p + \frac{a}{v^2} = 5000 + \frac{0,174}{0,0297^2} = 5197 \text{ kPa}$$

e

$$v = \frac{RT}{p + a/v^2} + b \cong \frac{0,2968 \cdot 500}{5197} + 0,0014 = 0,03 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$$

Pertanto la correzione dovuta al comportamento non ideale, valutata in base all'equazione di Van der Waals, è pari a

$$\begin{aligned} s(P) - s(N) &= \ln(v - b) - \ln\left[\left(\frac{RT}{p}\right) - b\right] \\ &= \ln(0,0297 - 0,0014) - \ln(0,03 - 0,0014) \\ &= -3,56 + 3,55 = -0,01 \text{ kJ} / (\text{kg K}) \end{aligned}$$

Complessivamente, si ottiene

$$\begin{aligned} s(P) - s_0 &= [s(P) - s(N)] + [s(N) - s_0] \\ &= -0,01 - 0,529 = -0,539 \text{ kJ} / (\text{kg K}) \end{aligned}$$

e quindi lo scostamento dal valore calcolato con l'equazione dei gas ideali risulta relativamente modesto.



### 6.7.2 Variazioni di Entalpia

La relazione differenziale utilizzata per valutare le variazioni d'entalpia nei gas ideali è

$$dh = c_p dT \quad (6.62)$$

Con riferimento ai tratti  $\overline{OM}$  (isobaro) ed  $\overline{MN}$  (isotermo), la relazione (6.28) fornisce, rispettivamente

$$h(M) - h_0 = \int_{T_0}^T c_p dT \quad (6.63)$$

dove  $h_0 = h(O)$ , e

$$h(N) - h(M) = 0 \quad (6.64)$$

in quanto l'entalpia di un gas ideale non dipende dalla pressione.

Nel valutare lo scostamento tra l'entalpia di un gas reale  $h(P)$  e quella del gas ideale  $h(N)$ , che ha la stessa massa molecolare e si trova nelle stesse condizioni di temperatura e pressione, si preferisce fare riferimento alla definizione

$$\begin{aligned} h(P) - h(N) &= u(P) - u(N) + (pv)_P - (RT)_N \\ &= u(P) - u(N) + (Z - 1)RT \end{aligned} \quad (6.65)$$

Infatti, come si è detto, la maggior parte delle equazioni di stato dei gas reali è esplicitabile rispetto alla pressione e, di conseguenza, gli scostamenti dell'energia interna dal valore ideale possono essere valutati più facilmente degli scostamenti d'entalpia corrispondenti. La relazione differenziale utilizzata in questi calcoli

$$du = c_v dT + \left[ T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v - p \right] dv \quad (6.66)$$

è stata ricavata nel Paragrafo 4.9.1. Con riferimento al tratto  $\overline{NP}$  (isotermo), la relazione (6.66) porge

$$u(P) - u(N) = \int_{RT/p}^v \left[ T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v - p \right] dv \quad (6.67)$$

A sua volta, l'espressione (6.67) può essere valutata sia analiticamente sia numericamente. In quest'ultimo caso, di solito, si fa ricorso ad un'equazione di stato scritta in termini di fattore di comprimibilità. Risulta allora

$$T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v - p = Z \frac{RT}{v} + \frac{RT^2}{v} \left( \frac{\partial Z}{\partial T} \right)_v - Z \frac{RT}{v} = \frac{RT^2}{v} \left( \frac{\partial Z}{\partial T} \right)_v \quad (6.68)$$

Una volta calcolati gli integrali ai secondi membri delle (6.63) e (6.67), l'entalpia in un punto generico  $h(P) = h(T, P, v)$  può essere valutata in base alla somma

$$\begin{aligned} h(P) - h_0 &= [h(P) - h(N)] + [h(N) - h(M)] + [h(M) - h_0] \\ &= [u(P) - u(N) + (Z - 1)RT] + [h(M) - h_0] \end{aligned} \quad (6.68)$$

a partire da un valore  $h_0$  noto.

#### Esempio 6.4

Si determini il valore dell'entalpia specifica dell'azoto alla pressione di 5 MPa ed alla temperatura di 500 K, facendo uso dell'equazione di stato di Van der Waals ed assumendo  $h_0 = 0$  alla pressione di 101,325 kPa ed alla temperatura di 273,15 K.

#### Soluzione

Poiché per l'azoto si ha  $c_p = 1,039$  kJ/(kg K), risulta

$$\begin{aligned} h(N) - h_0 &= h(M) - h_0 = c_p(T - T_0) \\ &= 1,039(500 - 273,15) = 235,7 \text{ kJ / kg} \end{aligned}$$

nella parte di calcolo riguardante il percorso a comportamento ideale. Per la parte di calcolo riguardante il percorso a comportamento reale, dalla (6.65) e dall'equazione di Van der Waals, si ha

$$h(P) - h(N) = u(P) - u(N) + (Z - 1)RT$$

dove, in base alla (6.29) ed al valore del volume specifico ricavato nell'Esempio 6.3, risulta

$$Z = \frac{v}{v-b} - \frac{a}{RTv} = \frac{0,03}{0,03 - 0,0014} - \frac{0,174}{0,2968 \cdot 500 \cdot 0,03} = 1,01$$

Con riferimento al percorso non ideale ed all'equazione di Van der Waals, la relazione (6.67) porge

$$\begin{aligned} u(P) - u(N) &= \int_{RT/p}^v \left[ T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v - p \right] dv = \int_{RT/p}^v \frac{a}{v^2} dv \\ &= -\frac{a}{v} \Big|_{RT/p}^v = a \left( \frac{p}{RT} - \frac{1}{v} \right) = 0,174 \left( \frac{1}{0,0297} - \frac{1}{0,03} \right) = 0,06 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \end{aligned}$$

Pertanto la correzione dovuta al comportamento non ideale, è pari a

$$h(P) - h(N) = 0,06 + (1,01 - 1)0,2968 \cdot 500 = 1,5 \text{ kJ / kg}$$

Complessivamente, si ottiene

$$h(P) - h_0 = [h(P) - h(N)] + [h(N) - h_0] = 1,5 + 235,7 = 237,2 \text{ kJ / kg}$$

e quindi, ancora una volta, lo scostamento dal valore calcolato con l'equazione di stato dei gas ideali risulta relativamente modesto.

### 6.7.3 Applicazione ai Vapori Surriscaldati

Poiché non vi è differenza fisica tra un gas ed un vapore surriscaldato, le equazioni di stato degli aeriformi trovano applicazione anche nella costruzione dei diagrammi termodinamici dei vapori. A questo proposito, si può fare riferimento alla Fig. 6.16 dove, per il calcolo delle proprietà in P, sono evidenziati due percorsi alternativi  $\overline{MNP}$  e  $\overline{QP}$ . Come si vede, entrambi i percorsi iniziano da punti, come M e Q, posti sulla curva limite superiore dove le proprietà termodinamiche sono note.

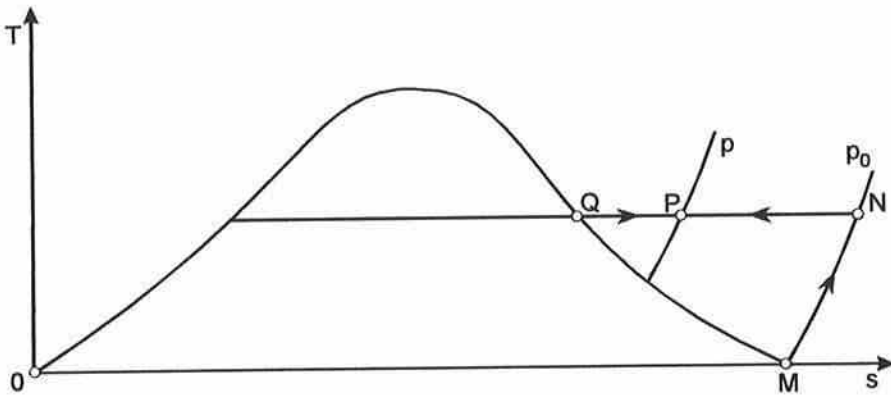


Figura 6.16 Schema d'appoggio per il calcolo delle proprietà termodinamiche dei vapori.

La trasformazione  $\overline{MN}$  è un'isobara, caratterizzata da una pressione abbastanza bassa da far ritenere che il comportamento del vapore sia assimilabile a quello di un gas ideale. Lungo tale trasformazione possono quindi essere applicate le relazioni (6.57) e (6.63) per il calcolo delle differenze, rispettivamente, d'entropia e d'entalpia. Analogamente, nelle trasformazioni isoterme  $\overline{NP}$  o  $\overline{QP}$ , il procedimento da seguire è lo stesso descritto nei paragrafi precedenti. Possono quindi essere utilizzate la relazione (6.67) nel

calcolo delle differenze d'entropia, e le relazioni (6.65) - (6.68) nel calcolo delle differenze d'entalpia.

## 6.8 CONCLUSIONI

In questo capitolo sono state prese in esame le proprietà termodinamiche delle sostanze pure. Si sono così illustrate le relazioni tra pressione, volume specifico e temperatura impiegando il diagramma tridimensionale  $(p, v, T)$  e le sue proiezioni sui piani  $(p, T)$  e  $(p, v)$ . Nella pratica tuttavia, rivestono importanza particolare la rappresentazione grafica e le analisi energetiche dei cicli termodinamici a vapore. Per questi fini sono stati sviluppati il diagramma  $(T, s)$ , che trova impiego nella rappresentazione di tutti i cicli a vapore, ed i diagrammi  $(h, s)$  e  $(p, h)$  utilizzati, rispettivamente, nelle analisi energetiche dei cicli diretti e dei cicli inversi. A conclusione del capitolo, si è mostrato come il comportamento degli aeriformi possa essere espresso, in forma analitica, a partire dalle equazioni di stato dei gas reali.

---

# CAPITOLO 7

## MISCELE DI GAS

---

### 7.1 GENERALITÀ

Fino a questo punto ci si è occupati di sostanze pure, e quindi i gas presi in considerazione erano costituiti da una sola specie molecolare mentre, in molte applicazioni pratiche, ci si trova in presenza di miscele di gas. In tali casi, ci si comporta diversamente secondo che la composizione della miscela resti costante o cambi nel corso del processo.

Le miscele omogenee di gas possono essere ancora trattate come sostanze pure, se la loro composizione non varia nel corso del processo. Questo è il caso, ad esempio, dell'aria o dei fumi prodotti dalle combustioni che, in molte situazioni di interesse tecnico, possono essere considerati gas ideali "miscela", aventi massa molare pari alla media ponderale delle masse molari dei loro componenti. In queste situazioni, i cambiamenti nelle proprietà termodinamiche della miscela di gas ideali possono essere stimate applicando le regole di calcolo valide per un singolo gas. Se, al contrario, la composizione varia nel corso del processo, è necessario disporre di metodologie che consentano di calcolare le proprietà delle miscele risultanti combinando opportunamente le proprietà dei singoli componenti. Nel seguito, saranno trattati separatamente i processi a composizione costante e quelli a composizione variabile, distinguendo anche tra i comportamenti delle miscele di gas ideali e reali.

### 7.2 COMPOSIZIONE DELLE MISCELE GASSOSE

La conoscenza della composizione di una miscela, in termini di masse o di

moli dei suoi componenti, costituisce il primo passo verso la stima delle proprietà termodinamiche. A tal fine, conviene esprimere la massa totale  $m$  di una miscela gassosa come

$$m = \sum m_j = \sum n_j M_j \quad (7.1)$$

dove  $m_j$ ,  $n_j$  ed  $M_j$  sono, rispettivamente, la massa, il numero di moli e la massa molare del componente  $j$ -simo. Detta

$$y_j = \frac{n_j}{n} \quad (7.2)$$

la frazione molare del componente  $j$ -simo, dalla (7.1) si ricava immediatamente la relazione

$$M = \frac{m}{n} = \frac{1}{n} (\sum n_j M_j) = \sum \frac{n_j}{n} M_j = \sum y_j M_j \quad (7.3)$$

dove  $M$  è la massa molare apparente della miscela ed  $n$  è il numero totale di moli. Di conseguenza, la costante caratteristica della miscela gassosa può essere calcolata come

$$R = \frac{\bar{R}}{M} \quad (7.4)$$

Oltre alle frazioni molari, possono essere definite anche le frazioni di massa  $\omega_j$ , per le quali risulta

$$\omega_j = \frac{m_j}{m} = \frac{n_j M_j}{n M} = y_j \frac{M_j}{M} \quad (7.5)$$

Evidentemente, dalle definizioni precedenti si ha

$$\sum y_j = \sum \omega_j = 1 \quad (7.6)$$

in quanto la somma delle frazioni, sia molari che di massa, è esaustiva

dell'insieme intero, come risulta anche dalla Tabella 7.1 relativa all'aria secca.

**Tabella 7.1** Aria secca e sua composizione.

GAS	$M_j$ [kg/kmol]	$y_j = \frac{n_j}{n}$	$\omega_j = \frac{m_j}{m}$	$R_j$ [kJ/(kg K)]
Aria secca	28,97	1	1	0,2870
N <sub>2</sub>	28,01	0,7809	0,7552	0,2968
O <sub>2</sub>	32,00	0,2095	0,2315	0,2598
Ar	39,94	0,0093	0,0128	0,2082
CO <sub>2</sub>	44,01	0,0003	0,0005	0,1890

### Esempio 7.1

Si applichino le relazioni (7.3) - (7.5) all'aria secca "standard", che si pensa composta di soli ossigeno ( $y_{O_2} = 0,21$ ) ed azoto "equivalente" ( $y_{N_2} = 0,79$ ), cioè comprendente tutti gli altri gas.

#### Soluzione

Dalla relazione (7.3) si ha

$$M_a = \sum y_j M_j = y_{O_2} M_{O_2} + y_{N_2} M_{N_2}$$

$$= 0,21 \cdot 32,00 + 0,79 \cdot 28,01 = 28,8 \text{ kg / kmol}$$

mentre dalla relazione (7.4) si ottiene

$$R_a = \frac{\bar{R}}{M_a} = \frac{8,314}{28,8} = 0,289 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}$$

Risulta poi



$$\omega_{O_2} = \frac{m_{O_2}}{m_a} = y_{O_2} \frac{M_{O_2}}{M_a} = 0,21 \frac{32,00}{28,8} = 0,23$$

e

$$\omega_{N_2} = \frac{m_{N_2}}{m_a} = y_{N_2} \frac{M_{N_2}}{M_a} = 0,79 \frac{28,01}{28,8} = 0,77$$

Viceversa, partendo dalle frazioni di massa appena calcolate, si può verificare che risulta

$$y_{O_2} = \frac{m_{O_2}}{m_a} \frac{M_a}{M_{O_2}} = 0,23 \frac{28,8}{32,00} \cong 0,21$$

e

$$y_{N_2} = \frac{m_{N_2}}{m_a} \frac{M_a}{M_{N_2}} = 0,77 \frac{28,8}{28,01} \cong 0,79$$

confermando la coerenza tra i risultati del calcolo, le definizioni ed i valori riportati nella Tabella 7.1 per l'aria secca "fisica".

### 7.3 MISCELE DI GAS IDEALI

Come si ricorderà, la teoria cinetica considera i gas ideali composti da molecole prive di volume che non esercitano tra loro alcuna azione attrattiva o repulsiva. In base a queste ipotesi, il comportamento di un gas ideale viene espresso mediante l'equazione di stato

$$pV = n\bar{R}T \quad (7.7)$$

dove non compare alcun parametro caratteristico del singolo gas. Infatti, il comportamento dei gas ideali è legato solo al numero di moli  $n$ , cioè al numero di molecole presenti nel volume  $V$ , e non alla natura delle molecole stesse. Appare quindi ragionevole concludere che una miscela di gas ideali non può che comportarsi come un gas ideale poiché, in assenza di forze in-

termolecolari, molecole di specie diverse non hanno modo di interagire. Pertanto l'equazione di stato della miscela può essere ancora espressa dalla (7.7), purché  $n$  rappresenti il numero totale di moli. In base a tale assunzione

$$pv = n \frac{\bar{R}}{m} T = RT \quad (7.8)$$

è l'equazione di stato della miscela riferita all'unità di massa, con  $R = \bar{R} / M$  costante apparente caratteristica e  $v = V / m$  volume specifico riferito alla massa totale. Da queste premesse discendono i due modelli usati per l'analisi delle miscele di gas ideali: il modello di Dalton e quello di Amagat.

Secondo il modello di Dalton, una miscela di gas ideali si comporta come un gas ideale ed è caratterizzata da un valore della pressione totale uguale alla somma delle pressioni parziali di gas ideale

$$p_j = n_j \frac{\bar{R} T}{V} \quad (7.9)$$

che ogni singolo componente eserciterebbe se occupasse da solo l'intero volume, trovandosi alla stessa temperatura della miscela. Tale modello discende dall'assenza d'interazioni molecolari e conduce alla legge delle pressioni parziali di Dalton, esprimibile come

$$p = \sum p_j \quad (7.10)$$

dove

$$p = n \frac{\bar{R} T}{V} \quad (7.11)$$

è la pressione totale esercitata dalla miscela.

Secondo il modello di Amagat invece, una miscela di gas ideali si comporta come un gas ideale ed occupa un volume totale uguale alla somma dei volumi parziali di gas ideale

$$V_j = n_j \frac{\bar{R}T}{p} \quad (7.12)$$

che ogni singolo componente occuperebbe trovandosi da solo alla stessa pressione ed alla stessa temperatura della miscela. Analiticamente, la legge dei volumi parziali di Amagat può essere scritta nella forma

$$V = \sum V_j \quad (7.13)$$

dove

$$V = n \frac{\bar{R}T}{p} \quad (7.14)$$

è il volume totale occupato dalla miscela. La legge di Amagat esprime la possibilità di calcolare la proprietà estensiva “volume della miscela” come somma dei volumi occupati dai singoli componenti. Per le miscele di gas ideali poi, la legge di Amagat è una conseguenza della legge di Dalton, come dimostrato nell'Esempio 7.2.

Nelle equazioni precedenti,  $n_j$  è il numero di moli della specie  $j$ -sima mentre, al solito,  $n$  è il numero di moli della miscela. Pertanto, dividendo membro a membro le relazioni (7.9) e (7.11) e le relazioni (7.12) e (7.14), si ottiene

$$y_j = \frac{n_j}{n} = \frac{V_j}{V} = \frac{p_j}{p} \quad (7.15)$$

Come si vede, la frazione molare del componente considerato coincide sia con la frazione volumetrica sia con il rapporto tra pressione parziale e pressione totale. Pertanto le relazioni (7.3), (7.5) e (7.6), valide per le frazioni molari, sussistono anche per le frazioni volumetriche e per i rapporti tra pressione parziale e pressione totale.

Infine, si noti che le relazioni ricavate in questo paragrafo sono fondate sull'applicazione dell'equazione di stato dei gas ideali e quindi valgono

solo approssimativamente per le miscele di gas reali.

### Esempio 7.2

Si dimostri che, per le miscele di gas ideali, la legge di Amagat è una conseguenza della legge di Dalton.

#### Soluzione

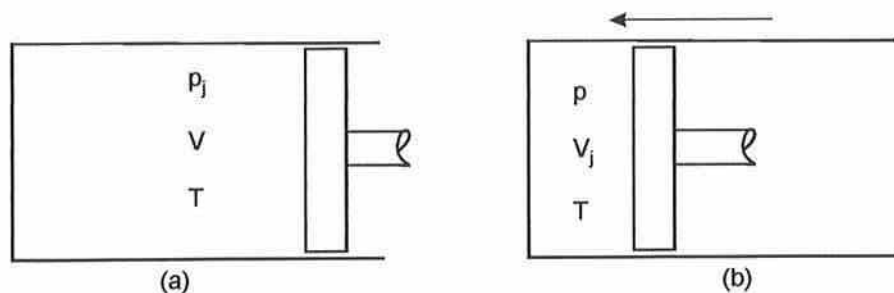
Con riferimento alla Fig. 7.1, operando isotermicamente alla temperatura  $T$  della miscela, si immetta il componente  $j$ -simo in un cilindro con stantuffo fino a raggiungere la pressione  $p_j$  quando il volume è  $V$ . Poi, a temperatura costante, si riduca il volume fino a raggiungere la pressione totale  $p$  della miscela. Per una trasformazione isoterma si ottiene

$$p_j V = p V_j$$

dove, per definizione,  $V_j$  è il volume parziale in quanto è il volume occupato dal componente  $j$ -simo alla pressione e temperatura della miscela. Se si opera in questo modo con tutti i componenti e si sommano i risultati ottenuti, si ha

$$\sum p_j V = V \sum p_j = \sum p V_j = p \sum V_j$$

Ma, in base alla legge di Dalton, la somma delle pressioni parziali è uguale



**Figura 7.1** Compressione isoterma dallo stato iniziale in (a) allo stato finale in (b).

alla pressione totale, e quindi l'uguaglianza tra il secondo ed il quarto membro della relazione precedente fornisce

$$V = \sum V_j$$

ovvero la legge di Amagat. Si noti che la relazione utilizzata per dimostrare l'assunto vale solo per trasformazioni isoterme di gas ideali.

## 7.4 PROPRIETÀ DELLE MISCELE DI GAS IDEALI

Le analisi di primo e secondo principio, relative alle trasformazioni di miscele di gas ideali, richiedono la valutazione di proprietà estensive, come l'energia interna, l'entalpia e l'entropia. A questo proposito conviene operare diversamente a seconda che i processi abbiano luogo a composizione costante, od a composizione variabile.

Se la composizione resta costante, una miscela di gas ideali si comporta come un singolo gas ideale. Pertanto le differenze d'energia interna, entalpia ed entropia, possono essere calcolate impiegando le relazioni discusse nel Capitolo 5. Così, ad esempio, l'aria secca è spesso schematizzata come un gas ideale avente massa molare  $M_a = 28,97$  kg/kmol, costante caratteristica  $R_a = \bar{R} / M_a = 8,314/28,97 = 0,2870$  kJ/(kg K) e rapporto tra i calori specifici  $k$  assunto costante e pari ad 1,4. Ciò consente il calcolo dei calori specifici, e quindi la valutazione delle differenze d'energia interna, entalpia ed entropia tra due stati termodinamici qualunque.

Se invece la composizione della miscela cambia nel corso del processo, le relazioni del Capitolo 5 cadono in difetto, in quanto valide per una massa costante a composizione fissa. Le proprietà estensive sono allora valutate in base alla legge di Gibbs, che può essere interpretata come un'estensione intuitiva della legge di Amagat. La legge di Gibbs stabilisce che, non solo il volume, ma tutte le proprietà estensive possono essere determinate sommando i contributi dei singoli componenti, nelle condizioni di

temperatura e pressione in cui si trovano nella miscela. Se le molecole delle diverse specie gassose non interferiscono tra loro, risulta allora

$$V = \sum V_j = \sum m_j v_j \quad (7.16)$$

come previsto dalla legge di Amagat, ed anche

$$U = \sum U_j = \sum m_j u_j \quad (7.17)$$

$$H = \sum H_j = \sum m_j h_j \quad (7.18)$$

e

$$S = \sum S_j = \sum m_j s_j \quad (7.19)$$

come previsto dalla legge di Gibbs. Dividendo entrambi i membri delle relazioni precedenti per la massa totale della miscela, si ottengono le relazioni corrispondenti per le grandezze specifiche

$$v = \frac{V}{m} = \sum \frac{m_j}{m} v_j = \sum \omega_j v_j \quad (7.20)$$

$$u = \frac{U}{m} = \sum \frac{m_j}{m} u_j = \sum \omega_j u_j \quad (7.21)$$

$$h = \frac{H}{m} = \sum \frac{m_j}{m} h_j = \sum \omega_j h_j \quad (7.22)$$

e

$$s = \frac{S}{m} = \sum \frac{m_j}{m} s_j = \sum \omega_j s_j \quad (7.23)$$

Le Eq. (7.16) - (7.23) consentono di valutare le proprietà estensive di una miscela di gas ideali, una volta note le proprietà dei componenti. Nei calcoli, si tiene conto del fatto che  $u_j$  ed  $h_j$  dipendono solo dalla temperatura, mentre  $s_j$  dipende da temperatura e pressione parziale  $p_j$  (o da temperatura

e volume specifico  $v_j$ ).

I calori specifici della miscela possono essere ricavati in base alle loro definizioni. Risulta così

$$c_v = \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v = \sum \omega_j \left( \frac{\partial u_j}{\partial T} \right)_v = \sum \omega_j c_{vj} \quad (7.24)$$

$$c_p = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p = \sum \omega_j \left( \frac{\partial h_j}{\partial T} \right)_p = \sum \omega_j c_{pj} \quad (7.25)$$

e

$$k = \frac{c_p}{c_v} = \frac{\sum \omega_j c_{pj}}{\sum \omega_j c_{vj}} (\neq \sum \omega_j k_j) \quad (7.26)$$

dove i calori specifici della miscela ed il loro rapporto sono espressi in funzione dei calori specifici dei componenti e delle rispettive frazioni di massa  $\omega_j$ . Ovviamente, relazioni analoghe alle (7.20) - (7.26) possono essere ricavate facendo riferimenti ai valori molari ed alle rispettive frazioni molari  $y_j$ .

### Esempio 7.3

Si ricavano le relazioni analoghe alle (7.20) - (7.26), facendo riferimento alla quantità di materia unitaria anziché all'unità di massa.

#### Soluzione

Moltiplicando tutti i membri della relazione (7.20) per la massa molare della miscela  $M$ , si ottiene

$$\bar{v} = v M = M \sum \frac{m_j / M_j}{m} M_j v_j = \sum \frac{n_j}{n} \bar{v}_j = \sum y_j \bar{v}_j$$

e, procedendo in maniera analoga con le (7.21) - (7.23), si ha

$$\bar{u} = u M = \sum y_j \bar{u}_j$$

$$\bar{h} = h M = \sum y_j \bar{h}_j$$

e

$$\bar{s} = sM = \sum y_j \bar{s}_j$$

Moltiplicando tutti i membri della relazione (7.24) per la massa molare della miscela  $M$ , si ottiene

$$\bar{c}_v = \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial T} \right)_v = \sum y_j \left( \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial T} \right)_v = \sum y_j \bar{c}_{vj}$$

e, procedendo in maniera analoga con la (7.25), si ha

$$\bar{c}_p = \left( \frac{\partial \bar{h}}{\partial T} \right)_p = \sum y_j \left( \frac{\partial \bar{h}_j}{\partial T} \right)_p = \sum y_j \bar{c}_{pj}$$

Infine, dalla (7.26), si ricava

$$k = \frac{c_p}{c_v} = \frac{M c_p}{M c_v} = \frac{\bar{c}_p}{\bar{c}_v} = \frac{\sum y_j \bar{c}_{pj}}{\sum y_j \bar{c}_{vj}}$$

ovvero il rapporto tra i calori specifici molari.

#### 7.4.1 Miscelazione di Gas Ideali

In questo paragrafo, si esamina la formazione di miscele di gas ideali a partire da componenti originariamente separati. Con riferimento alla Fig. 7.2 si consideri, dunque, un contenitore termicamente isolato nel quale due specie gassose 1 e 2, separate inizialmente da un setto mobile, si trovano alla stessa temperatura  $T$  ed alla stessa pressione  $p$ . Una volta rimosso il setto di separazione, si ha un processo di mescolamento con formazione di una miscela omogenea.

Il primo principio della termodinamica, applicato al processo di miscelazione, può essere scritto nella forma



$$\begin{aligned}
 U_f(T_f) - U_i(T_i) &= [m_1 u_1(T_f) + m_2 u_2(T_f)] - [m_1 u_1(T_i) + m_2 u_2(T_i)] \\
 &= \hat{Q}_{if} - \hat{L}_{if} = 0 - 0 = 0
 \end{aligned}
 \tag{7.27}$$

Dalla (7.27) si ottiene

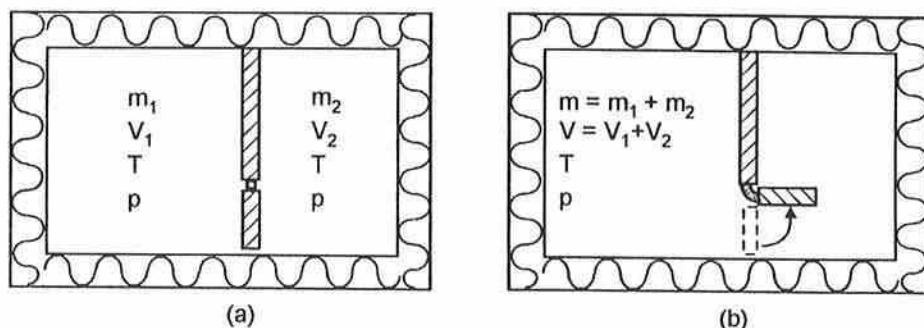
$$m_1 [u_1(T_f) - u_1(T_i)] + m_2 [u_2(T_f) - u_2(T_i)] = 0
 \tag{7.28}$$

ed essendo  $m_1$  ed  $m_2$  arbitrarie, si può concludere che le energie interne dei due gas, e quindi le rispettive temperature, non variano durante la miscelazione risultando  $T_f = T_i = T$  in quanto l'energia interna dei gas ideali dipende solo dalla temperatura.

In base all'equazione di stato, si può calcolare il volume come somma dei volumi iniziali

$$V = V_1 + V_2 = n_1 \frac{\bar{R}T}{p_i} + n_2 \frac{\bar{R}T}{p_i} = (n_1 + n_2) \frac{\bar{R}T}{p_i}
 \tag{7.29}$$

Poiché il volume non varia nella miscelazione, si può applicare di nuovo l'equazione di stato alla fine del processo, e tenendo conto della (7.29)



**Figura 7.2** Miscelazione adiabatica-isobara di due specie gassose: (a) stato iniziale e (b) stato finale.

$$p_f = \frac{(n_1 + n_2)\bar{R}T}{V} = \frac{(n_1 + n_2)\bar{R}T}{(n_1 + n_2)\bar{R}T/p_i} = p_i = p \quad (7.30)$$

si dimostra che la pressione, come la temperatura, non cambia.

La pressione finale, tuttavia, è la somma delle pressioni parziali esercitate dai due gas

$$p = p_1 + p_2 = y_1 p + y_2 p \quad (7.31)$$

e, di conseguenza, la pressione di ciascuno dei due gas cambia nel corso del processo.

Il bilancio di entropia per i sistemi chiusi, applicato al processo di miscelazione, può essere scritto nella forma

$$S_f - S_i = \sum \left( \frac{\hat{Q}_j}{T_j} \right)_{if} + (\Delta S_{irr})_{if} = (\Delta S_{irr})_{if} \quad (7.32)$$

poiché la trasformazione è adiabatica ma, certamente, non reversibile in quanto non è pensabile che i due componenti possano venire separati di nuovo senza alcuna spesa di energia. L'entropia iniziale del sistema è, ovviamente, pari alla somma delle entropie dei due gas separati alla temperatura  $T$  ed alla pressione  $p$

$$S_i = m_1 s_1(T, p) + m_2 s_2(T, p) \quad (7.33)$$

In base alla (7.19), l'entropia finale è data ancora dalla somma dell'entropie dei due gas valutate alla stessa temperatura  $T$  ma alle rispettive pressioni parziali  $p_1 = y_1 p$  e  $p_2 = y_2 p$

$$S_f = m_1 s_1(T, y_1 p) + m_2 s_2(T, y_2 p) \quad (7.34)$$

Sottraendo membro a membro la (7.33) dalla (7.34) e tenendo conto della (7.32), si ottiene

$$\begin{aligned}
 (\Delta S_{irr})_{if} &= S_f - S_i = m_1[s_1(T, y_1 p) - s_1(T, p)] + m_2[s_2(T, y_2 p) - s_2(T, p)] \\
 &= -m_1 R_1 \ln \frac{p_1}{p} - m_2 R_2 \ln \frac{p_2}{p} = -(m_1 R_1 \ln y_1 + m_2 R_2 \ln y_2) > 0 \quad (7.35)
 \end{aligned}$$

in quanto le frazioni molari sono, per definizione, minori di 1. Da un punto di vista fisico, la generazione d'entropia può essere giustificata nella maniera seguente. I gas, inizialmente alla pressione totale della miscela, subiscono dei processi di laminazione ad energia interna costante che li portano ai rispettivi valori delle pressioni parziali. I rispettivi lavori d'espansione, associati alle forze interne di pressione, sono completamente dissipati dagli attriti interni. In questo modo si generano delle quantità di calore esattamente uguali ai lavori prodotti, e le trasformazioni hanno luogo isotermicamente.

Attesa l'uguaglianza  $m = nM$ , la relazione (7.35) può essere scritta nella forma generalizzata

$$\begin{aligned}
 (\Delta S_{irr})_{if} &= S_f - S_i = -(n_1 M_1 R_1 \ln y_1 + n_2 M_2 R_2 \ln y_2) \\
 &= -(n_1 \bar{R} \ln y_1 + n_2 \bar{R} \ln y_2) = -\bar{R} \sum n_j \ln y_j \quad (7.36)
 \end{aligned}$$

dalla quale si evince che l'aumento d'entropia dipende soltanto dai numeri di moli di gas mescolate, e non dalla composizione della miscela risultante. Ciò conduce ad un paradosso, in quanto è ben noto che il mescolamento di quante si voglia moli dello stesso gas non conduce ad aumenti d'entropia. Pertanto, da questo punto di vista, si deve ammettere che, quando non si hanno "informazioni" sufficienti a distinguere tra i diversi componenti, non si hanno nemmeno aumenti d'entropia. Una conclusione concettualmente simile, del resto, è comunemente tratta dall'analisi del paradosso di Maxwell. In quel caso, infatti, si ammette che un "diavoletto", in base alle "informazioni" possedute sui livelli energetici delle molecole, sia capace di aprire o chiudere una porticina di comunicazione tra due contenitori di gas che, inizialmente, si trovano alla stessa temperatura. Il possesso delle infor-

mazioni porta, in questo modo, alla separazione delle molecole secondo i livelli d'energia cinetica, e quindi alla generazione di una differenza di temperatura a partire da una situazione isoterma.

#### Esempio 7.4

Si analizzi un processo stazionario di miscelazione adiabatica-isobara di gas ideali, che ha luogo in un sistema aperto.

#### Soluzione

Con riferimento alla Fig. 7.3, si consideri il processo di miscelazione di due correnti gassose che entrano alla pressione  $p$  ed alla temperatura  $T$  ed escono, mescolate, nelle condizioni di pressione totale  $p$  senza scambiare calore o lavoro con l'esterno. Nell'ipotesi d'influenza trascurabile delle variazioni d'energia cinetica e potenziale, il primo principio della termodinamica, applicato al processo di miscelazione, può essere scritto nella forma

$$\begin{aligned} & \dot{m}_u h_u - \sum \dot{m}_e h_e \\ & = [\dot{m}_1 h_1(T_u) + \dot{m}_2 h_2(T_u)] - \dot{m}_1 h_1(T_e) + \dot{m}_2 h_2(T_e) = q - P' = 0 \end{aligned}$$

dove il flusso entalpico relativo alla miscela è valutata in base alla (7.22) moltiplicata per la portata di massa totale  $\dot{m}_u$ . Dalla relazione precedente si ottiene

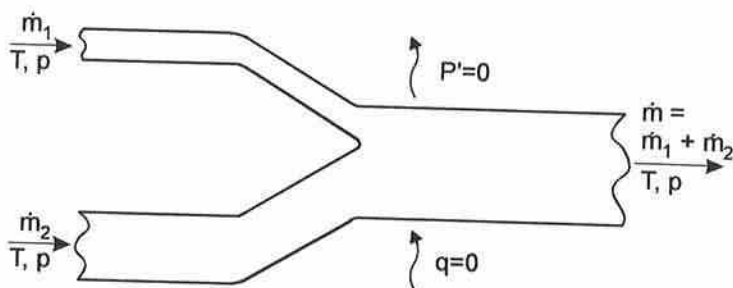
$$\dot{m}_1 [h_1(T_u) - h_1(T_e)] + \dot{m}_2 [h_2(T_u) - h_2(T_e)] = 0$$

ed essendo  $\dot{m}_1$  ed  $\dot{m}_2$  arbitrarie, si può concludere che le entalpie dei due gas, e quindi le rispettive temperature, non variano durante la miscelazione risultando  $T_u = T_e = T$  in quanto l'entalpia dei gas ideali dipende solo dalla temperatura.

In base alla legge di Dalton, la pressione finale è l'effetto delle pressioni parziali esercitate dai due gas

$$p = p_1 + p_2 = y_1 p + y_2 p$$

e, di conseguenza, la pressione di ciascuno dei due gas cambia nel corso del processo.



**Figura 7.3** Miscelazione adiabatica-isobara di due specie gassose in un sistema aperto.

Il bilancio d'entropia per i per sistemi aperti, applicato al processo di miscelazione, può essere scritto nella forma

$$\begin{aligned} \dot{m}_u s_u - \sum \dot{m}_e s_e \\ = [\dot{m}_1 s_1(T, y_1 p) + \dot{m}_2 s_2(T, y_2 p)] - [\dot{m}_1 s_1(T, p) + \dot{m}_2 s_2(T, p)] \\ = \dot{S}_{irr} + \sum \frac{q_j}{T_j} = \dot{S}_{irr} \end{aligned}$$

dove il flusso entropico relativo alla miscela è valutata in base alla (7.23) moltiplicata per la portata di massa totale  $\dot{m}_u$ . Manipolando tale relazione, si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{S}_{irr} &= \dot{m}_1 [s_1(T, y_1 p) - s_1(T, p)] + \dot{m}_2 [s_2(T, y_2 p) - s_2(T, p)] \\ &= -(\dot{m}_1 R_1 \ln y_1 + \dot{m}_2 R_2 \ln y_2) > 0 \end{aligned}$$

cioè l'equivalente della relazione (7.36) scritta in termini di portate.

Anche in questo caso i gas, inizialmente alla pressione totale della miscela, subiscono dei processi di laminazione (questa volta ad entalpia costante) che li portano ai rispettivi valori delle pressioni parziali. I rispettivi lavori tecnici d'espansione, associati alle forze interne di pressione, sono completamente dissipati dagli attriti interni. In questo modo si generano delle quantità di calore esattamente uguali ai lavori tecnici prodotti, e le trasformazioni hanno luogo isotermicamente.

## 7.5 MISCELE DI GAS REALI

Sino a questo punto ci si è occupati di miscele di gas a comportamento ideale e tale ipotesi ha consentito d'utilizzare l'equazione di stato dei gas ideali sia per la miscela sia per i singoli componenti. In questo paragrafo si vogliono dare indicazioni sul comportamento delle miscele di gas al di fuori dei limiti d'applicabilità dell'equazione di stato dei gas ideali. A tal fine, è ancora possibile trattare la miscela come una sostanza pseudo pura, seguendo però delle regole ben precise per determinare i valori "effettivi" delle proprietà.

Una semplice approssimazione, spesso sufficiente per i calcoli pratici, prevede l'impiego del diagramma generalizzato del fattore di comprimibilità, illustrato nel Paragrafo 6.4. Per utilizzare tale diagramma occorre definire i valori "effettivi" della pressione critica  $p_c$  e della temperatura critica  $T_c$  della miscela, desumendoli dai valori corrispondenti dei componenti puri. A questo proposito, la metodologia più semplice prevede l'applicazione della media ponderata molare, secondo la quale si ha

$$p_c = \sum y_j p_{cj} \quad (7.37)$$

e

$$T_c = \sum y_j T_{cj} \quad (7.38)$$

dove  $p_{cj}$  e  $T_{cj}$  sono, rispettivamente, la pressione critica e la temperatura

critica del componente  $j$ -simo. Noti i valori critici della miscela, è possibile stimare il fattore di comprimibilità in base al diagramma generalizzato, ottenendo la relazione

$$Z = \frac{pV}{nRT} = \frac{p\bar{v}}{RT} = \frac{pv}{RT} \quad (7.39)$$

tra pressione, volume e temperatura della miscela.

Un approccio diverso consiste nell'utilizzare un'equazione di stato espressa in forma analitica, nella quale le costanti sono ricavate combinando le costanti caratteristiche dei singoli componenti. Ad esempio, per l'equazione di stato di Van der Waals della miscela, si usano le relazioni empiriche

$$a = \left( \sum y_j a_j^{1/2} \right)^2 \quad (7.40)$$

e

$$b = \sum y_j b_j \quad (7.41)$$

dove  $a_j$  e  $b_j$  sono le costanti caratteristiche del componente  $j$ -simo. Relazioni analoghe, ma più complesse, sono riportate in letteratura per altre equazioni di stato.

## 7.6 PROPRIETÀ DELLE MISCELE DI GAS REALI

Anche per la valutazione delle proprietà estensive delle miscele di gas reali, conviene operare diversamente a seconda che i processi analizzati abbiano luogo a composizione costante o variabile.

Se la composizione resta costante, una miscela di gas reali si comporta come un singolo gas reale, e per essa valgono tutte le relazioni illustrate nel Paragrafo 6.6. Pertanto le differenze d'energia interna, entalpia ed entropia tra inizio e fine dei processi possono essere calcolate impiegando

l'equazione di stato del gas reale "miscela", trattato come una sostanza pseudo pura.

Se invece la composizione della miscela varia nel corso del processo, le relazioni del Paragrafo 6.6 cadono in difetto in quanto sono valide per una massa costante di fluido a composizione fissa. In quest'ultimo caso, però, la valutazione delle proprietà estensive si fa alquanto complessa e diventa oggetto di trattazione nei corsi specializzati di termodinamica chimica.

## 7.7 CONCLUSIONI

In questo capitolo sono stati illustrati i metodi di valutazione delle proprietà termodinamiche delle miscele di gas. Alcuni esempi d'applicazione delle metodologie qui discusse saranno presentati nel seguito e riguarderanno, essenzialmente, miscele di gas ideali. Così, nel Capitolo 8 sarà trattata la termodinamica dell'aria umida, mentre nel Capitolo 10 saranno analizzati i processi di combustione.



---

# CAPITOLO 8

## ARIA UMIDA

---

### 8.1 GENERALITÀ

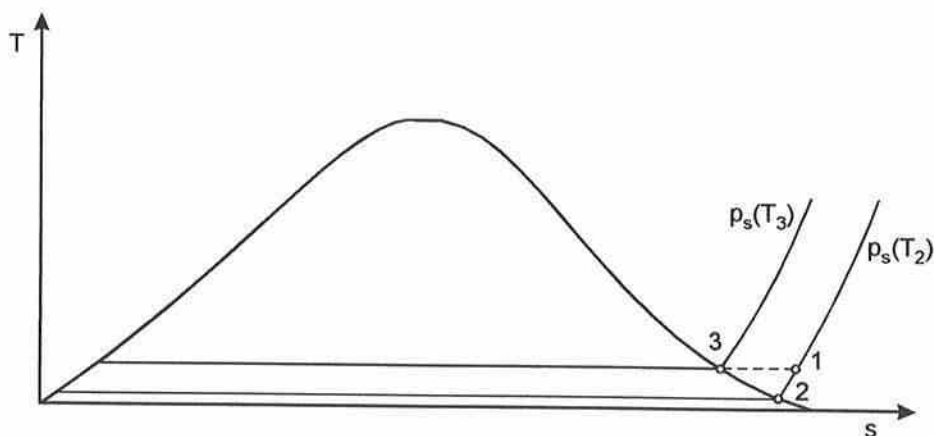
Nel capitolo precedente ci si è occupati di miscele di gas prive di vapori che possono condensare a pressioni e temperature prossime a quelle dell'ambiente normale. In questo capitolo si estende l'analisi all'aria umida, una miscela d'aria secca, non condensabile, e vapore d'acqua, condensabile. Da un punto di vista termodinamico l'aria umida, come l'aria secca, può essere considerata una miscela di gas ideali, ma nel calcolo delle proprietà termodinamiche dell'aria umida occorre tener conto delle variazioni nella concentrazione di vapore, dovute sia agli apporti esterni sia alle condensazioni. Lo studio del comportamento dell'aria umida ha notevole importanza pratica, in quanto riveste un ruolo essenziale per la comprensione dei processi di condizionamento dell'aria. Nel seguito, pur senza entrare negli aspetti propriamente impiantistici, saranno illustrate le principali trasformazioni utilizzate negli impianti di condizionamento civili e industriali.

### 8.2 ARIA SECCA E VAPORE D'ACQUA

Come si è detto, l'aria ambiente non è completamente secca in quanto contiene sempre vapore acqueo in concentrazione variabile nelle diverse situazioni. Come vedremo, la presenza del vapore acqueo è molto importante ai fini del benessere termoigrometrico e, pertanto, la conoscenza del comportamento dell'aria umida riveste un ruolo essenziale per la comprensione dei

processi di condizionamento dell'aria.

Nell'aria, il vapore acqueo si trova, di solito, ad una pressione parziale inferiore alla pressione di saturazione corrispondente alla temperatura dell'aria stessa e, di conseguenza, il suo stato termodinamico è quello di vapore surriscaldato. Poiché la sua pressione parziale è molto bassa, dell'ordine di qualche centesimo di atmosfera, il vapore si comporta, sostanzialmente, come un gas ideale. Nel capitolo precedente si è visto che l'aria secca può essere considerata una miscela di gas a comportamento ideale. Quindi anche l'aria umida, miscela d'aria secca e di vapore acqueo a comportamento ideale, può essere schematizzata come una miscela di gas ideali. A differenza degli altri costituenti dell'aria, però, il vapore è caratterizzato da una temperatura critica superiore alla temperatura ambiente ed, infatti, può condensare nelle condizioni operative tipiche degli impianti di condizionamento. Con riferimento alla Fig. 8.1, nei processi a pressione totale costante ed a temperatura superiore a  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ , è possibile identificare due percorsi diversi che portano alla condensazione del vapore in eccesso.



**Figura 8.1** Trasformazioni del vapore d'acqua nell'aria a pressione costante  $\bar{p}$  ed a temperatura costante  $\bar{T}$ .

La trasformazione  $\bar{1}2$  avviene quando si abbassa la temperatura dell'aria umida mantenendo costante la pressione totale  $p$ . Se  $p$  è costante,

fino a quando non si hanno condensazioni resta costante anche la frazione molare di vapore ( $y_v = p_v / p$ ) e, quindi, la sua pressione parziale  $p_v = y_v p$ . Al diminuire della temperatura, però, diminuisce la pressione di saturazione fino a che, giunti al punto 2, la pressione di saturazione  $p_s$  raggiunge la pressione  $p_v$ . Ogni successivo abbassamento di temperatura implica che parte del vapore debba condensare al fine di far diminuire  $y_v$ , dal momento che  $p_v$  non può superare  $p_s$ . La temperatura del punto 2 è detta temperatura di rugiada dell'aria, in quanto il processo di raffreddamento a pressione totale costante è, per molti aspetti, analogo al raffreddamento notturno dell'aria a contatto col terreno.

La trasformazione  $\bar{13}$  ha luogo, invece, quando si umidifica l'aria iniettando direttamente vapore d'acqua, mentre pressione totale e temperatura restano costanti. La pressione parziale del vapore può aumentare fino ad uguagliare la pressione di saturazione nel punto 3, ma non può crescere ulteriormente. Di conseguenza, tutto il vapore immesso dopo il raggiungimento della pressione di saturazione deve necessariamente condensare.

## 8.3 PROPRIETA' TERMODINAMICHE DELL'ARIA UMIDA

Poiché la concentrazione di vapore nell'aria può variare, è conveniente riferire le proprietà termodinamiche specifiche dell'aria umida all'unità di massa di aria secca, ovvero all'unità di massa del componente che resta inalterato durante i processi tecnici. Inoltre, nelle trattazioni elementari come questa, la pressione totale dell'aria umida è assunta costante e pari alla pressione atmosferica normale ( $p = 101,325$  kPa).

### 8.3.1 Umidità Specifica

L'umidità specifica  $x$  è definita come rapporto tra la massa di vapore  $m_v$  e

la massa d'aria secca  $m_a$  contenute nello stesso volume  $V$ . Si ha quindi

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{m_v}{m_a} = \frac{m_v / V}{m_a / V} = \frac{\rho_v}{\rho_a} = \frac{v_a}{v_v} = \frac{p_v}{R_v T} \frac{R_a T}{p_a} \\
 &= \frac{R_a p_v}{R_v p_a} = \frac{M_v p_v}{M_a p_a} = \frac{M_v}{M_a} \frac{p_v}{p - p_v}
 \end{aligned} \tag{8.1}$$

dove, come si è detto,  $p$  è la pressione totale somma di  $p_v$ , pressione parziale del vapore, e  $p_a$ , pressione parziale dell'aria secca. Inoltre,  $\rho_v$  è la densità del vapore,  $\rho_a$  è la densità dell'aria secca,  $v_v$  è il volume specifico del vapore,  $v_a$  è il volume specifico dell'aria secca,  $R_v$  è la costante caratteristica del vapore,  $R_a$  è la costante caratteristica dell'aria secca,  $M_v$  è la massa molare del vapore ed  $M_a$  è la massa molare dell'aria secca. In base alla definizione,  $x$  è misurata in grammi, o chilogrammi, di vapore per chilogrammo d'aria secca, cioè  $[g_v / kg_a]$  o  $[kg_v / kg_a]$ . Tenendo conto nella (8.1) dei valori delle masse molari, si ottiene la relazione approssimata

$$x = \frac{M_v}{M_a} \frac{p_v}{p - p_v} = \frac{18,02}{28,97} \frac{p_v}{p - p_v} = 0,622 \frac{p_v}{p - p_v} \tag{8.2}$$

dalla quale si vede come l'umidità specifica aumenti con la pressione parziale del vapore e, per una certa temperatura, raggiunga il massimo quando tale pressione uguaglia la pressione di saturazione.

Si noti che il simbolo  $x$ , prescelto per indicare l'umidità specifica, è d'uso pressoché universale in Italia anche se, sfortunatamente, è lo stesso normalmente utilizzato per il titolo di un vapore saturo.

### 8.3.2 Umidità Relativa

L'umidità relativa è il rapporto tra la massa di vapore, contenuta in un certo volume, e la massa contenibile in condizioni di saturazione alla stessa temperatura. Si ha quindi

$$\phi = \frac{m_v}{m_s} = \frac{m_v/V}{m_s/V} = \frac{\rho_v}{\rho_s} = \frac{v_s}{v_v} = \frac{p_v}{R_v T} \frac{R_v T}{p_s} = \frac{p_v}{p_s} \quad (8.3)$$

In base alla (8.3), la (8.2) può essere riscritta nella forma

$$x = 0,622 \frac{\phi p_s}{p - \phi p_s} \quad (8.4)$$

dalla quale si evince che, ad una certa temperatura, l'umidità specifica cresce con l'umidità relativa, fino a raggiungere il massimo nelle condizioni di saturazione ( $\phi = 1 = 100\%$ ).

Si noti che l'umidità relativa, e non l'umidità specifica, è la grandezza fondamentale per il benessere termoigrometrico. Infatti, l'evaporazione del sudore è tanto più agevole quanto più l'aria ambiente è lontana dalle condizioni di saturazione. Così, ad esempio, è percepito come "umido" un locale in cui l'umidità relativa supera il 70%, mentre è percepito come "secco" un locale in cui l'umidità relativa non supera il 40%.

### 8.3.3 Entalpia dell'Aria Umida

L'entalpia dell'aria umida è data dalla somma dell'entalpie dell'aria secca e del vapore. Con riferimento all'unità di massa d'aria secca, l'entalpia può essere espressa come

$$h = h_a + x h_v \quad (8.5)$$

Come si è detto, nell'intervallo di temperature che interessa il condizionamento, sia l'aria secca sia il vapore possono essere considerati gas a comportamento ideale. Pertanto, nell'ipotesi aggiuntiva di calori specifici costanti, si ha

$$h_a = c_{pa} t \quad (8.6)$$

ed

$$h_v \cong r_0 + c_{pv} t \quad (8.7)$$

se si pongono uguali a zero l'entalpia dell'aria secca a 0 °C e l'entalpia dell'acqua a 273,16 K (= 0,01 °C), nello stato di liquido saturo. Nelle relazioni precedenti  $c_{pa}$  è il calore specifico a pressione costante dell'aria secca,  $c_{pv}$  è il calore specifico a pressione costante del vapore ed  $r_0$  è il calore di vaporizzazione dell'acqua a 0,01 °C. Sostituendo le (8.6) ed (8.7) nella (8.5), ed utilizzando i valori medi dei calori specifici nel campo d'interesse per il condizionamento dell'aria, si ottiene

$$\begin{aligned} h &= c_{pa} t + x(r_0 + c_{pv} t) \\ &= 1,006 t + x(2501 + 1,875 t) \text{ kJ / kg} \end{aligned} \quad (8.8)$$

con un'approssimazione sufficiente ai calcoli tecnici. In tale relazione, l'entalpia è espressa in kilojoule per chilogrammo d'aria secca [kJ / kg<sub>a</sub>] mentre l'umidità specifica è espressa in chilogrammi di vapore per chilogrammo d'aria secca [kg<sub>v</sub> / kg<sub>a</sub>].

Dall'Eq. (8.8) si deduce che, in una trasformazione isoterma, la relazione tra entalpia ed umidità specifica è rigorosamente lineare. Dalla (8.8), invece, non appare esplicitamente la relazione tra umidità specifica e temperatura in una trasformazione isoentalpica. Si osservi però che la relazione (8.8) può essere scritta nella forma equivalente

$$\begin{aligned} x &= \frac{h - c_{pa} t}{r_0 + c_{pv} t} \\ &= \frac{h - 1,006 t}{2501 + 1,875 t} \end{aligned} \quad (8.9)$$

dove si ha  $r_0 + c_{pv} t \cong \text{cost}$ , essendo  $r_0 \gg c_{pv} t$  nelle normali condizioni o-

perative. Pertanto, in una trasformazione isoentalpica, la relazione tra umidità specifica e temperatura può essere considerata lineare con un'approssimazione sufficiente ai fini pratici.

### 8.3.4 Calore Specifico a Pressione Costante dell'Aria Umida

Talvolta può essere conveniente scrivere la relazione (8.8) nella forma

$$h = c_{pu} t + r_0 x \quad (8.10)$$

dove

$$c_{pu} = \left( \frac{\partial h}{\partial t} \right)_p = c_{pa} + x c_{pv} \quad (8.11)$$

media ponderale tra i calori specifici a pressione costante dell'aria secca e del vapore, è detto calore specifico a pressione costante dell'aria umida. Naturalmente,  $c_{pu}$  dipende dall'umidità specifica ma non varia molto, in assoluto, nelle normali condizioni operative.

## 8.4 DIAGRAMMI PSICROMETRICI

Nel titolo si fa riferimento a “diagrammi psicrometrici” in quanto, purtroppo, sono ormai entrati nell'uso comune ben tre diagrammi dell'aria umida, diversi tra loro. Essi sono riferiti, come si è detto, alla pressione totale di 101,325 kPa e sono basati sulle relazioni ricavate nella sezione precedente.

### 8.4.1 Diagramma di Carrier

Il diagramma di Carrier è così chiamato dal nome dell'industria Statunitense che lo ha introdotto. Esso utilizza come assi ortogonali la temperatura (in

ascisse) e l'umidità specifica (in ordinate), di modo che le isoterme sono rette verticali, mentre le curve ad umidità specifica costante sono rette orizzontali. Il processo di costruzione del diagramma di Carrier è schematizzato nella Fig. 8.2.

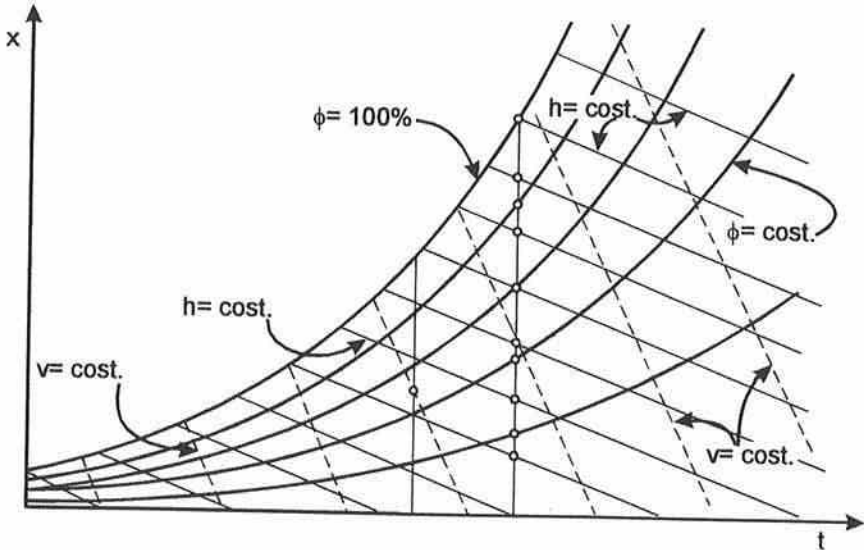


Figura 8.2 Costruzione del diagramma psicrometrico di Carrier.

Sostituendo nella relazione (8.4) i valori della pressione di saturazione  $p_s = p_s(t)$ , corrispondenti alle varie isoterme, si ottiene

$$x = 0,622 \frac{\phi p_s(t)}{p - \phi p_s(t)} \quad (8.12)$$

Tale relazione consente di individuare, sulle isoterme, le ordinate dei punti appartenenti alle curve ad umidità relativa costante. In particolare, per  $\phi = 1 = 100\%$ , si ottiene la curva di saturazione.

Le isoentalpiche sono costruite in base alla relazione (8.9) che, per ogni temperatura, consente di individuare sulle isoterme le ordinate dei punti appartenenti alle curve ad entalpia costante. Poiché, come si è detto, in



una trasformazione isoentalpica la relazione tra umidità specifica e temperatura può essere considerata quasi lineare, le isoentalpiche sul diagramma di Carrier hanno un andamento quasi rettilineo e, per  $c_{pa} \cong \text{cost}$ , sono parallele tra loro.

In base alle convenzioni poste, il volume specifico dell'aria umida, riferito all'unità di massa d'aria secca, vale

$$v = \frac{V}{m_a} = v_a = \frac{R_a T}{p_a} \quad (8.13)$$

Sostituendo il valore di  $p_a$ , ricavato dalla (8.13), nella (8.12) scritta nella forma

$$x = 0,622 \frac{p_v}{p_a} = 0,622 \frac{p - p_a}{p_a} = 0,622 \left( \frac{p}{p_a} - 1 \right) \quad (8.14)$$

si ottiene

$$x = 0,622 \left( \frac{p v}{R_a T} - 1 \right) \quad (8.15)$$

e tale relazione permette di individuare, sulle isoterme, le ordinate dei punti corrispondenti al valore fissato  $v = v_a = \text{cost}$ . Nella regione del diagramma di interesse tecnico le isocore, cioè le curve a volume specifico costante, hanno un andamento quasi rettilineo.

### Esempio 8.1

Si dimostri che, nelle normali condizioni operative, la curvatura delle isocore sul diagramma di Carrier è piccola.

#### Soluzione

La curvatura, cioè la variazione di pendenza delle isocore, è ricavata derivando due volte, rispetto a  $T$ , la relazione (8.15). Si ottiene così

$$\left(\frac{\partial x}{\partial T}\right)_v = -0,622 \frac{pv}{R_a T^2}$$

e

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial T^2}\right)_v = 0,622 \cdot 2 \frac{pv}{R_a T^3} \cong 0$$

dove il secondo membro assume valori molto bassi in quanto, al denominatore, compare la terza potenza della temperatura assoluta.

### 8.4.2 Diagramma di Mollier

Il diagramma di Mollier, o diagramma psicrometrico Europeo, impiega assi obliqui, con l'asse delle ordinate (entalpie) verticale e l'asse "vero" delle ascisse (umidità specifiche) inclinato rispetto all'orizzontale. Le linee ad umidità specifica costante sono quindi rette verticali, mentre le isoentalpiche sono rette oblique, parallele tra loro. Il processo di costruzione del diagramma di Mollier è schematizzato nella Fig. 8.3.

L'inclinazione dell'asse delle ascisse è scelta in modo tale da rendere orizzontale l'isoterma  $t = 0^\circ\text{C}$  che, in base alla (8.8), ha equazione  $h = r_0 x$ . La rappresentazione grafica dell'isoterma  $t = 0^\circ\text{C}$  può essere quindi utilizzata come asse ausiliario delle ascisse, mentre le altre isoterme hanno una pendenza

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_t = r_0 + c_{pv} t \quad (8.16)$$

crescente con la temperatura. Sostituendo nella relazione (8.8) l'equazione  $h = r_0 x$ , rappresentativa dell'isoterma  $t = 0^\circ\text{C}$ , si trova l'ascissa

$$x = -\frac{c_{pa} t}{c_{pv} t} = -\frac{c_{pa}}{c_{pv}} = -\frac{1,006}{1,875} = -0,537 \frac{\text{kg}_v}{\text{kg}_a} \quad (8.17)$$

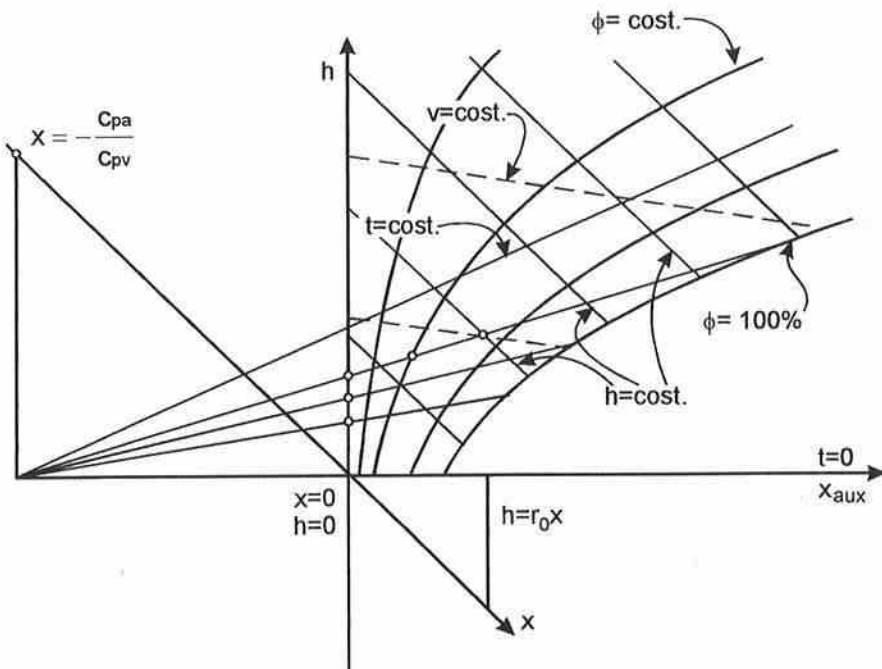
del punto in cui tutte le isoterme incontrano l'asse ausiliario delle ascisse. Analogamente, sostituendo il valore  $x = 0$  nella (8.8), si trovano le ordinate

$$h = c_{pa} t \quad (8.18)$$

dei punti di incontro tra le isoterme e l'asse delle entalpie. Poiché due punti individuano una retta, le relazioni (8.17) ed (8.18) consentono il tracciamento delle isoterme.

Le curve ad umidità relativa costante sono costruite ancora in base alla relazione (8.12) individuando, sulle isoterme, le ascisse dei punti appartenenti alle curve ad umidità relativa costante. In particolare, per  $\phi = 1 = 100\%$ , si ottiene la curva di saturazione.

Analogamente, le isocore sono costruite in base alla relazione (8.15) individuando, sulle isoterme, le ascisse dei punti corrispondenti al valore fissato  $v = v_a = \text{cost.}$



**Figura 8.3** Costruzione del diagramma psicrometrico di Mollier (non in scala).

### 8.4.3 Diagramma ASHRAE

Il diagramma psicrometrico dell'ASHRAE (American Society of Heating and Refrigerating Engineers) è stato introdotto in Italia nella versione SI dall'AICARR (Associazione Italiana Condizionamento dell'Aria, Riscaldamento e Refrigerazione). Esso non è basato sul modello di miscela di gas ideali, ma su un modello notevolmente più accurato e, per questa ragione, è raccomandato dalle organizzazioni professionali del settore del condizionamento dell'aria. Il diagramma ASHRAE può essere considerato un'immagine speculare, ruotata di circa  $90^\circ$ , del diagramma di Mollier. (La scelta dell'angolo di rotazione è, in realtà, tale da rendere verticale l'isoterma  $t = 50^\circ\text{C}$ ). Di conseguenza, nel diagramma ASHRAE, le linee ad umidità specifica costante sono orizzontali mentre le isoentalpiche sono oblique e parallele tra loro.

Da un punto di vista pratico, si può osservare che il diagramma ASHRAE appare molto simile al diagramma di Carrier. Di conseguenza, l'uso del diagramma di Carrier, vantaggioso sul piano didattico, non pregiudica in alcun modo il successivo impiego del diagramma ASHRAE nelle applicazioni professionali.

## 8.5 MISURE SULL'ARIA UMIDA

Lo stato termodinamico dell'aria umida non può essere valutato direttamente, in quanto l'unico parametro misurabile direttamente, con buona accuratezza, è la temperatura. Infatti, non sono possibili misure dirette dell'entalpia o dell'umidità specifica, e le misure dirette dell'umidità relativa, anche se eseguite con i moderni psicrometri a semiconduttori, non danno ancora risultati molto affidabili. Per questa ragione, a tutt'oggi, nelle operazioni di collaudo degli impianti di condizionamento sono utilizzate misure indirette, basate sulle considerazioni riportate nei paragrafi successivi.

### 8.5.1 Temperatura di Rugiada

Nel Paragrafo 8.2, si era già preso in esame il processo di raffreddamento dell'aria umida a pressione totale costante e si era osservato che, nella trasformazione, resta costante anche la pressione parziale del vapore mentre diminuisce la pressione di saturazione. In queste ipotesi, dalla (8.2) si ha che l'umidità specifica resta costante mentre, dalla (8.3), segue che l'umidità relativa aumenta, fino a raggiungere il valore  $\phi = 100\%$ . Successivamente, il vapore contenuto nell'aria comincia a condensare e la temperatura a cui inizia il processo di condensazione è detta temperatura di rugiada.

La temperatura di rugiada può essere misurata, ad esempio, con un termometro elettrico, a termocoppia od a termoresistenza, collegato ad uno specchietto che viene progressivamente raffreddato. La temperatura di rugiada è la temperatura alla quale lo specchietto comincia ad appannarsi, mentre la trasformazione seguita dall'aria a contatto dello specchietto è rappresentata in Fig. 8.4. Il termometro a punto di rugiada è molto accurato, ma non è semplice da usare in quanto richiede l'impiego di un sistema refrigerante e, possibilmente, anche di un fotodiodo per la rilevazione automatica dell'appannamento.

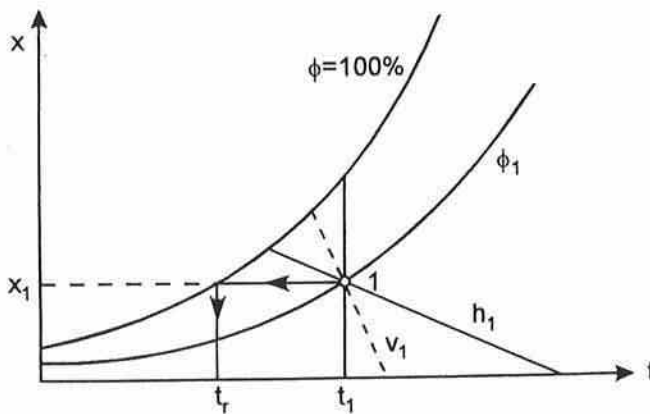


Figura 8.4 Individuazione della temperatura di rugiada sul diagramma psicrometrico.

**Esempio 8.2**

Utilizzando il diagramma psicrometrico, si verifichi che l'aria, con umidità relativa del 70% e temperatura di 20 °C, è caratterizzata da una temperatura di rugiada pari a circa 14,5 °C.

*Soluzione*

Seguendo una trasformazione del tipo illustrato nella Fig. 8.4, si può facilmente verificare che l'isoterma  $t = 14,5$  °C interseca la curva di saturazione nel punto in cui il vapore inizia a condensare. Tale osservazione rende pienamente comprensibile la norma che impone di non scendere sotto ai 14 °C con la temperatura superficiale interna delle pareti di un locale. Infatti, essendo  $t = 20$  °C con  $\phi = 70\%$  condizioni interne non improbabili, una temperatura delle pareti inferiore a 14 °C può causare depositi di condensa, e conseguente formazione di muffe sulle pareti.

**8.5.2 Temperatura di Bulbo Bagnato**

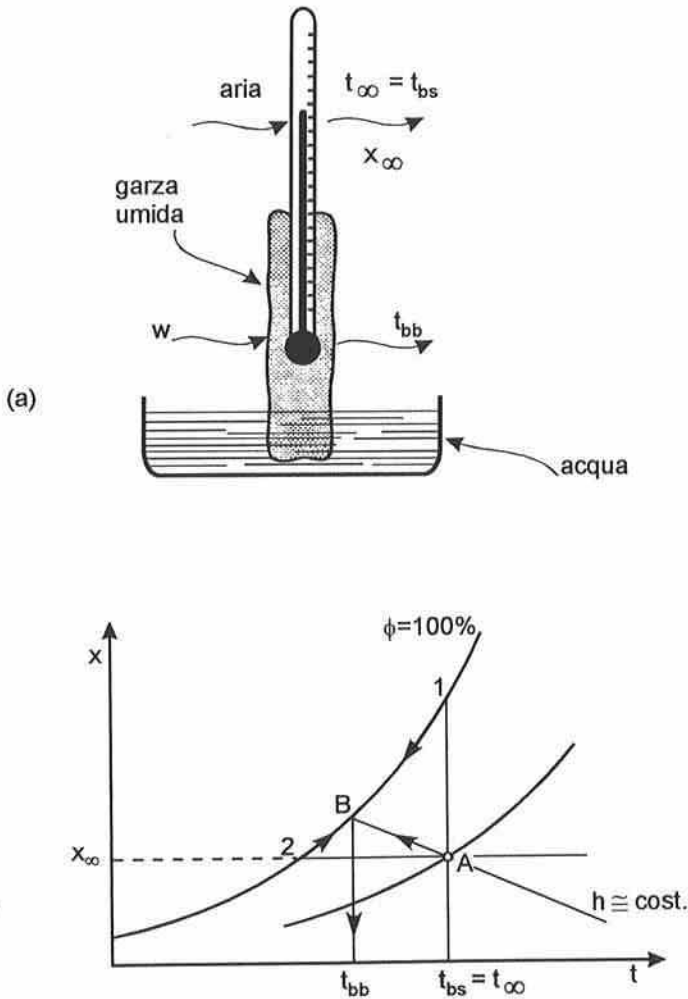
Come è noto, quando l'acqua evapora scambiando calore con una corrente d'aria più calda, la temperatura dell'aria a contatto con essa diminuisce in modo chiaramente rilevabile. La situazione è schematizzata nella Fig. 8.5 (a) dove il bulbo di un termometro, avvolto in una garza mantenuta umida, è investito da una corrente d'aria non satura a temperatura  $t_\infty$  ed umidità specifica  $x_\infty$ . La temperatura  $t_\infty$  coincide con la temperatura misurata da un normale termometro a convezione il cui bulbo sia mantenuto secco e, per questa ragione, è definita anche temperatura a bulbo secco

$$t_\infty = t_{bs} \quad (8.19)$$

per distinguerla dalla temperatura a bulbo bagnato  $t_{bb}$  misurata, invece, dal termometro il cui bulbo è avvolto nella garza mantenuta umida.

Il punto rappresentativo delle condizioni  $(t_\infty, x_\infty)$  dell'aria indisturbata è indicato con A sul diagramma di Fig. 8.5 (b). Il punto di bulbo

bagnato B, rappresentativo delle condizioni dell'aria a contatto della garza, si trova certamente sulla curva di saturazione. Con riferimento allo schema di Fig. 8.5 (b), si può anche affermare che il punto stesso si trova tra il punto limite superiore 1, alla temperatura indisturbata  $t_{\infty} = t_{bs}$ , ed il punto limite inferiore 2, alla umidità specifica indisturbata  $x_{\infty}$ .



**Figura 8.5** Equilibrio di bulbo bagnato: (a) misura della temperatura di bulbo bagnato e (b) rappresentazione del processo sul diagramma psicrometrico.

In realtà, se all'inizio del processo il punto B coincidesse con 1, si sposterebbe poi verso il basso, in quanto l'evaporazione farebbe diminuire la sua temperatura. Analogamente, se coincidesse con 2, si sposterebbe poi verso l'alto, perché la convezione termica farebbe aumentare la sua temperatura. Il punto B si muove, infatti, fino a trovare un equilibrio tra la perdita di calore per evaporazione e l'apporto di calore per convezione termica. Sperimentalmente si trova che, per il sistema acqua-aria, il punto di equilibrio si sposta fino, praticamente, ad incontrare l'isoentalpica per A. (Si potrebbe dimostrare, ma la dimostrazione non è qui riportata, che tale "quasi coincidenza" non si verifica per altre miscele gas-vapore).

Infine, va sottolineato che isoentalpiche e curve a temperatura di bulbo bagnato costante non sono esattamente sovrapponibili ed, infatti, esistono diagrammi psicrometrici, ad uso professionale, dove tali famiglie di curve sono riportate distinte.

### **Esempio 8.3**

Utilizzando il diagramma psicrometrico, si verifichi che l'aria, con umidità relativa del 70% e temperatura a bulbo secco di 20 °C, è caratterizzata da una temperatura di bulbo bagnato pari a circa 16,5 °C.

#### *Soluzione*

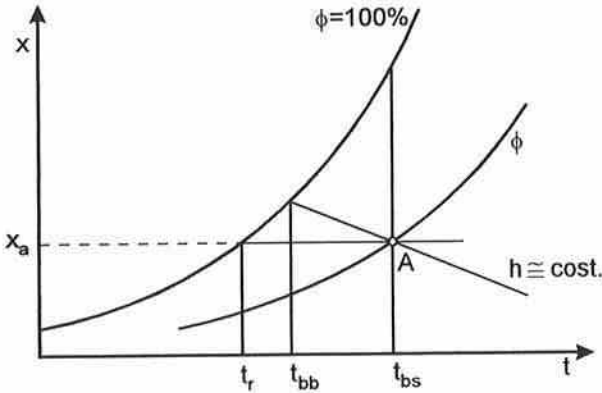
Con riferimento alla Fig. 8.5 (b), si può facilmente verificare che l'isoentalpica per il punto A, caratterizzato da  $t_{bs} = 20$  °C e  $\phi = 70\%$ , interseca la curva di saturazione nel punto avente temperatura  $t_{bb}$  pari a circa 16,5 °C.

### **8.5.3 Individuazione dello Stato dell'Aria Umida**

Come evidenziato in Fig. 8.6, note due qualunque delle tre temperature di rugiada, bulbo secco e bulbo bagnato, può essere individuata facilmente, sul diagramma psicrometrico, la terza temperatura e, quindi, anche il punto A rappresentativo dello stato termodinamico dell'aria umida. Di solito, nei



normali controlli di prestazione degli impianti di condizionamento, sono utilizzate le temperature di bulbo secco e di bulbo bagnato in quanto, come si è osservato in precedenza, la temperatura di bulbo bagnato è più facile da misurare della temperatura di rugiada.



**Figura 8.6** Individuazione dello stato termodinamico dell'aria umida note due qualunque delle tre temperature di: bulbo secco, bulbo bagnato e rugiada.

## 8.6 TRASFORMAZIONI DELL' ARIA UMIDA

Il diagramma psicrometrico si presta molto bene a rappresentare le principali trasformazioni d'interesse tecnico cui è sottoposta l'aria umida. Nel seguito sono prese in considerazione alcune di queste trasformazioni supponendo, al solito, che la pressione totale si mantenga costante e che siano trascurabili le variazioni d'energia cinetica e potenziale.

### 8.6.1 Mescolamento Adiabatico

Molto spesso, negli impianti di condizionamento, due correnti d'aria sono mescolate a pressione costante, senza che vi siano scambi di calore o di umidità con l'esterno. In tale situazione si parla di mescolamento adiabatico

e, nell'analisi termodinamica, si procede come indicato nel seguito, trascurando le variazioni d'energia cinetica e potenziale.

Dai bilanci d'energia per l'aria e di materia per l'acqua, applicati alla situazione schematizzata in Fig. 8.7 (a), si ricava

$$\dot{m}_{a1}h_1 + \dot{m}_{a2}h_2 = \dot{m}_{a3}h_3 = (\dot{m}_{a1} + \dot{m}_{a2})h_3 \quad (8.20)$$

e

$$\dot{m}_{a1}x_1 + \dot{m}_{a2}x_2 = \dot{m}_{a3}x_3 = (\dot{m}_{a1} + \dot{m}_{a2})x_3 \quad (8.21)$$

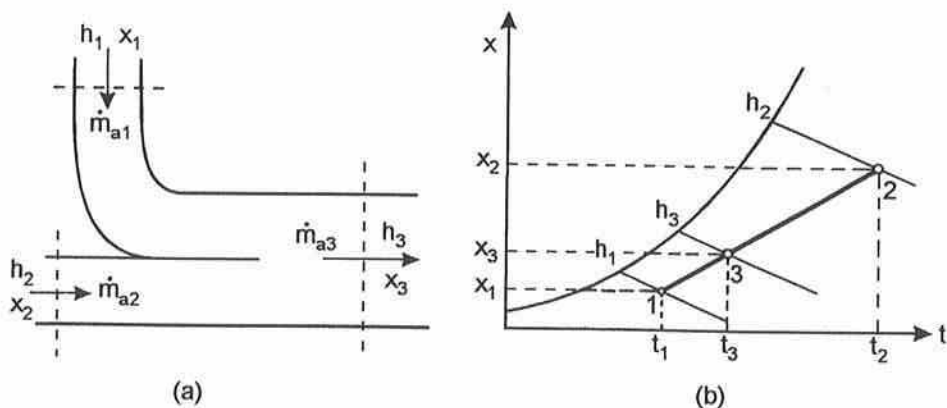
ovvero

$$h_3 = \frac{\dot{m}_{a1}}{\dot{m}_{a3}}h_1 + \frac{\dot{m}_{a2}}{\dot{m}_{a3}}h_2 \quad (8.22)$$

e

$$x_3 = \frac{\dot{m}_{a1}}{\dot{m}_{a3}}x_1 + \frac{\dot{m}_{a2}}{\dot{m}_{a3}}x_2 \quad (8.23)$$

rispettivamente. In coordinate  $(h, x)$  quindi, il punto miscela 3 divide il segmento  $\overline{12}$  in due segmenti aventi lunghezze proporzionali alle portate d'aria.



**Figura 8.7** Mescolamento adiabatico: (a) schema funzionale e (b) rappresentazione del processo.

In coordinate  $(x, t)$  tale proprietà continua a valere, come indicato in Fig. 8.7 (b), purché siano trascurate le variazioni con  $x$  del calore specifico a pressione costante dell'aria umida. Pertanto, con similitudine meccanica, si può affermare che il punto 3 si colloca sempre nel baricentro del sistema di due masse proporzionali alle portate  $\dot{m}_{a1}$  ed  $\dot{m}_{a2}$  poste, rispettivamente, nel punto 1 e nel punto 2.

#### Esempio 8.4

Nell'ipotesi di variazioni trascurabili di  $c_{pu}$  con  $x$ , si determini la posizione, sul diagramma psicrometrico di Carrier, del punto rappresentativo della miscelazione, isobara ed adiabatica, tra due correnti d'aria.

#### Soluzione

Sostituendo le (8.10) e (8.11) nella (8.20), si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{m}_{a1}(c_{pa} + x_1 c_{pv})t_1 + \dot{m}_{a1}r_0x_1 + \dot{m}_{a2}(c_{pa} + x_2 c_{pv})t_2 + \dot{m}_{a2}r_0x_2 \\ = \dot{m}_{a3}(c_{pa} + x_3 c_{pv})t_3 + \dot{m}_{a3}r_0x_3 \end{aligned}$$

e sottraendo, membro a membro, da questa relazione la (8.21) moltiplicata per  $r_0$ , si ha

$$\dot{m}_{a1}(c_{pa} + x_1 c_{pv})t_1 + \dot{m}_{a2}(c_{pa} + x_2 c_{pv})t_2 = \dot{m}_{a3}(c_{pa} + x_3 c_{pv})t_3$$

Se si trascurano le variazioni di  $c_{pu} = c_{pa} + x c_{pv}$ , si ricava la relazione omologa della (8.22), scritta nella forma

$$t_3 = \frac{\dot{m}_{a1}}{\dot{m}_{a3}} t_1 + \frac{\dot{m}_{a2}}{\dot{m}_{a3}} t_2$$

Poiché la relazione (8.23) continua a valere anche sul diagramma di Carrier, si può affermare che, nelle ipotesi poste, il punto miscela 3 divide il segmento  $\overline{12}$  in due segmenti aventi lunghezze proporzionali alle portate d'aria.

### 8.6.2 Umidificazione Adiabatica

Un tempo, gli umidificatori utilizzati negli impianti di condizionamento invernale erano del tipo schematizzato nella Fig. 8.8 (a). Essi erano chiamati anche saturatori adiabatici in quanto, nell'ipotesi di funzionamento ideale, avrebbero portato l'aria umida a saturazione. Nell'analisi termodinamica del processo d'umidificazione adiabatica, si procede come indicato nel seguito, trascurando gli scambi di calore e lavoro con l'esterno e le variazioni d'energia cinetica e potenziale.

Dai bilanci di energia per l'aria e di materia per l'acqua, applicati alla situazione schematizzata in Fig. 8.8 (a), si ricava

$$\dot{m}_a(h_2 - h_1) = \dot{m}_\ell h_\ell \quad (8.24)$$

e

$$\dot{m}_a(x_2 - x_1) = \dot{m}_\ell \quad (8.25)$$

rispettivamente. Dividendo membro a membro le relazioni precedenti si ottiene

$$\frac{h_2 - h_1}{x_2 - x_1} = h_\ell \quad (8.26)$$

ovvero

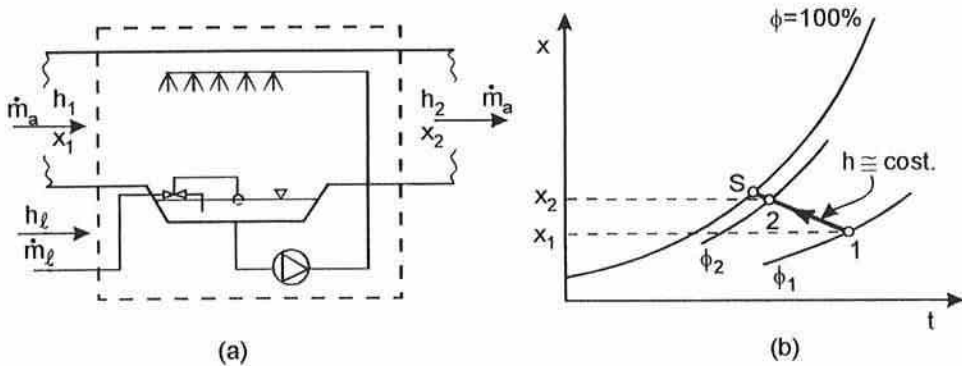
$$h_2 - h_1 = h_\ell(x_2 - x_1) = c_\ell t_\ell(x_2 - x_1) \quad (8.27)$$

Nella maggior parte delle situazioni d'interesse pratico, la differenza tra le entalpie all'uscita ed all'entrata è trascurabile, in quanto molto minore sia di  $h_1$  che di  $h_2$ . Quindi il processo di umidificazione che ha luogo in un saturatore adiabatico può essere considerato, con buona approssimazione, isoentalpico.

Come si è detto, se l'acqua è finemente polverizzata e l'umidificatore è abbastanza grande, l'aria all'uscita si avvicina alle condizioni di

saturazione. Per questo motivo, si usa definire “temperatura di saturazione adiabatica” la temperatura raggiunta dall’aria all’uscita di un umidificatore ideale, nell’ipotesi che l’acqua di reintegro sia introdotta alla temperatura d’uscita dell’aria stessa ( $t_\ell = t_2$ ). Poiché l’ipotesi d’isoentalpicità del processo, utilizzata nella schematizzazione dei saturatori adiabatici ideali, era stata fatta anche nella valutazione della temperatura di bulbo bagnato, si ha che temperatura di saturazione adiabatica e temperatura di bulbo bagnato possono essere considerate pressoché coincidenti ai fini pratici.

Si noti tuttavia che, in un umidificatore reale, la trasformazione resta isoentalpica ma ha l’andamento indicato nella Fig. 8.8 (b), in quanto l’umidità relativa all’uscita raggiunge, al massimo, valori compresi tra il 90% ed il 95%.



**Figura 8.8** Umidificazione adiabatica: (a) schema funzionale e (b) rappresentazione del processo.

### Esempio 8.5

Una portata d’aria di 2000 kg/h che, inizialmente, si trova a 30 °C ed all’umidità relativa del 30% è fatta passare attraverso un umidificatore adiabatico. Si calcoli il valore della portata d’acqua di reintegro, nell’ipotesi che l’umidità relativa dell’aria all’uscita sia pari al 90%.

Soluzione

Sul diagramma psicrometrico, in corrispondenza allo stato di entrata 1, si legge  $x_1 = 8 \text{ g}_v / \text{kg}_a = 0,008 \text{ kg}_v / \text{kg}_a$ . Il punto 2, rappresentativo delle condizioni all'uscita, viene determinato muovendosi lungo l'isoentalpica per 1 sino a raggiungere la curva avente umidità relativa 90%. Si trova così il valore dell'umidità specifica all'uscita  $x_2 = 12,5 \text{ g}_v / \text{kg}_a = 0,0125 \text{ kg}_v / \text{kg}_a$  e, di conseguenza, risulta

$$\dot{m}_\ell = \dot{m}_a(x_2 - x_1) = 2000(0,0125 - 0,008) = 9 \text{ kg/h} = 2,5 \text{ g/s}$$

Si noti che, nella trasformazione, la temperatura dell'aria diminuisce fino ad arrivare a 19 °C circa.

### 8.6.3 Umidificazione a Vapore

Negli ultimi anni ci si è resi conto che i saturatori adiabatici non offrono sufficienti garanzie igieniche, in quanto l'inevitabile ristagno d'acqua nelle vasche di raccolta può favorire lo sviluppo di germi patogeni. Di conseguenza, attualmente, si preferisce fare ricorso a processi d'umidificazione nei quali è utilizzato direttamente vapore "pulito", cioè prodotto a partire da acqua non trattata con sostanze chimiche pericolose. Nell'analisi termodinamica del processo d'umidificazione a vapore, si procede come indicato nel seguito, trascurando gli scambi termici con l'esterno e le variazioni d'energia cinetica e potenziale.

Nella situazione schematizzata in Fig. 8.9 (a), si può scrivere due bilanci separati, uno per l'energia

$$\dot{m}_a(h_2 - h_1) = \dot{m}_v h_v \quad (8.28)$$

dove  $h_v$  è l'entalpia del vapore immesso, ed uno di materia per l'acqua

$$\dot{m}_a(x_2 - x_1) = \dot{m}_v \quad (8.29)$$

Dividendo membro a membro le relazioni precedenti si ottiene

$$\frac{h_2 - h_1}{x_2 - x_1} = h_v \quad (8.30)$$

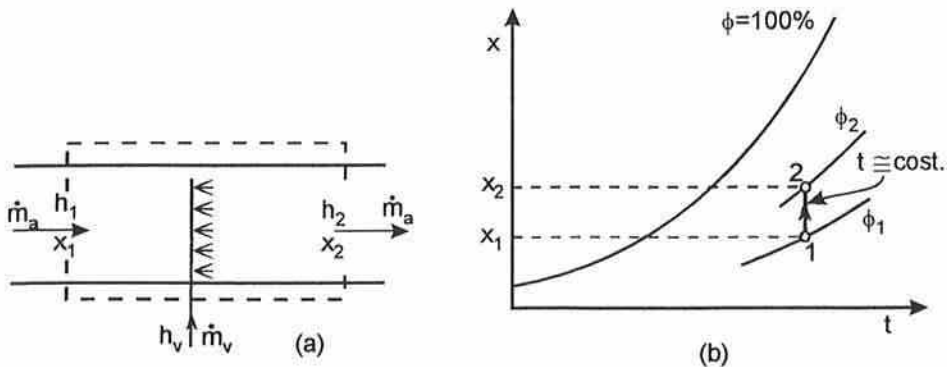
mentre, trascurando le differenze tra l'entalpia del vapore negli stati 1 e 2, si ha

$$\begin{aligned} h_2 - h_1 &= (h_{a2} - h_{a1}) + x_2 h_{v2} - x_1 h_{v1} \\ &= c_{pa}(t_2 - t_1) + x_2 h_{v2} - x_1 h_{v1} \cong c_{pa}(t_2 - t_1) + \bar{h}_v(x_2 - x_1) \end{aligned} \quad (8.31)$$

dove  $\bar{h}_v$  è il valor medio dell'entalpia del vapore nell'aria tra gli stati 1 e 2. Sostituendo la (8.31) nella (8.30) si ricava

$$\frac{t_2 - t_1}{x_2 - x_1} = \frac{h_v - \bar{h}_v}{c_{pa}} \quad (8.32)$$

da cui si vede che l'umidificazione a vapore comporta, di solito, un aumento di temperatura in quanto l'entalpia del vapore iniettato è maggiore dell'entalpia del vapore contenuto nell'aria. D'altra parte, nella maggioranza dei casi pratici, l'aumento di temperatura tra gli stati 1 e 2 è piccolo e, generalmente, viene trascurato.



**Figura 8.9** Umidificazione a vapore: (a) schema funzionale dell'umidificatore e (b) rappresentazione del processo.

**Esempio 8.6**

Si debbano fornire, ad una portata di 2000 kg/h d'aria, 4,5 grammi di vapore per ogni chilogrammo d'aria, impiegando un umidificatore a vapore. Si determini l'umidità relativa all'uscita nelle ipotesi che la trasformazione sia isoterma e che, inizialmente, l'aria si trovi a 30 °C ed all'umidità relativa del 30%.

*Soluzione*

Le condizioni dell'aria all'uscita vengono determinate sul diagramma psicometrico muovendosi lungo una isoterma dal punto 1, caratterizzato da  $x_1 = 8 \text{ g}_v / \text{kg}_a = 0,008 \text{ kg}_v / \text{kg}_a$ , sino al punto 2, caratterizzato da  $x_2 = 12,5 \text{ g}_v / \text{kg}_a = 0,0125 \text{ kg}_v / \text{kg}_a$ . Si trova così  $\phi_2 = 47\%$ , cioè un valore notevolmente più basso del valore all'uscita nel corrispondente processo d'umidificazione adiabatico.

**8.6.4 Riscaldamento o Raffreddamento Semplice**

Nei processi di riscaldamento o raffreddamento ad umidità specifica costante è impiegata, di regola, una batteria alettata, cioè uno scambiatore costituito da un fascio di tubi provvisti di alette. Va notato che i processi di riscaldamento non accompagnati da umidificazione sono, necessariamente, ad umidità specifica costante. Invece, i processi di raffreddamento hanno luogo ad umidità specifica costante solo se la temperatura superficiale esterna della batteria non è inferiore alla temperatura di rugiada dell'aria.

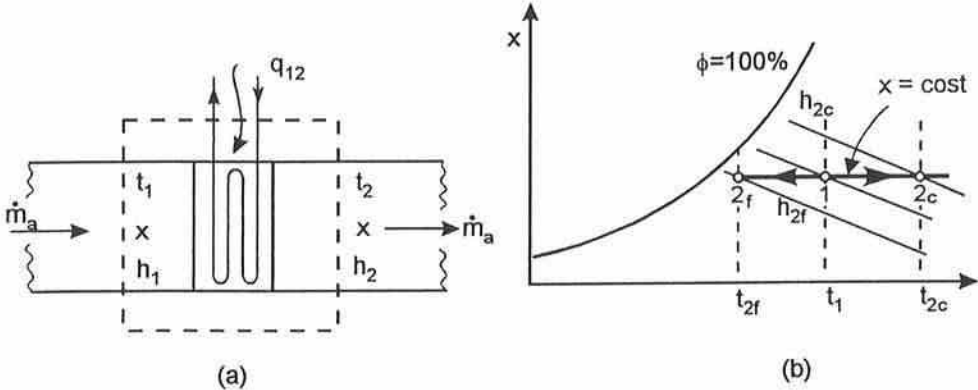
Quando, nella situazione schematizzata in Fig. 8.10 (a) si trascurano le variazioni d'energia cinetica e potenziale, il bilancio dell'energia può essere scritto nella forma

$$q_{12} = \dot{m}_a (h_2 - h_1) = \dot{m}_a (c_{pa} + x c_{pv}) (t_2 - t_1) = \dot{m}_a c_{pu} (t_2 - t_1) \quad (8.33)$$

Come evidenziato in Fig. 8.10 (b), si ha  $t_{2c} > t_1$  e  $q_{12}^+$  nel riscaldamento,



mentre si ha  $t_{2f} < t_1$  e  $q_{12}^-$  nel raffreddamento. Il bilancio di materia per l'acqua non è invece necessario in quanto, come si è detto, non si hanno variazioni d'umidità specifica. Per questa ragione lo scambio termico  $q_{12}$  è detto "sensibile", intendendo che non è associato, in alcun modo, agli scambi di calore latente che si hanno nei processi di vaporizzazione o condensazione.



**Figura 8.10** Riscaldamento o raffreddamento ad umidità specifica costante: (a) schema funzionale e (b) rappresentazione del processo.

### Esempio 8.7

Una portata d'aria di 2000 kg/h entra in una batteria alettata con umidità specifica pari a  $0,004 \text{ kg}_v / \text{kg}_a$  e temperatura di  $11 \text{ }^\circ\text{C}$ , ed esce alla temperatura di  $30 \text{ }^\circ\text{C}$ . Si determini il flusso termico da fornire mediante la batteria.

#### Soluzione

Dal diagramma psicrometrico, nelle condizioni 1 di entrata si ha:  $h_1 = 21,3 \text{ kJ/kg}$  mentre all'uscita, in corrispondenza all'umidità specifica  $x_2 = 4 \text{ g}_v / \text{kg}_a$  ed alla temperatura  $t_2 = 30 \text{ }^\circ\text{C}$ , si ha  $h_2 = 40,5 \text{ kJ/kg}$ . Si ha quindi

$$q_{12}^+ = \dot{m}_a (h_2 - h_1) = (2000 / 3600)(40,5 - 21,3) = 10,7 \text{ kW}$$

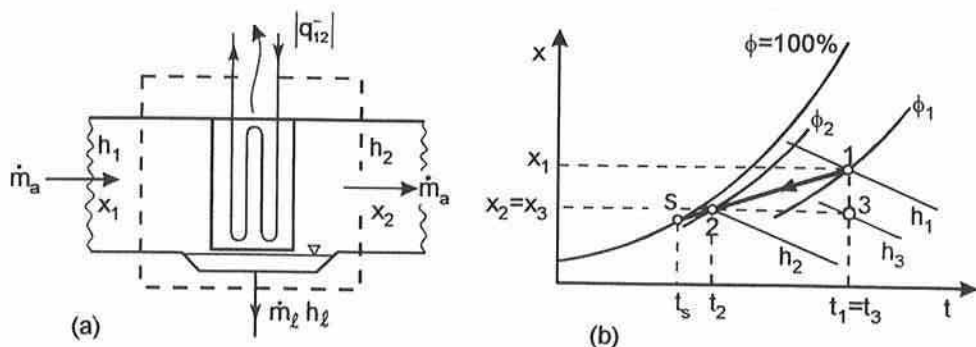
Facendo riferimento al calore specifico a pressione costante dell'aria umida, si trova

$$\begin{aligned} q_{12}^+ &= \dot{m}_a c_{pu} (t_2 - t_1) = \dot{m}_a (c_{pa} + x c_{pv}) (t_2 - t_1) \\ &= (2000 / 3600)(1,006 + 0,004 \cdot 1,875)(30 - 11) = 10,7 \text{ kW} \end{aligned}$$

a verifica dell'accuratezza nella lettura del diagramma psicrometrico.

### 8.6.5 Raffreddamento con Deumidificazione

Lo schema impiantistico, riportato in Fig. 8.11 (a), non differisce molto da quello del caso precedente, tranne che per la presenza d'una bacinella di raccolta e scarico delle condense. Quando la temperatura superficiale esterna della batteria alettata è inferiore alla temperatura di rugiada, si può pensare che l'aria all'uscita si avvicini all'equilibrio con la superficie della batteria a temperatura  $t_s$ , fino a raggiungere la temperatura  $t_s$  nel caso ideale. La trasformazione ha quindi l'andamento indicato nella Fig. 8.11 (b) in quanto, all'uscita di una batteria alettata reale, l'aria non è mai perfettamente satura raggiungendo, al massimo, valori dell'umidità relativa compresi tra il 90% ed il 95%.



**Figura 8.11** Raffreddamento con deumidificazione: (a) schema funzionale e (b) rappresentazione del processo.

Nelle ipotesi poste, trascurando le variazioni d'energia cinetica e potenziale, il bilancio dell'energia fornisce

$$q_{12}^- = \dot{m}_a(h_2 - h_1) + \dot{m}_\ell h_\ell \quad (8.34)$$

dove  $\dot{m}_\ell$  è la portata di drenaggio, mentre il bilancio di materia per l'acqua porge

$$\dot{m}_\ell = \dot{m}_a(x_1 - x_2) \quad (8.35)$$

Poiché la differenza tra le umidità specifiche è molto piccola, dall'Eq. (8.35) si evince che la portata di condensato è molto inferiore alla portata d'aria. Di conseguenza, per i valori normalmente assunti dall'entalpia del condensato  $h_\ell$ , si ha che il flusso termico scambiato può essere approssimato come

$$q_{12}^- \cong \dot{m}_a(h_2 - h_1) \quad (8.36)$$

in quanto il termine  $\dot{m}_\ell h_\ell$ , al secondo membro della (8.34), è trascurabile rispetto al termine  $\dot{m}_a(h_2 - h_1)$ . In presenza di variazioni simultanee di temperatura ed umidità, nel flusso totale possono essere evidenziati due contributi: uno sensibile, associato alla variazione di temperatura ad umidità specifica costante, ed uno latente, associato alla variazione d'umidità specifica a temperatura costante. In base a ben note proprietà delle funzioni di due variabili, ciò equivale ad esprimere come

$$\Delta h = \left( \frac{\partial h}{\partial t} \right)_x \Delta t + \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)_t \Delta x \quad (8.37)$$

la differenza di entalpia. Tenendo conto della relazione (8.37) e del posizionamento del punto ausiliario 3 in Fig. 8.11 (b), la Eq. (8.36) può essere scritta nella forma

$$\begin{aligned}
 q_{12}^- &= \dot{m}_a (h_2 - h_1) = \dot{m}_a (c_{pa} + x_2 c_{pv}) (t_2 - t_1) + \dot{m}_a (r_0 + c_{pv} t_1) (x_2 - x_1) \\
 &= \dot{m}_a c_{pu} (t_2 - t_1) + \dot{m}_a h_v (x_2 - x_1) = \dot{m}_a (h_2 - h_3) + \dot{m}_a (h_3 - h_1) \\
 &= \dot{m}_a \Delta h_s + \dot{m}_a \Delta h_\lambda = q_s^- + q_\lambda^- \quad (8.38)
 \end{aligned}$$

dove  $q_s^-$  indica il contributo sensibile, mentre  $q_\lambda^-$  indica il contributo latente. Quest'ultima relazione è molto utile nell'analisi termodinamica degli impianti di condizionamento dell'aria.

### Esempio 8.8

Una portata d'aria di 2000 kg/h entra in una batteria alettata, avente una temperatura superficiale media di 10 °C, con un'umidità relativa del 60% ed una temperatura di 32 °C, mentre esce con un'umidità relativa del 90%. Si determinino il flusso termico da sottrarre mediante la batteria e la portata di drenaggio.

#### Soluzione

Dal diagramma psicrometrico, nelle condizioni 1 di entrata si ha:  $h_1 = 76$  kJ/kg ed  $x_1 = 18,3$  g<sub>v</sub> / kg<sub>a</sub>. La curva della trasformazione è il segmento di retta che congiunge il punto 1 al punto S, rappresentativo dello stato della batteria e posto sulla curva di saturazione alla temperatura di 10 °C. Il punto finale 2 si trova sul segmento  $\overline{1S}$  alla umidità relativa del 90% ed è caratterizzato da:  $t_2 = 16,5$  °C,  $h_2 = 44$  kJ/kg ed  $x_2 = 10,7$  g<sub>v</sub> / kg<sub>a</sub>. Risulta quindi

$$q_{12}^- \cong \dot{m}_a (h_2 - h_1) = (2000 / 3600)(44 - 76) = -17,8 \text{ kW}$$

e

$$\dot{m}_\ell = \dot{m}_a (x_1 - x_2) = 2000(0,0183 - 0,0107) = 15,2 \text{ kg/h} = 4,22 \text{ g/s}$$

Il punto ausiliario 3, trovandosi alla stessa temperatura del punto 1 ed alla

stessa umidità specifica del punto 2, è caratterizzato da  $h_3 = 59,5$  kJ/kg. Si ha quindi anche

$$q_s^- = \dot{m}_a(h_2 - h_3) = (2000 / 3600)(44 - 59,5) = -8,6 \text{ kW}$$

e

$$q_\lambda^- = \dot{m}_a(h_3 - h_1) = (2000 / 3600)(59,5 - 76) = -9,2 \text{ kW}$$

dove, come si vede, prevale il flusso termico latente su quello sensibile.

### 8.6.6 Raffreddamento Evaporativo

Il raffreddamento evaporativo è l'unica, tra le trasformazioni qui esaminate, che non trova applicazione diretta negli impianti di condizionamento. Esso ha per scopo la refrigerazione di una portata d'acqua attraverso l'evaporazione di parte della portata stessa. Attualmente, tale processo è utilizzato con sempre maggior frequenza quando, per asportare ingenti quantità di calore, occorre avere a disposizione portate d'acqua considerevoli a temperature non troppo diverse da quella ambiente. Infatti, non capita spesso di poter contare su corpi d'acqua superficiali come fiumi, laghi o lagune, mentre valide ragioni di carattere ecologico e normativo impediscono, quasi sempre, d'emungere acque di falda o, peggio, di servirsi degli acquedotti come fonte d'acqua "a perdere". Le apparecchiature utilizzate per ricircolare e riportare alla temperatura iniziale l'acqua di raffreddamento sono dette "torri evaporative" o "torri di raffreddamento".

Lo schema funzionale di una torre evaporativa, impiegata negli impianti di taglia piccola e media, è riportato in Fig. 8.12 (a). L'analogia tra torri evaporative e saturatori adiabatici è chiara, pur nella diversità degli obiettivi da raggiungere: raffreddamento dell'acqua nelle torri ed umidificazione dell'aria nei saturatori. Nelle torri, come nei saturatori, l'aria entra in condizioni 1, lontane dalla saturazione, ed esce in condizioni 2, vicine alla saturazione mentre, per garantire la continuità del processo, l'acqua che e-

vapora è reintegrata in condizioni 3, prossime a quelle ambiente. L'unica differenza morfologica con i saturatori riguarda il circuito dell'acqua di processo che, nelle torri, arriva calda in condizioni 4 ed esce refrigerata in condizioni 5.

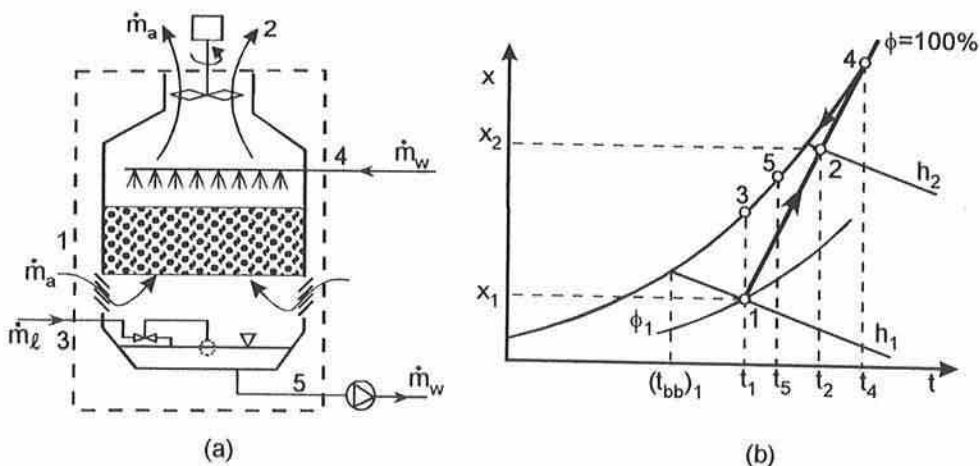
Con riferimento alla schematizzazione introdotta, possono essere scritti due bilanci separati, uno per l'energia ed uno per la materia. Il bilancio d'energia può essere scritto nella forma

$$\dot{m}_a h_{a1} + \dot{m}_w h_{w4} + \dot{m}_\ell h_{w3} = \dot{m}_a h_{a2} + \dot{m}_w h_{w5} \quad (8.39)$$

considerando il processo adiabatico verso l'esterno e trascurando la potenza fornita dal ventilatore e le variazioni d'energia cinetica e potenziale. Il bilancio di materia per l'acqua è

$$\dot{m}_a(x_{a2} - x_{a1}) = \dot{m}_\ell \quad (8.40)$$

in quanto la portata d'acqua di processo  $\dot{m}_w$  non dà contributi, essendo uguale all'entrata ed all'uscita. La portata d'aria può essere ricavata sostituendo la (8.40) nella (8.39) e risolvendo per  $\dot{m}_a$  l'espressione risultante.



**Figura 8.12** Raffreddamento evaporativo: (a) schema funzionale di una torre evaporativa e (b) rappresentazione del processo.

Si ha così

$$\dot{m}_a = \frac{\dot{m}_w (h_{w4} - h_{w5})}{(h_{a2} - h_{a1}) - (x_{a2} - x_{a1}) h_{w3}} \quad (8.41)$$

dove le proprietà dei fluidi all'entrata ed all'uscita si suppongono conosciute.

Sul diagramma psicrometrico, il raffreddamento evaporativo può essere schematizzato come in Fig. 8.12 (b). La trasformazione  $\overline{45}$ , seguita dall'acqua polverizzata (e quindi in equilibrio con l'aria a contatto), si colloca sulla curva di saturazione. Il limite inferiore di temperatura raggiungibile dall'acqua all'uscita in 5 è la temperatura di saturazione adiabatica (ovvero di bulbo bagnato) dell'aria nelle condizioni 1. Di solito, nella pratica, ci si accontenta di ottenere, all'uscita, acqua con temperature di almeno 4 K più elevate del valore minimo possibile, onde evitare sovradimensionamenti della torre. Per motivi di carattere impiantistico poi, è considerato ottimale un salto di temperatura per l'acqua ( $t_{w4} - t_{w5}$ ) dell'ordine di 5 K. Le condizioni limite per l'aria all'uscita in 2, sono le condizioni di saturazione alla temperatura dell'acqua all'ingresso in 4. Tuttavia va notato che, punto per punto lungo la torre l'aria, muovendosi in controcorrente con l'acqua, tende al raggiungimento delle condizioni di saturazione alla temperatura locale dell'acqua, variabile tra 5, all'entrata dell'aria, e 4 all'uscita dell'aria stessa. Pertanto, sul diagramma psicrometrico, l'andamento reale della trasformazione  $\overline{12}$ , seguita dall'aria, è di tipo curvilineo.

### Esempio 8.9

Una portata d'acqua di 2 kg/s entra in una torre evaporativa alla temperatura  $t_4 = 35^\circ\text{C}$  ed esce alla temperatura  $t_5 = 30^\circ\text{C}$ , mentre l'acqua di reintegro entra alla temperatura  $t_3 = 28^\circ\text{C}$  e l'aria esterna entra, in condizioni 1, alla temperatura di  $28^\circ\text{C}$  con umidità relativa del 40%. Nella ipotesi semplificativa che il punto 2, caratteristico delle condizioni dell'aria all'uscita si trovi, all'umidità relativa del 90%, sulla congiungente i punti 1 e 4, si de-

terminino la portata d'aria e la portata d'acqua d'integrazione.

### Soluzione

Con le indicazioni fornite, sul diagramma psicrometrico si trova:  $h_{a1} = 53$  kJ/kg,  $x_{a1} = 9,5$  g<sub>v</sub> / kg<sub>a</sub>,  $h_{a2} = 105$  kJ/kg ed  $x_{a2} = 28,5$  g<sub>v</sub> / kg<sub>a</sub>. Assunto un calore specifico dell'acqua pari a 4,187 kJ/(kg K), risulta

$$h_{w4} - h_{w5} = c_w(t_{w4} - t_{w5}) = 4,187(35 - 30) = 20,9 \text{ kJ / kg}$$

e

$$h_{w3} = c_w t_{w3} = 4,187 \cdot 28 = 117,2 \text{ kJ / kg}$$

Pertanto, dal bilancio dell'energia si ha

$$\begin{aligned} \dot{m}_a &= \frac{\dot{m}_w(h_{w4} - h_{w5})}{(h_{a2} - h_{a1}) - (x_{a2} - x_{a1})h_{w3}} \\ &= \frac{2 \cdot 20,9}{(105 - 53) - (0,0285 - 0,0095)105} = 0,84 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \end{aligned}$$

mentre dal bilancio di materia per l'acqua di reintegro si ottiene

$$\dot{m}_\ell = \dot{m}_a(x_{a2} - x_{a1}) = 0,83(28,5 - 9,5) = 15,77 \text{ g / s} = 56,8 \text{ kg / h}$$

Come si vede, il consumo d'acqua si aggira sui 57 kg/h ed è quindi pari a circa lo 0,8% della portata d'acqua raffreddata.

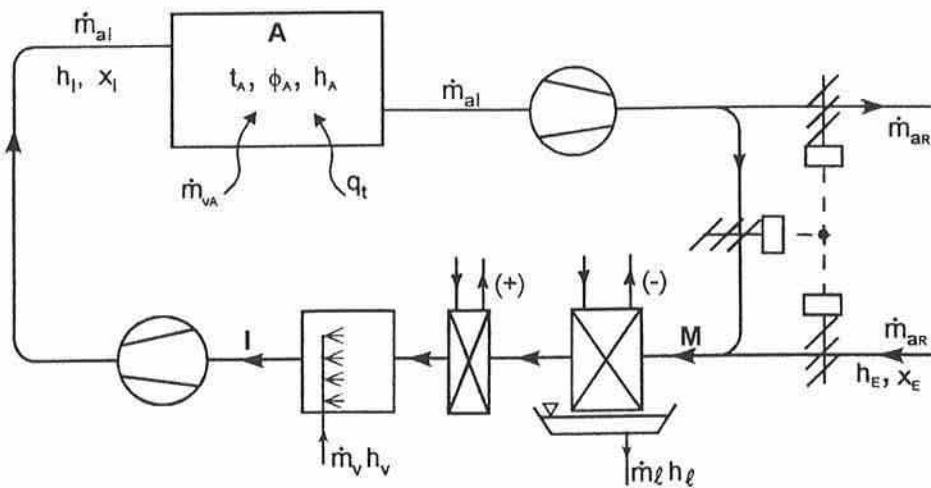
## 8.7 CONDIZIONAMENTO DELL'ARIA

Il condizionamento è l'insieme delle trasformazioni alle quali è sottoposta l'aria umida al fine di mantenere, nei locali, le condizioni di benessere termoigrometrico. Il condizionamento prevede il controllo di: temperatura, umidità relativa, purezza e velocità dell'aria. A tal fine, gli impianti di condizionamento devono far fronte ai carichi termici estivi ed invernali e devono



garantire il rinnovo programmato dell'aria interna, accompagnato da misure aggiuntive, quali la filtrazione e l'ottimizzazione dei sistemi d'immissione e d'estrazione dell'aria. L'analisi dettagliata delle diverse tipologie d'impianti di condizionamento trascende gli scopi di questo corso. Pertanto nei paragrafi che seguono sono presentati, a titolo puramente illustrativo, i cicli termodinamici di un impianto di condizionamento invernale e di un impianto di condizionamento estivo, entrambi del tipo "a tutta aria", cioè privi di corpi scaldanti o raffreddanti inseriti nell'ambiente.

Nei limiti strettamente termodinamici che si vogliono imporre alla trattazione, qui sono affrontati soltanto i problemi legati al controllo della temperatura e dell'umidità relativa in un singolo locale. In tale ipotesi, lo schema di un impianto di condizionamento è quello rappresentato in Fig. 8.13.



**Figura 8.13** Schema funzionale di un impianto di condizionamento a tutta aria.

Come si vede, i due ventilatori d'immissione e d'estrazione e le tre serrande, collegate tra loro, provvedono a miscelare l'aria estratta con l'aria di rinnovo, in modo da mantenere condizioni igieniche adeguate in A. Du-

rante l'inverno l'aria deve essere riscaldata nella batteria (+) e, successivamente, umidificata per compensare la bassa umidità specifica dell'aria esterna di rinnovo. Durante l'estate, invece, l'aria deve essere raffreddata e deumidificata nella batteria (-) ed, eventualmente, postriscaldata nella batteria (+), se la necessità di deumidificare ha comportato un abbassamento eccessivo della sua temperatura.

Per mantenere l'equilibrio termoigrometrico in A, bisogna introdurre una portata d'aria  $\dot{m}_{al}$ , avente entalpia  $h_I$  ed umidità specifica  $x_I$  tali da compensare i carichi termici ambientali  $q_t$  e le immissioni di vapore  $\dot{m}_{vA}$  associate, in genere, alla respirazione ed alla sudorazione degli occupanti il locale. Si ha quindi

$$q_t + \dot{m}_{al} h_I = \dot{m}_{al} h_A \quad (8.42)$$

e

$$\dot{m}_{vA} + \dot{m}_{al} x_I = \dot{m}_{al} x_A \quad (8.43)$$

ovvero

$$q_t = \dot{m}_{al}(h_A - h_I) \quad (8.44)$$

e

$$\dot{m}_{vA} = \dot{m}_{al}(x_A - x_I) \quad (8.45)$$

dove  $q_t$  è negativo d'inverno e positivo d'estate, mentre  $\dot{m}_{vA}$  è sempre positivo. Dividendo membro a membro le due relazioni (8.44) ed (8.45), si ricava la relazione

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{h_A - h_I}{x_A - x_I} = \frac{q_t}{\dot{m}_{vA}} \quad (8.46)$$

che, in coordinate  $(h, x)$ , fornisce la pendenza della "retta" d'esercizio, normalmente espressa in kilojoule per grammo di vapore  $[\text{kJ} / \text{g}_v]$ . Il nome retta d'esercizio deriva dal fatto che, in coordinate  $(h, x)$ , il luogo dei punti di immissione che soddisfano sia il bilancio termico che il bilancio igrometrico è la semiretta con origine in A e pendenza data dalla (8.46). In coordinate  $(x, t)$  sul diagramma di Carrier, invece, il luogo dei punti di immissione

possibili non appartiene, esattamente, ad una semiretta con origine in A, anche se può essere assimilato ad una semiretta con ottima approssimazione. Nella pratica, infatti, si traccia la “retta” d’esercizio anche sul diagramma di Carrier utilizzando l’indicatore di pendenza  $\Delta h / \Delta x$ .

Una volta tracciata la retta d’esercizio sul diagramma psicrometrico, si può scegliere una temperatura di immissione  $t_I$  tale da non recare fastidio alle persone, cioè non troppo alta d’inverno [Fig. 8.14 (a)] e non troppo bassa d’estate [Fig. 8.14 (b)]. Ciò consente di determinare implicitamente il valore della portata d’aria  $\dot{m}_{aI}$  da immettere: occorre solo verificare che il valore della portata così trovato sia sufficiente a garantire il ricambio ed a evitare stratificazioni termiche nel locale condizionato. La portata  $\dot{m}_{aI}$  deve quindi essere superiore sia alla portata minima d’aria di rinnovo  $\dot{m}_{aR}$ , introdotta per ragioni igieniche, sia alla portata corrispondente ai 3 - 4 ricambi orari, normalmente ritenuti sufficienti ad evitare stratificazioni.

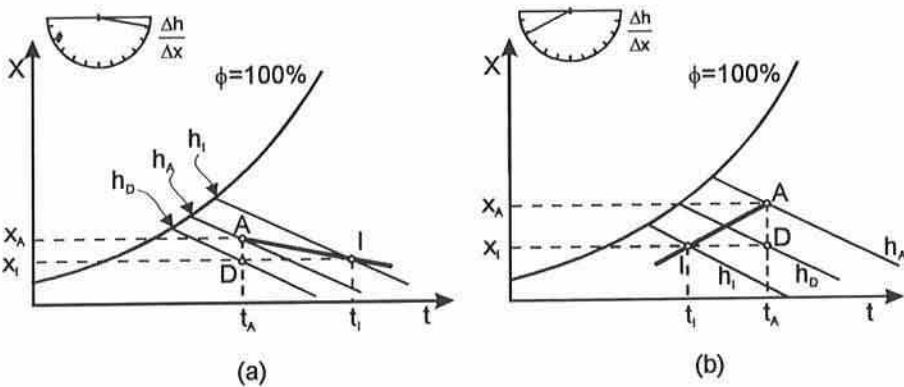


Figura 8.14 Componenti “latente” e “sensibile” del carico termico: (a) inverno e (b) estate.

### Esempio 8.10

Con riferimento alla Fig. 8.14 ed al punto ausiliario D, si dimostri che la “retta” d’esercizio ha pendenza pressoché costante anche sul diagramma  $(x, t)$  di Carrier.

*Soluzione*

Nella differenza d'entalpia tra il punto ambiente ed un generico punto di immissione, possono essere evidenziate le componenti "latente" e "sensibile". Infatti, si ha

$$\begin{aligned} h_A - h_I &= (h_A - h_D) + (h_D - h_I) = \Delta h_\lambda + \Delta h_s \\ &= (r_0 + c_{pv} t_A)(x_A - x_I) + (c_{pa} + x_I c_{pv})(t_A - t_I) \\ &= h_{vA}(x_A - x_I) + (c_{pu})_I(t_A - t_I) \end{aligned}$$

Di conseguenza, dalla relazione (8.46), si ottiene

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{h_A - h_I}{x_A - x_I} = h_{vA} + (c_{pu})_I \frac{t_A - t_I}{x_A - x_I}$$

e quindi si deduce che la "retta" passante per A e caratterizzata da una pendenza costante in coordinate  $(h, x)$ , ha una pendenza costante anche in coordinate  $(x, t)$ , almeno nei limiti in cui possono essere trascurate le variazioni di  $c_{pu}$  al variare del punto di immissione.

**8.7.1 Condizionamento Invernale**

Durante la stagione invernale, nel locale condizionato devono essere mantenute una temperatura  $t_A$ , dell'ordine dei 20 °C, ed un'umidità relativa  $\phi_A$ , dell'ordine del 50%, pur in presenza d'un carico termico negativo  $q_i^-$  e di apporti di vapore positivi in quanto legati, come si è detto, alla presenza di persone. Il carico termico, a sua volta, è assunto pari alle dispersioni termiche per conduzione attraverso le pareti poiché, agendo in favore della sicurezza, nel dimensionamento invernale si trascurano gli apporti di calore (positivi) legati, ad esempio, agli impianti d'illuminazione, all'irraggiamento solare e, in genere, a tutte le forniture gratuite (ma non garantite) di calore.

In base a questa logica, il flusso di vapore emesso dalle persone è considerato nel bilancio di materia, mentre il flusso termico emesso dalle stesse persone è trascurato nel bilancio termico.

Una volta tracciata la retta d'esercizio sui diagrammi di Fig. 8.15, si può scegliere una temperatura d'immissione  $t_I$  compresa tra 30 e 35 °C, tale cioè da non recare fastidio alle persone. Poi occorre solo verificare che la portata d'aria, così determinata implicitamente, basti anche a garantire il ricambio igienico ed a evitare stratificazioni termiche nel locale condizionato.

Per completare il ciclo, non resta che individuare il punto di miscela M ed il punto di fine riscaldamento 1. Il punto di miscela M sta sulla retta congiungente il punto esterno E con il punto ambiente A, ed è caratterizzato da un'entalpia tanto più prossima a quella del punto esterno quanto maggiore è la frazione di aria presa dall'esterno. Infatti, dal bilancio entalpico si ha

$$\dot{m}_{aR} h_E + (\dot{m}_{al} - \dot{m}_{aR}) h_A = \dot{m}_{al} h_M \quad (8.47)$$

ovvero

$$h_M = \frac{\dot{m}_{aR}}{\dot{m}_{al}} h_E + \left(1 - \frac{\dot{m}_{aR}}{\dot{m}_{al}}\right) h_A \quad (8.48)$$

Si noti che il bilancio entalpico (8.47) può anche essere scritto nella forma

$$\dot{m}_{al}(h_A - h_M) = \dot{m}_{aR}(h_A - h_E) = q_{aR}^+ \quad (8.49)$$

dove  $q_{aR}^+$  rappresenta il flusso termico da fornire all'aria di rinnovo per portarla in equilibrio termoigrometrico con l'aria del locale condizionato.

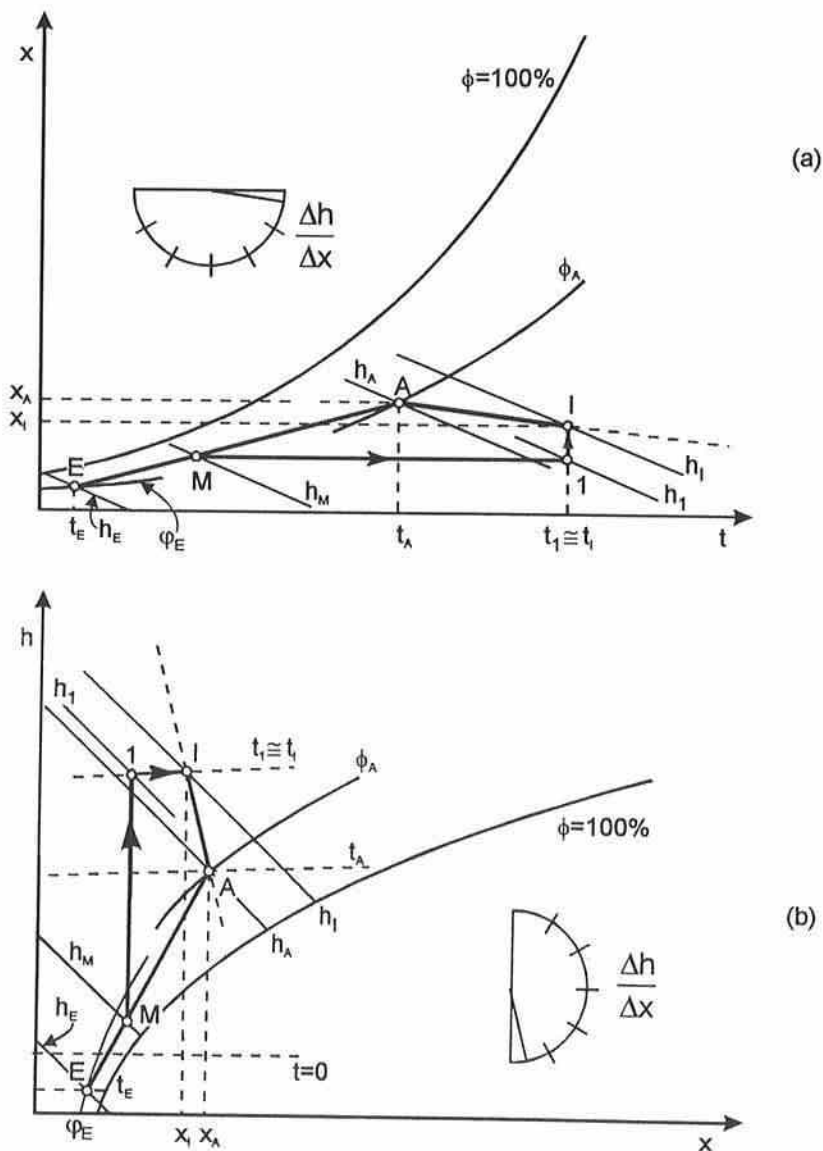
Il punto di fine riscaldamento 1 invece, ha la stessa umidità specifica di M ed, in base alle considerazioni fatte sulla umidificazione a vapore, deve trovarsi ad una temperatura prossima a  $t_I$ . Nella pratica, infatti, si usa segnare 1 sulla stessa isoterma di I.

La portata di vapore d'umidificazione è data da

$$\dot{m}_v = \dot{m}_{al}(x_I - x_1) \quad (8.50)$$

mentre il flusso termico latente fornito all'aria dall'umidificatore è

$$q_{lI}^+ = \dot{m}_{al}(h_I - h_1) = \dot{m}_{al} h_v (x_I - x_1) \quad (8.51)$$



**Figura 8.15** Ciclo di condizionamento invernale: rappresentazione sul diagramma di (a) Carrier e (b) Mollier.

Analogamente, il flusso termico fornito all'aria dalla batteria di riscaldamento è

$$q_{M1}^+ = \dot{m}_{al}(h_1 - h_M) = \dot{m}_{al}(c_{pu})_1(t_1 - t_M) \quad (8.52)$$

Pertanto, il flusso termico fornito complessivamente può essere espresso come

$$\begin{aligned} q_{M1}^+ &= q_{M1}^+ + q_{1l}^+ = \dot{m}_{al}(h_1 - h_M) \\ &= \dot{m}_{al}(h_1 - h_A) + \dot{m}_{al}(h_A - h_M) = |q_l^-| + q_{aR}^+ \end{aligned} \quad (8.53)$$

dove, nel passaggio dal penultimo all'ultimo membro, si è tenuto conto delle Eq. (8.44) ed (8.49). In base alla (8.53), si può quindi affermare che il flusso termico totale fornito all'aria (somma del flusso termico sensibile  $q_{M1}^+$  fornito dalla batteria di riscaldamento e del flusso termico latente  $q_{1l}^+$  fornito dall'umidificatore a vapore) deve fare fronte al carico termico  $|q_l^-|$ , assunto uguale alla somma delle dispersioni di calore per conduzione e del carico termico  $q_{aR}^+$ , risultante dal rinnovo forzato dell'aria nel locale condizionato.

### 8.7.2 Condizionamento Estivo

Durante la stagione estiva, nel locale condizionato devono essere mantenute una temperatura  $t_A$ , dell'ordine dei 26 °C, ed un'umidità relativa  $\phi_A$ , dell'ordine del 50%, pur in presenza di un carico termico

$$q_t^+ \cong q_s^+ + q_\lambda^+ \quad (8.54)$$

somma di flusso sensibile ( $q_s^+$ ) e latente ( $q_\lambda^+$ ). I carichi termici sensibili sono dovuti agli apporti di calore esterni (associati all'irraggiamento ed alla conduzione) ed agli apporti di calore interni (legati all'illuminazione, alla

presenza di apparecchiature elettriche ed agli scambi termici convettivi tra le persone e l'aria ambiente). I carichi termici latenti, esprimibili come

$$q_{\lambda}^{+} = \dot{m}_{vA} h_v \quad (8.55)$$

sono dovuti invece agli apporti di vapore quasi sempre derivanti, come si è detto, dalla respirazione e dalla sudorazione degli occupanti il locale condizionato.

Una volta tracciata la retta d'esercizio sui diagrammi di Fig. 8.16, si può scegliere una temperatura d'immissione  $t_I$  compresa tra 15 e 20 °C, tale cioè da non recare fastidio alle persone. Poi occorre solo verificare che la portata d'aria, così determinata implicitamente, basti anche a garantire il ricambio igienico ed a evitare stratificazioni termiche nel locale condizionato.

Per completare il tracciamento del ciclo non resta che individuare il punto di miscela M ed il punto di fine raffreddamento I. Il punto di miscela M sta sulla retta congiungente il punto esterno E con il punto ambiente A, ed è caratterizzato da un'entalpia tanto più prossima a quella del punto esterno quanto maggiore è la frazione d'aria presa dall'esterno. Si può quindi procedere come nel caso invernale, applicando le relazioni (8.47) ed (8.48) mentre, nel caso estivo, la relazione (8.49) porge

$$\dot{m}_{aI}(h_A - h_M) = \dot{m}_{aR}(h_A - h_E) = \bar{q}_{aR} \quad (8.56)$$

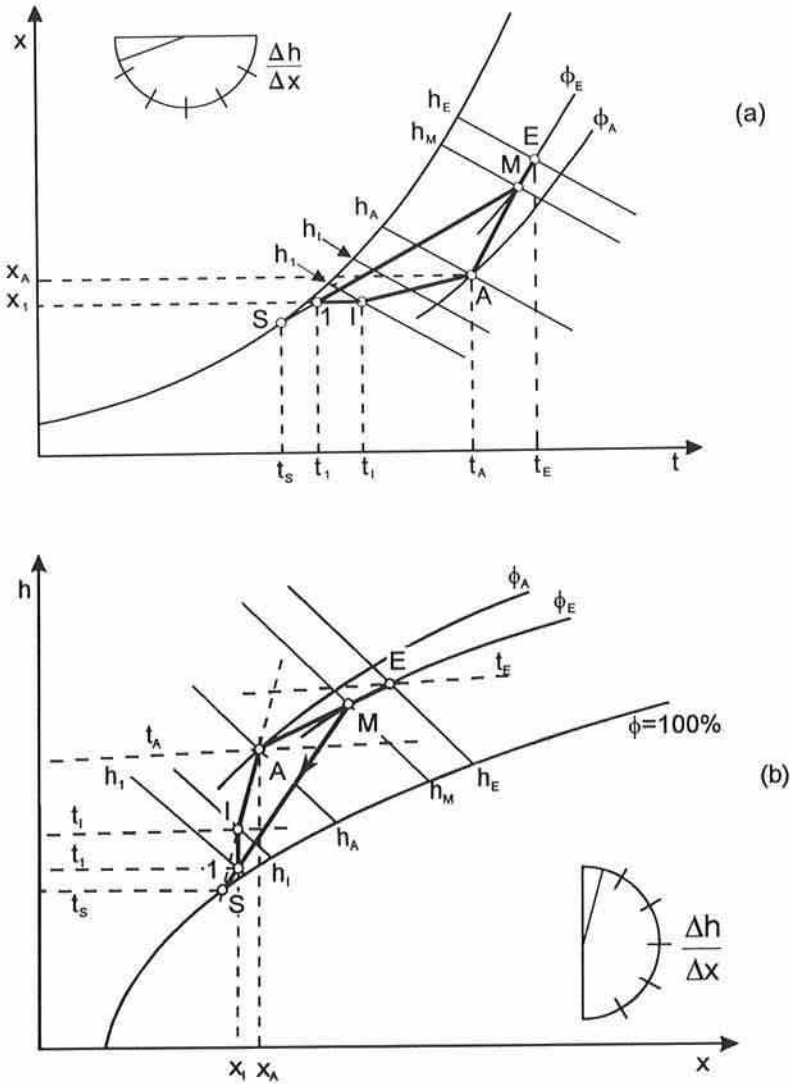
dove  $\bar{q}_{aR}$  rappresenta il flusso termico da sottrarre all'aria di rinnovo per portarla in equilibrio termoigrometrico con l'aria del locale condizionato.

Il punto di fine raffreddamento I ha ora la stessa umidità specifica di I ed appartiene anche alla retta congiungente M con il punto S, rappresentativo della batteria sulla curva di saturazione. Di conseguenza per chiudere il ciclo, dopo aver raffreddato l'aria fino a raggiungere il valore prescritto di umidità specifica, occorre riscaldarla di nuovo, da I ad I, onde evitare l'introduzione di aria troppo fredda nel locale.



Il flusso termico fornito dalla batteria di post-riscaldamento è

$$q_{II}^+ = \dot{m}_{al}(h_I - h_1) \quad (8.57)$$



**Figura 8.16** Ciclo di condizionamento estivo: rappresentazione sul diagramma di (a) Carrier e (b) Mollier.

La portata d'acqua condensata dalla batteria di raffreddamento è data da

$$\dot{m}_g = \dot{m}_{al}(x_M - x_1) \quad (8.58)$$

mentre il flusso termico sottratto dalla stessa batteria può essere espresso come

$$|q_{M1}^-| = \dot{m}_{al}(h_M - h_1) \quad (8.59)$$

e rappresenta il carico frigorifero totale per il gruppo refrigeratore. Si osservi che, in base alle considerazioni precedenti, la potenza frigorifera può essere determinata mediante la relazione

$$\begin{aligned} |q_{M1}^-| &= \dot{m}_{al}(h_M - h_A) + \dot{m}_{al}(h_A - h_I) + \dot{m}_{al}(h_I - h_1) \\ &= |q_{aR}^-| + q_t^+ + q_{lI}^+ \end{aligned} \quad (8.60)$$

dove, nel passaggio dal secondo al terzo membro, si è tenuto conto delle Eq. (8.44), (8.56) ed (8.57). In base alla (8.60) si può quindi affermare che la potenza frigorifera deve far fronte al carico termico di ventilazione  $|q_{aR}^-|$ , risultante dal rinnovo forzato dell'aria nel locale condizionato, ai carichi termici sensibili e latenti, aventi come somma  $q_t^+$ , ed al carico termico  $q_{lI}^+$ , risultante dal post-riscaldamento dell'aria.

## 8.8 CONCLUSIONI

In questo capitolo sono state determinate le proprietà termodinamiche dell'aria umida, considerata come una miscela di gas ideali. Infatti, oltre all'aria secca, anche il vapor d'acqua ha comportamento ideale, pur essendo suscettibile di condensazione nelle normali condizioni operative. Le proprietà termodinamiche dell'aria umida sono state rappresentate, in forma

grafica, per mezzo dei diagrammi di Carrier e di Mollier. Sono state poi esaminate le principali trasformazioni dell'aria umida ed, a fini puramente esemplificativi, sono stati illustrati i cicli di condizionamento, estivo ed invernale, caratteristici degli impianti di climatizzazione a tutta aria.

---

# CAPITOLO 9

## ENERGIA UTILIZZABILE

---

### 9.1 GENERALITÀ

Nel Capitolo 2 sono stati illustrati i bilanci di energia meccanica, mentre nel Capitolo 3 e nel Capitolo 4 sono stati ricavati i bilanci di energia globale ed i bilanci di entropia sulla base, rispettivamente, del primo e del secondo principio della termodinamica. In questo capitolo i bilanci di primo e di secondo principio sono combinati tra loro, per identificare un “metro” comune utilizzabile nella comparazione delle diverse forme d’energia. In accordo con l’intuizione fisica, il metro comune sarà il lavoro meccanico, cioè la forma d’interazione energetica più versatile. Il lavoro meccanico, infatti, costituisce l’effetto utile prodotto dagli impianti motori ma, all’occorrenza, può essere impiegato per azionare impianti frigoriferi od impianti termici a pompa di calore. Da questo punto di vista, quindi, il lavoro meccanico può essere considerato energia completamente “utilizzabile”, cioè “exergia”, mentre le altre forme d’energia sono utilizzabili solo nella misura in cui sono suscettibili di conversione in lavoro meccanico.

Nei capitoli precedenti, sono già stati acquisiti alcuni risultati parziali riguardanti la possibilità di conversione tra le diverse forme d’energia. Ad esempio, i bilanci d’energia meccanica hanno stabilito la piena convertibilità reciproca, e quindi l’equivalenza, d’energia potenziale, energia cinetica e lavoro meccanico. In questo senso, è possibile affermare che energia potenziale ed energia cinetica sono “energie completamente utilizzabili”. Inoltre, il primo principio della termodinamica ha stabilito che il lavoro

meccanico può essere convertito integralmente in calore, mentre il secondo principio ha fissato limiti ben precisi per la convertibilità del calore in lavoro. Per un ciclo bitermico, ad esempio, il limite è dato dal rendimento di Carnot e, di conseguenza, il calore non può essere considerato energia completamente utilizzabile. Considerazioni analoghe sono possibili per l'energia interna che, da questo punto di vista, può essere classificata tra le energie di tipo "termico" mentre, come si vedrà nel prossimo capitolo, l'energia chimica dei combustibili può essere assimilata all'energia potenziale meccanica, in quanto derivante da legami atomici.

In un testo elementare sono possibili solo alcune semplici considerazioni su altre forme d'energia di grande importanza pratica come, ad esempio, l'energia elettrica, l'energia nucleare e l'energia solare. Ciò non toglie che si possa osservare come motori e generatori elettrici funzionino con rendimenti di conversione molto elevati, vicini al 100% se si opera in assenza di attriti ed in condizioni di "superconduttività". Di conseguenza, si può concludere che l'energia elettrica è completamente convertibile in lavoro meccanico e viceversa. Pertanto, anche l'energia elettrica è "energia completamente utilizzabile". Invece, affermazioni altrettanto nette non sono possibili per l'energia nucleare e l'energia solare: la loro "utilizzabilità" può essere discussa, infatti, solo nell'ambito di trattazioni specializzate.

## 9.2 LAVORO TECNICO IN UN SISTEMA CHIUSO

In questo paragrafo ci si propone di estendere la definizione di lavoro tecnico ai sistemi chiusi. Con riferimento al sistema chiuso rappresentato in Fig. 9.1, si può ragionevolmente osservare che, nello spostamento del pistone dallo stato iniziale  $i$  allo stato finale  $f$ , il lavoro fatto contro la pressione ambiente non è tecnicamente utile. Tale lavoro è pari a

$$\int_{x_i}^{x_f} p_a A \, dx = p_a (V_f - V_i) = m p_a (v_f - v_i) \quad (9.1)$$

dove  $p_a$  è la pressione ambiente,  $A$  è l'area del pistone,  $V$  è il volume,  $m$  è la massa di fluido contenuta all'interno e  $v$  è il volume specifico. Una frazione del lavoro totale, pari a  $p_a(v_f - v_i)$  per ogni unità di massa, non è quindi tecnicamente utile, in quanto non può essere impiegata per azionare apparecchiature meccaniche. Di conseguenza, si ha

$$\hat{L}_{if} = \hat{L}'_{if} + p_a(V_f - V_i) \quad (9.2)$$

mentre, per una trasformazione che interessi una massa unitaria, si ottiene

$$L_{if} = L'_{if} + p_a(v_f - v_i) \quad (9.3)$$

Con riferimento ad una trasformazione reversibile, ed in assenza di variazioni d'energia cinetica e potenziale, il lavoro tecnico totale è esprimibile, al solito, come

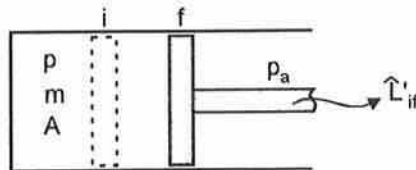
$$\hat{L}_{if} = \int_{V_i}^{V_f} p dV \quad (9.4)$$

mentre il lavoro tecnico è dato da

$$\hat{L}'_{if} = \hat{L}_{if} - p_a(V_f - V_i) = \int_{V_i}^{V_f} (p - p_a) dV = m L'_{if} \quad (9.5)$$

con

$$L'_{if} = \int_{v_i}^{v_f} (p - p_a) dv \quad (9.6)$$



**Figura 9.1** Lavoro tecnico in un sistema chiuso.

Ovviamente, per una trasformazione irreversibile, ma quasi statica ed in assenza di variazioni d'energia cinetica e potenziale, si ha

$$L'_{if} = \int_{v_i}^{v_f} (p - p_a) dv - |R_{if}^-| \quad (9.7)$$

dove il termine  $|R_{if}^-|$  rappresenta la perdita di capacità di produrre lavoro tecnicamente utile.

### 9.3 BILANCIO DI EXERGIA PER UN SISTEMA CHIUSO

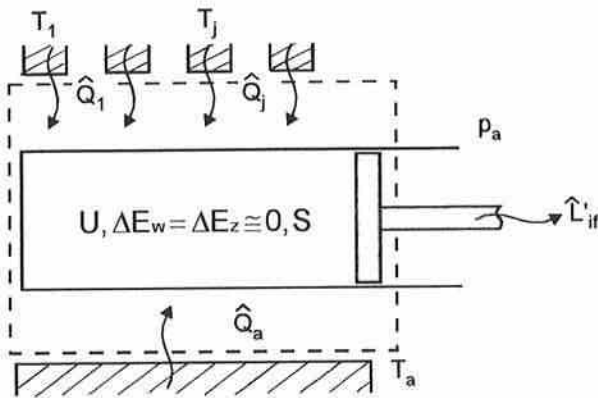
Come si è osservato più volte, i sistemi termodinamici d'interesse tecnico sono immersi in un sistema più grande, detto "ambiente", che non è facilmente definibile in maniera univoca. Ai fini che qui interessano, tuttavia, si può considerare "ambiente" una porzione abbastanza estesa di fluido esterno che, normalmente, si trova alla pressione atmosferica  $p_a$  ed a una temperatura  $T_a$  non influenzata dai processi termodinamici in corso. In tale ipotesi, si può fare riferimento ad un sistema chiuso, definito come in Fig. 9.2, che scambia calore con l'ambiente e con varie altre sorgenti a temperature  $T_j$  diverse da  $T_a$ . Come si può notare, i confini sono scelti in modo da assicurare che gli scambi termici avvengano alla temperatura delle sorgenti, in modo che tutte le eventuali irreversibilità siano mantenute all'interno del sistema.

Per la trasformazione che porta il sistema chiuso di Fig. 9.2 dallo stato iniziale  $i$  allo stato finale  $f$ , il primo principio della termodinamica può essere scritto nella forma

$$\begin{aligned} \hat{L}'_{if} - p_a(V_f - V_i) &= \hat{L}'_{if} = \left[ \hat{Q}_a + \sum \hat{Q}_j + (U_i - U_f) \right] + p_a(V_i - V_f) \quad \Rightarrow \\ \hat{L}'_{if} &= \hat{Q}_a + \sum \hat{Q}_j + (U_i - U_f) + p_a(V_i - V_f) \end{aligned} \quad (9.8)$$

nell'ipotesi, quasi sempre verificata per i sistemi chiusi, di variazioni trascurabili

rabili d'energia cinetica e potenziale.



**Figura 9.2** Schema d'appoggio per l'analisi exergetica di un sistema chiuso.

Il secondo principio della termodinamica, per il sistema di Fig. 9.2, può essere scritto nella forma

$$\frac{\hat{Q}_a}{T_a} + \sum \frac{\hat{Q}_j}{T_j} = (S_f - S_i) - \Delta S_{irr} \quad (9.9)$$

dove  $\Delta S_{irr} \geq 0$  tiene conto della generazione di entropia. Se si moltiplicano i due membri della (9.9) per  $T_a$ , si ottiene

$$\hat{Q}_a + \sum T_a \frac{\hat{Q}_j}{T_j} = T_a(S_f - S_i) - T_a \Delta S_{irr} \quad (9.10)$$

e quindi, sommando membro a membro la (9.8) e la (9.10), si ricava l'espressione del lavoro tecnico scambiato

$$\begin{aligned} \hat{L}'_{if} = & \sum \hat{Q}_j \left( 1 - \frac{T_a}{T_j} \right) + (U_i - U_f) \\ & + p_a(V_i - V_f) - T_a(S_i - S_f) - T_a \Delta S_{irr} \end{aligned} \quad (9.11)$$



dove i termini  $(1 - T_a / T_j)$  prendono il nome di fattori di Carnot relativi agli scambi termici con le sorgenti a temperatura  $T_j$ .

Nell'Eq. (9.11), la quantità  $\Delta S_{irr}$  non è mai negativa, e ciò provoca una diminuzione del lavoro tecnico ottenuto (+) od un aumento, in valore assoluto, del lavoro tecnico speso (-). Posto  $\Delta S_{irr} = 0$ , dalla (9.11) si ha

$$\left(\hat{L}'_{if}\right)_{rev} = \sum \hat{Q}_j \left(1 - \frac{T_a}{T_j}\right) + [(U_i - U_f) + p_a(V_i - V_f) - T_a(S_i - S_f)] \quad (9.12)$$

cioè l'espressione del lavoro scambiato in condizioni di reversibilità che rappresenta, secondo le trasformazioni, il lavoro tecnico ottenibile massimo od il lavoro tecnico speso minimo in valore assoluto. Come si vedrà nel Paragrafo 9.3.1, il secondo termine al secondo membro della (9.12) costituisce l'equivalente, in lavoro meccanico utile, della combinazione di potenziali termodinamici racchiusa entro parentesi quadre. Nel Paragrafo 9.3.2, invece, si illustrerà come i termini  $\hat{Q}_j(1 - T_a / T_j)$  rappresentino i valori exergetici delle quantità di calore scambiate alle temperature  $T_j$ .

### 9.3.1 Sistema Chiuso che Scambia Calore Solo con l'Ambiente

Per evidenziare il significato fisico del secondo termine al secondo membro della (9.12), conviene fare riferimento ad un sistema chiuso che scambia calore solo con l'ambiente, ponendo  $\hat{Q}_j \equiv 0$  nella sommatoria. Si ottiene così l'espressione

$$\left(\hat{L}'_{if}\right)_{rev} = (U_i - U_f) + p_a(V_i - V_f) - T_a(S_i - S_f) = A_i - A_f \quad (9.13)$$

dove l'energia utilizzabile è definita come

$$A = (U - U_a) - T_a(S - S_a) + p_a(V - V_a) \quad (9.14)$$

o, con riferimento all'unità di massa, come

$$a = \frac{A}{m} = (u - u_a) - T_a(s - s_a) + p_a(v - v_a) \quad (9.15)$$

Le espressioni (9.14) e (9.15) rappresentano quindi il potenziale termodinamico “energia utilizzabile”, od “exergia”, di un fluido contenuto in un sistema chiuso. Il simbolo scelto per questo potenziale è la prima lettera della parola inglese “availability”, mentre le unità di misura sono, evidentemente i joule, o chilojoule, cioè [J] o [kJ], per  $A$  ed i joule, o chilojoule su chilogrammo, cioè [J/kg] o [kJ/kg], per  $a$ .

In base alle definizioni, l’energia utilizzabile di un sistema chiuso assume valore nullo nelle condizioni d’equilibrio termico ( $T = T_a$ ) e meccanico ( $p = p_a$ ) con l’ambiente, nelle quali si ha anche  $s = s_a$  e  $v = v_a$ . Si potrebbe dimostrare, ma la dimostrazione non è qui riportata, che l’energia utilizzabile di un sistema chiuso è sempre positiva quando il sistema non si trova in equilibrio con l’ambiente.

### Esempio 9.1

Si determini l’energia utilizzabile associata ad una massa di 20 kg d’aria contenuta in un sistema chiuso alla pressione di 1 MPa ed alla temperatura di 400 °C, nell’ipotesi che si abbia  $T_a = 300$  K,  $p_a = 101,325$  kPa e che l’aria possa essere considerata un gas ideale a calori specifici costanti con  $k = 1,4$ .

#### Soluzione

Nelle ipotesi poste, con  $R = 0,287$  kJ/(kg K), si ottiene

$$V = \frac{m R T}{p} = \frac{20 \cdot 0,287 \cdot 673,15}{1000} = 3,86 \text{ m}^3$$

$$V_a = \frac{m R T_a}{p_a} = \frac{20 \cdot 0,287 \cdot 300}{101,325} = 16,99 \text{ m}^3$$

$$c_v = \frac{R}{k - 1} = \frac{0,287}{1,4 - 1} = 0,718 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}$$

$$U - U_a = m c_v (T - T_a) = 20 \cdot 0,718(673,15 - 300) = 5358 \text{ kJ}$$

$$\begin{aligned} S - S_a &= m \left( c_v \ln \frac{T}{T_a} + R \ln \frac{V}{V_a} \right) \\ &= 20 \left( 0,718 \ln \frac{673,15}{300} + 0,287 \ln \frac{3,86}{16,99} \right) = 3,099 \frac{\text{kJ}}{\text{K}} \end{aligned}$$

ed

$$\begin{aligned} A &= (U - U_a) - T_a(S - S_a) + p_a(V - V_a) \\ &= 5358 - 300 \cdot 3,099 + 101,325(3,86 - 16,99) = 3098 \text{ kJ} \end{aligned}$$

corrispondenti ad

$$a = \frac{A}{m} = \frac{3098}{20} = 155 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Queste energie utilizzabili rappresentano il lavoro tecnico massimo, rispettivamente totale e specifico, ottenibile portando il sistema chiuso in equilibrio termomeccanico con l'ambiente.

### Esempio 9.2

Si determini la perdita d'energia utilizzabile durante il mescolamento adiabatico di 1 kg d'acqua, inizialmente alla temperatura di 90 °C, con 2 kg d'acqua inizialmente alla temperatura di 50 °C, nell'ipotesi che si abbia  $T_a = 300 \text{ K}$ .

*Soluzione*

Dal bilancio energetico del processo si ha

$$U_f = m_m c t_m = U_{1i} + U_{2i} = c(m_1 t_{1i} + m_2 t_{2i})$$

e quindi si ottiene

$$t_m = \frac{c(m_1 t_{1i} + m_2 t_{2i})}{c m_m} = \frac{m_1 t_{1i} + m_2 t_{2i}}{m_m} = \frac{1 \cdot 90 + 2 \cdot 50}{3} = 63,33 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Inoltre, l'acqua può essere considerata un fluido incomprimibile, per il quale risulta

$$V_m = V_{1i} + V_{2i}$$

La variazione d'entropia nel processo è data da

$$\begin{aligned} S_i - S_f &= m_1 c \ln \frac{T_{1i}}{T_m} + m_2 c \ln \frac{T_{2i}}{T_m} \\ &= 1 \cdot 4,187 \ln \frac{363,15}{336,48} + 2 \cdot 4,187 \ln \frac{323,15}{336,48} = -0,019 \text{ kJ} \end{aligned}$$

Pertanto, la diminuzione d'energia utilizzabile è

$$\begin{aligned} A_i - A_f &= (U_i - U_f) - T_a (S_i - S_f) + p_a (V_i - V_f) = -T_a (S_i - S_f) \\ &= -300 \cdot (-0,019) = 5,7 \text{ kJ} \end{aligned}$$

ed è imputabile all'aumento di entropia durante il mescolamento. Infatti, in questo caso, il bilancio dell'energia utilizzabile

$$\hat{L}'_{if} = \sum \hat{Q}_j \left( 1 - \frac{T_a}{T_j} \right) + (A_i - A_f) - T_a \Delta S_{irr}$$

può essere scritto nella forma

$$A_i - A_f = T_a \Delta S_{irr}$$

in quanto il processo è adiabatico e non produce alcun lavoro utile.

### 9.3.2 Scambi di Exergia Associati agli Scambi di Calore

Nel caso di un ciclo si ha  $i=f$  e, per un ciclo bitermico nel quale sia scambiato calore alla temperatura  $T$ , dalla relazione (9.12) si ottiene

$$\hat{L}_{rev} = \hat{Q} \left( 1 - \frac{T_a}{T} \right) = E_Q \quad (9.16)$$

dove  $E_Q$ , misurata in kilojoule [kJ], è la quantità di exergia scambiata in conseguenza dello scambio di calore. Dividendo entrambi i membri della (9.16) per la massa di fluido che percorre il ciclo, si ottiene

$$e_Q = L_{rev} = Q \left( 1 - \frac{T_a}{T} \right) \quad (9.17)$$

dove  $e_Q$ , misurata in joule o kilojoule per chilogrammo, cioè [J/kg] o [kJ/kg] è l'exergia specifica scambiata, per unità di massa di fluido, in conseguenza dello scambio di calore.

In un ciclo diretto bitermico, nel quale una quantità di calore  $Q^+$  è fornita alla temperatura  $T > T_a$ , la relazione (9.17) porge

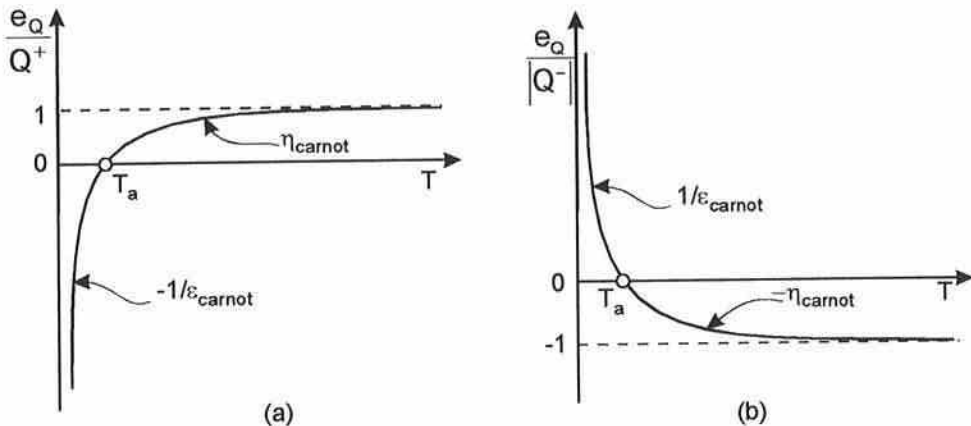
$$e_Q^+ = L_{rev}^+ = Q^+ \left( 1 - \frac{T_a}{T} \right)^+ = Q^+ \eta_{Carnot} \quad (9.18)$$

riducendosi al teorema di Carnot. Pertanto, fornire calore ad un ciclo termico a temperature superiori a quella ambiente, significa fornire exergia. Invece per un ciclo frigorifero bitermico, dove la quantità di calore  $Q^+$  è "fornita" alla temperatura  $T < T_a$ , la relazione (9.17), riferita al lavoro speso, porge

$$e_Q^- = L_{rev}^- = Q^+ \left( 1 - \frac{T_a}{T} \right)^- = -\frac{Q^+}{T / (T_a - T)} = -\frac{Q^+}{\varepsilon_{Carnot}} \quad (9.19)$$

Pertanto, "fornire" calore ad un ciclo frigorifero a temperature inferiori a

quella ambiente, significa ottenere (cioè "prelevare") exergia. Ripetendo, con ovvie modifiche, le considerazioni precedenti ci si può facilmente convincere che, per  $T > T_a$  ovvero  $(1 - T_a/T) > 0$ , prelevare calore significa ottenere exergia ( $e_Q^- / Q^- > 0$ ) mentre, per  $T < T_a$  ovvero  $(1 - T_a/T) < 0$ , prelevare calore significa fornire exergia ( $e_Q^+ / Q^+ < 0$ ). Si hanno quindi le situazioni illustrate in Fig. 9.3, dove si distingue tra calore fornito e calore prelevato. Dalla Fig. 9.3 (a) si evince che, all'aumentare della temperatura, il valore exergetico relativo del calore fornito si avvicina asintoticamente al valore del lavoro mentre, al diminuire della temperatura, il valore exergetico relativo del calore "fornito" aumenta, in modulo, fino a tendere all'infinito per temperature prossime allo zero assoluto. Rovesciando il ragionamento, dalla Fig. 9.3 (b) si evince che, all'aumentare della temperatura il valore exergetico relativo del calore prelevato si avvicina sempre più, in modulo, al valore del lavoro mentre, al diminuire della temperatura, il valore exergetico relativo del calore prelevato aumenta, fino a tendere all'infinito per temperature prossime allo zero assoluto. Ciò significa, in particolare, che raffreddare un sistema prelevando calore a temperature sempre più prossime allo zero assoluto, richiede quantità di lavoro sempre più grandi.



**Figura 9.3** Valore exergetico relativo di una quantità di calore: (a) fornita ad un sistema e (b) prelevata da un sistema.

**Esempio 9.3**

Si trovino i valori exergetici relativi, rispettivamente, di una quantità di calore fornita alla temperatura di 1000 K e di una quantità di calore prelevata alla temperatura di 100 K, nell'ipotesi che si abbia  $T_a = 300$  K.

*Soluzione*

In base alla (9.17) si ha

$$\frac{e_Q^+}{Q^+} = 1 - \frac{T_a}{T} = 1 - \frac{300}{1000} = 0,70$$

nel caso del calore fornito ad alta temperatura, e

$$\frac{e_Q^+}{Q^-} = 1 - \frac{T_a}{T} = 1 - \frac{300}{100} = -2$$

nel caso del calore prelevato a bassa temperatura. In entrambi i casi, lo scambio termico si traduce in una fornitura d'exergia pari, rispettivamente, ad  $e_Q^+ = 0,70 Q^+$  ed a  $e_Q^+ = -2 Q^-$ .

**9.3.3 Perdite di Exergia negli Scambi Termici Irreversibili**

Sono certamente irreversibili gli scambi termici spontanei, che non comportano alcuna produzione di lavoro utile. Si faccia riferimento, ad esempio, ad una quantità di calore  $\hat{Q}$  che, senza produrre lavoro utile, passi da una sorgente a temperatura  $T_1$  ad un pozzo a temperatura  $T_2$ , con  $T_1 > T_2$ . Si supponga, in un primo tempo, che si abbia  $T_1 > T_2 > T_a$  e s'introduca il sistema chiuso ausiliario schematizzato in Fig. 9.4. Poiché il processo di scambio termico non dà luogo ad alcun lavoro utile e non produce mutamenti nello stato del sistema ausiliario, posto  $i = f$  nella (9.11), si ha

$$\hat{Q}^+ \left( 1 - \frac{T_a}{T_1} \right)^+ + \hat{Q}^- \left( 1 - \frac{T_a}{T_2} \right)^+ = T_a \Delta S_{irr} \quad (9.20)$$

Infatti, si fornisce calore al sistema ausiliario a temperatura  $T_1$ , mentre si preleva calore dal sistema ausiliario a temperatura  $T_2$ . Con riferimento alla differenza tra le quantità d'exergia fornita ed ottenuta, si ricava

$$\begin{aligned} E_Q^+ + E_Q^- &= E_Q^+ - |E_Q^-| = \hat{Q}^+ \left[ \left(1 - \frac{T_a}{T_1}\right)^+ - \left(1 - \frac{T_a}{T_2}\right)^+ \right] \\ &= T_a \hat{Q}^+ \left( \frac{T_1 - T_2}{T_1 T_2} \right)^+ = T_a \Delta S_{irr} \end{aligned} \quad (9.21)$$

dal momento che le quantità di calore scambiate sono uguali in valore assoluto. Nella (9.21)

$$E_Q^+ = \hat{Q}^+ \left(1 - \frac{T_a}{T_1}\right)^+ \quad (9.22)$$

è il valore dell'exergia fornita, a temperatura  $T_1 > T_a$ , al sistema ausiliario, mentre

$$E_Q^- = \hat{Q}^- \left(1 - \frac{T_a}{T_2}\right)^+ \quad (9.23)$$

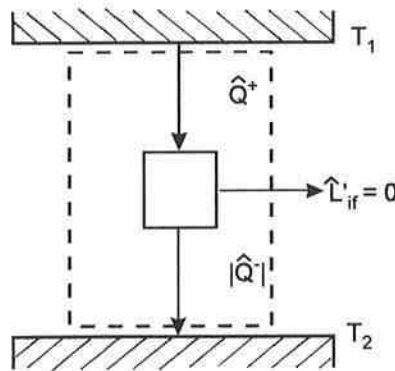


Figura 9.4 Scambio termico irreversibile.



è il valore dell'exergia ottenuta, a temperatura  $T_2 > T_a$ , dal sistema ausiliario. Poiché si ha  $T_1 > T_2 > T_a$ , lo scambio termico irreversibile si traduce in una perdita d'energia utilizzabile che è quantificata dall'ultimo termine della (9.21) ed è chiaramente associata all'aumento d'entropia. Ovviamente, i risultati possono essere facilmente estesi al caso di uno scambio termico irreversibile tra una sorgente a temperatura  $T_1$  ed un pozzo a temperatura  $T_2$ , con  $T_a > T_1 > T_2$ . In tale situazione, si fornisce exergia al sistema ausiliario prelevando calore alla temperatura  $T_2 < T_a$ , mentre si ottiene exergia dal sistema ausiliario fornendogli calore alla temperatura  $T_1 < T_a$ . Pertanto, con riferimento alla differenza tra exergia fornita ed ottenuta, si ha

$$\begin{aligned} E_Q^+ + E_Q^- &= \hat{Q}^- \left(1 - \frac{T_a}{T_2}\right)^- + \hat{Q}^+ \left(1 - \frac{T_a}{T_1}\right)^- \\ &= T_a \hat{Q}^+ \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right) = T_a \hat{Q}^+ \left(\frac{T_1 - T_2}{T_1 T_2}\right)^+ = T_a \Delta S_{irr} \end{aligned} \quad (9.24)$$

La (9.24) si presta ad un'importante considerazione aggiuntiva in quanto indica che, per una differenza costante di temperatura ( $T_1 - T_2$ ), le perdite exergetiche corrispondenti all'aumento d'entropia tendono ad aumentare man mano che diminuiscono le temperature assolute  $T_1$  e  $T_2$ .

## 9.4 BILANCIO DI EXERGIA PER UN SISTEMA APERTO

Si faccia riferimento ad un sistema aperto a confini fissi con entrate ed uscite multiple, definito in modo schematico come in Fig. 9.5. Il sistema scambia calore con l'ambiente a temperatura  $T_a$  e con varie sorgenti a temperature  $T_j$  diverse da  $T_a$ . La scelta dei confini assicura che gli scambi termici avvengano alla temperatura delle sorgenti, mantenendo quindi tutte le eventuali irreversibilità all'interno del sistema.

Nelle ipotesi poste, il primo principio della termodinamica può esse-

re scritto nella forma generale

$$\begin{aligned} \hat{L}'_{if} = & \hat{Q}_a + \sum \hat{Q}_j + (U_{gi} - U_{gf}) \\ & + \sum \Delta m_e \left( h_e + gz_e + \frac{w_e^2}{2} \right) - \sum \Delta m_u \left( h_u + gz_u + \frac{w_u^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (9.25)$$

dove l'energia globale è definita come nel Paragrafo 3.3

$$U_g = \int_V \rho \left( u + \frac{w^2}{2} + gz \right) dV = U + E_w + E_z \quad (9.26)$$

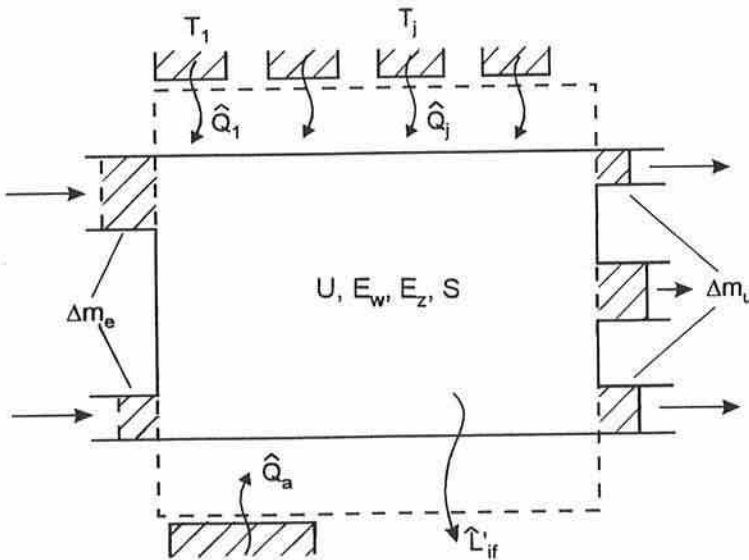


Figura 9.5 Schema d'appoggio per l'analisi exergetica di un sistema aperto.

Dal secondo principio della termodinamica si ottiene poi

$$\frac{\hat{Q}_a}{T_a} + \sum \frac{\hat{Q}_j}{T_j} = (S_f - S_i) + \sum \Delta m_u s_u - \sum \Delta m_e s_e - \Delta S_{irr} \quad (9.27)$$

dove l'entropia globale è definita come nel Paragrafo 4.8.2

$$S = \int_V \rho s \, dV \quad (9.28)$$

Moltiplicando entrambi i membri della (9.27) per  $T_a$ , si ottiene

$$\hat{Q}_a + \sum \frac{T_a}{T_j} \hat{Q}_j = T_a \left[ (S_f - S_i) + \sum \Delta m_u s_u - \sum \Delta m_e s_e - \Delta S_{irr} \right] \quad (9.29)$$

e, sommando membro a membro la (9.25) e la (9.29), si ha l'espressione del lavoro tecnico scambiato

$$\begin{aligned} \hat{L}'_{if} = & \sum \hat{Q}_j \left( 1 - \frac{T_a}{T_j} \right) + (U_{gi} - U_{gf}) - T_a (S_i - S_f) \\ & + \sum \Delta m_e \left[ (h_e - T_a s_e) + g z_e + \frac{w_e^2}{2} \right] \\ & - \sum \Delta m_u \left[ (h_u - T_a s_u) + g z_u + \frac{w_u^2}{2} \right] - T_a \Delta S_{irr} \end{aligned} \quad (9.30)$$

Nell'Eq. (9.30) la quantità  $\Delta S_{irr}$  non è mai negativa, e ciò provoca una diminuzione del lavoro tecnico ottenuto (+) od un aumento, in valore assoluto, del lavoro tecnico speso (-). Pertanto il lavoro scambiato in condizioni di reversibilità rappresenta, secondo le trasformazioni, il lavoro tecnico ottenibile massimo, od il lavoro tecnico speso minimo in valore assoluto. Ponendo  $\Delta S_{irr} = 0$  nella (9.30) e tenendo conto delle definizioni date, si ha

$$\begin{aligned} (\hat{L}'_{if})_{rev} = & \sum \hat{Q}_j \left( 1 - \frac{T_a}{T_j} \right) + (A_i - A_f) + (E_{wi} - E_{wf}) + (E_{zi} - E_{zf}) \\ & + \sum \Delta m_e \left[ (h_e - T_a s_e) + g z_e + \frac{w_e^2}{2} \right] - \sum \Delta m_u \left[ (h_u - T_a s_u) + g z_u + \frac{w_u^2}{2} \right] \end{aligned} \quad (9.31)$$

dove il primo termine al secondo membro fornisce il valore exergetico delle quantità di calore scambiate, mentre il secondo termine rappresenta la variazione intervenuta nell'energia utilizzabile associata al fluido contenuto nel volume di controllo. Infatti, dal momento che i confini del volume di controllo sono fissi, risulta

$$\begin{aligned} A_i - A_f &= (U_i - U_f) - T_a(S_i - S_f) + p_a(V_i - V_f) \\ &= (U_i - U_f) - T_a(S_i - S_f) \end{aligned} \quad (9.32)$$

Il terzo ed il quarto termine al secondo membro della (9.31) rappresentano le variazioni intervenute, rispettivamente, nell'energia cinetica e nell'energia potenziale possedute dal fluido contenuto nel volume di controllo. Invece, come meglio vedremo nel prossimo paragrafo, i termini del tipo  $(h - T_a s)$  costituiscono l'equivalente, in lavoro meccanico utile, delle combinazioni di potenziali termodinamici associati all'unità di massa entrante od uscente. Infine, i termini  $w^2/2$  e  $gz$  sono, rispettivamente, l'energia cinetica e l'energia potenziale possedute dall'unità di massa entrante od uscente.

Se si dividono entrambi i membri delle (9.30) per  $\Delta\vartheta$  e si fa tendere  $\Delta\vartheta$  a zero, tenendo conto della (9.32) si arriva all'espressione della potenza tecnica utile

$$\begin{aligned} P^t &= \sum q_j \left( 1 - \frac{T_a}{T_j} \right) - \left[ \frac{dA}{d\vartheta} + \frac{dE_w}{d\vartheta} + \frac{dE_z}{d\vartheta} \right] \\ &+ \sum \dot{m}_e \left[ (h_e - T_a s_e) + g z_e + \frac{w_e^2}{2} \right] \\ &- \sum \dot{m}_u \left[ (h_u - T_a s_u) + g z_u + \frac{w_u^2}{2} \right] - T_a \dot{S}_{irr} \end{aligned} \quad (9.33)$$

Nel caso particolare di regime stazionario, la (9.33) porge

$$\begin{aligned}
 P' = \sum q_j \left( 1 - \frac{T_a}{T_j} \right) + \sum \dot{m}_e \left[ (h_e - T_a s_e) + g z_e + \frac{w_e^2}{2} \right] \\
 - \sum \dot{m}_u \left[ (h_u - T_a s_u) + g z_u + \frac{w_u^2}{2} \right] - T_a \dot{S}_{irr}
 \end{aligned} \tag{9.34}$$

in quanto le derivate temporali si annullano.

Infine, per sistemi in regime stazionario con una sola entrata ed una sola uscita, dalla (9.34) si ottiene

$$\begin{aligned}
 P' = \sum q_j \left( 1 - \frac{T_a}{T_j} \right) + \dot{m} \left[ (h_e - T_a s_e) + g z_e + \frac{w_e^2}{2} \right] \\
 - \dot{m} \left[ (h_u - T_a s_u) + g z_u + \frac{w_u^2}{2} \right] - T_a \dot{S}_{irr}
 \end{aligned} \tag{9.35}$$

Analogamente, nel caso particolare di sistemi in regime stazionario con una sola entrata ed una sola uscita, l'Eq. (9.30) può essere scritta nella forma

$$\begin{aligned}
 L'_{if} = \frac{\hat{L}'_{if}}{\Delta m} = \sum \frac{\hat{Q}_j}{\Delta m} \left( 1 - \frac{T_a}{T_j} \right) + \left[ (h_e - T_a s_e) + g z_e + \frac{w_e^2}{2} \right] \\
 - \left[ (h_u - T_a s_u) + g z_u + \frac{w_u^2}{2} \right] - T_a \frac{\Delta S_{irr}}{\Delta m} \\
 = \sum Q_j \left( 1 - \frac{T_a}{T_j} \right) + \left[ (h_e - T_a s_e) + g z_e + \frac{w_e^2}{2} \right] \\
 - \left[ (h_u - T_a s_u) + g z_u + \frac{w_u^2}{2} \right] - T_a \Delta S_{irr}
 \end{aligned} \tag{9.36}$$

dove, all'ultimo membro, ci si riferisce all'intervallo di tempo necessario a

fare entrare, in  $e$ , ed uscire, da  $u$ , una massa unitaria. Il punto di vista su cui si basa la (9.36) è quello Euleriano ma, al solito, può essere adottato anche un punto di vista Lagrangiano. In tal modo, l'Eq. (9.36) può essere riferita alla massa unitaria che si sposta dall'entrata all'uscita, ottenendo così

$$L'_{eu} = \sum Q_j \left( 1 - \frac{T_a}{T_j} \right) + \left[ (h_e - T_a s_e) + g z_e + \frac{w_e^2}{2} \right] - \left[ (h_u - T_a s_u) + g z_u + \frac{w_u^2}{2} \right] - T_a \Delta s_{irr} \quad (9.37)$$

Le analogie tra la (9.37) e la (9.35) sono evidenti ed, infatti, la (9.37) avrebbe potuto essere ricavata formalmente dividendo i due membri della (9.35) per la portata di massa.

#### 9.4.1 Sistema Aperto che Scambia Calore Solo con l'Ambiente

Per meglio evidenziare il significato fisico dei termini  $(h - T_a s)$  che compaiono in diverse relazioni ricavate nel paragrafo precedente, conviene fare riferimento a trasformazioni reversibili di sistemi aperti monodimensionali in regime stazionario, che scambiano calore solo con l'ambiente. In tali ipotesi, nella (9.35) e nella (9.37) sono identicamente uguali a zero i contributi degli scambi termici e della generazione d'entropia. Si ottiene così

$$P'_{rev} = \dot{m} [(e_e - e_u) + (e_{ze} - e_{zu}) + (e_{we} - e_{wu})] \quad (9.38)$$

ed

$$(L'_{eu})_{rev} = (e_e - e_u) + (e_{ze} - e_{zu}) + (e_{we} - e_{wu}) \quad (9.39)$$

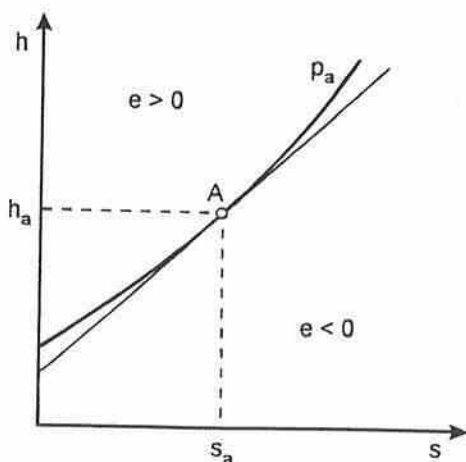
dove si ha, evidentemente,  $e_z = g z$  ed  $e_w = w^2 / 2$ , mentre

$$e = (h - h_a) - T_a (s - s_a) \quad (9.40)$$

rappresenta il potenziale termodinamico “energia utilizzabile”, od “exergia”, di un fluido che evolve in un sistema aperto. Il simbolo di questo potenziale è la prima lettera della parola inglese “exergy”, mentre l’unità di misura è il joule, o il kilojoule, per chilogrammo, cioè  $[J/kg]$  o  $[kJ/kg]$ .

In base alle definizioni, l’energia utilizzabile di un sistema aperto assume valore nullo nelle condizioni d’equilibrio termico ( $T = T_a$ ) e meccanico ( $p = p_a$ ) con l’ambiente, nelle quali si ha anche  $s = s_a$  e  $v = v_a$ . Tuttavia nei sistemi aperti, a differenza di quello che si aveva nei sistemi chiusi, la funzione energia utilizzabile può assumere valori sia positivi sia negativi. Ciò si evince chiaramente dalla rappresentazione sul diagramma  $(h, s)$ , riportata nella Fig. 9.6. Infatti, la tangente all’isobara  $p_a$ , nel punto rappresentativo delle condizioni ambiente, ha pendenza pari a  $T_a$  ed equazione

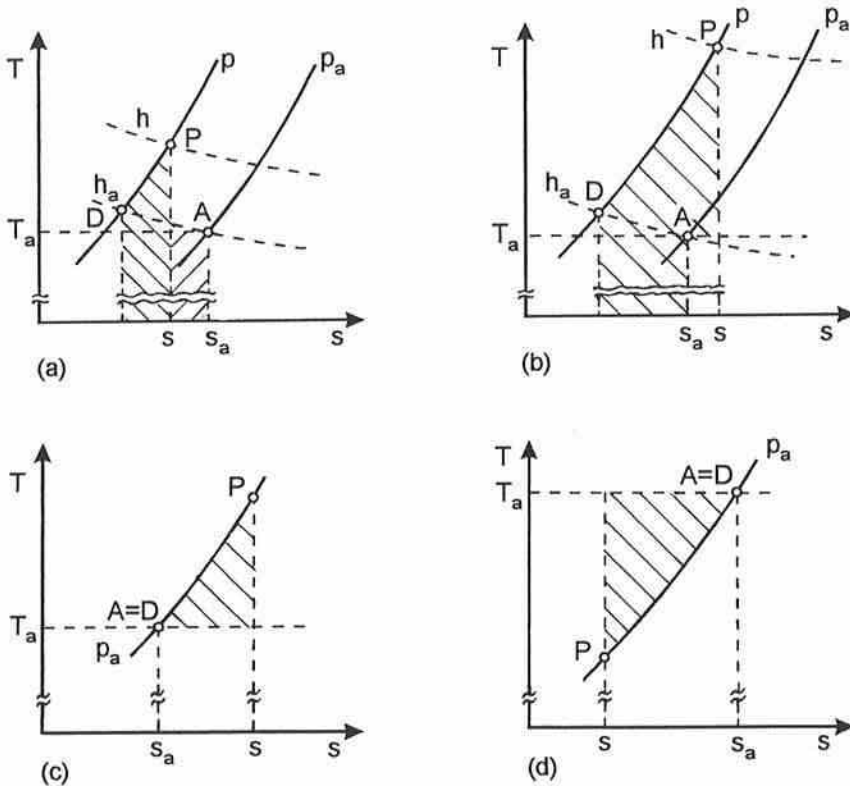
$$h - h_a = T_a(s - s_a) \quad \Rightarrow \quad (h - h_a) - T_a(s - s_a) = e = 0 \quad (9.41)$$



**Figura 9.6** Isobara  $p_a$  nel diagramma  $(h, s)$  e retta tangente nel punto  $(T_a, p_a)$ .

Pertanto, tale retta è il luogo dei punti aventi  $e = 0$  e divide il piano in due zone: quella superiore ad exergia positiva e quella inferiore ad exergia negativa.

La funzione energia utilizzabile  $e$  può essere rappresentata graficamente anche mediante opportune combinazioni d'aree sul diagramma  $(T, s)$ . Infatti, dalla definizione (9.40) si evince che, sul diagramma  $(T, s)$ , l'energia utilizzabile è data dalla somma algebrica delle due aree che rappresentano, rispettivamente, le differenze  $(h - h_a)$  e  $T_a(s_a - s)$ . Come illustrato nelle diverse situazioni considerate nella Fig. 9.7, il termine associato alla differenza di entalpia è rappresentato dall'area sottostante al tratto d'isobara compreso tra  $P(p, h)$  e  $D(p, h_a)$ , mentre il termine associato alla differenza di entropia è rappresentato dal rettangolo avente per altezza  $T_a$  e per base  $(s_a - s)$ .



**Figura 9.7** Rappresentazione grafica della funzione exergia sul diagramma  $(T, s)$  in diverse situazioni: (a)  $p > p_a, T > T_a, s < s_a$ ; (b)  $p > p_a, T > T_a, s > s_a$ ; (c)  $p = p_a, T > T_a$  e (d)  $p = p_a, T < T_a$ .



**Esempio 9.4**

Si determini l'energia utilizzabile associata ad una massa di 20 kg d'aria che evolve in un sistema aperto, passando dalla pressione di 1 MPa e temperatura di 400 °C, all'equilibrio termomeccanico con l'ambiente a  $T_a = 300$  K e  $p_a = 101,325$  kPa, nell'ipotesi che l'aria possa essere considerata un gas ideale a calori specifici costanti con  $k = 1,4$ .

*Soluzione*

Nelle ipotesi poste si ha  $R = 0,287$  (kJ/kg K), mentre risulta

$$c_p = \frac{k}{k-1} R = \frac{1,4}{1,4-1} 0,287 = 1,00 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}$$

$$h - h_a = c_p (T - T_a) = 1,00 (673,15 - 300) = 373 \text{ kJ / kg}$$

$$\begin{aligned} s - s_a &= c_p \ln \frac{T}{T_a} - R \ln \frac{p}{p_a} \\ &= 1,00 \ln \frac{673,15}{300} - 0,287 \ln \frac{1000}{101,325} = 0,151 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \end{aligned}$$

ed

$$\begin{aligned} m e &= m [(h - h_a) - T_a (s - s_a)] \\ &= 20 (373 - 300 \cdot 0,151) = 20 \cdot 327,7 = 6554 \text{ kJ} \end{aligned}$$

Tale energia utilizzabile rappresenta il lavoro tecnico massimo ottenibile nel sistema aperto portando in equilibrio termomeccanico con l'ambiente la massa d'aria avente exergia specifica  $e = 327,7$  kJ/kg.

**9.5 ANALISI ENERGETICHE ED EXERGETICHE**

In questa sezione si fanno alcune considerazioni introduttive sulla quantifi-

cazione delle efficienze di processi e trasformazioni. Le analisi di questo tipo possono essere riferite ai bilanci d'energia ed, in tal caso, l'obiettivo è la definizione di rendimenti di conversione, o di primo principio. Alternativamente, le analisi possono essere riferite ai bilanci d'exergia ed, in quest'ultimo caso, l'obiettivo è la definizione di rendimenti exergetici o di secondo principio.

### 9.5.1 Rendimenti di Primo Principio

Si è già osservato più volte che i rendimenti di primo principio sono rendimenti di conversione di una forma d'energia in un'altra. Essi possono venire espressi da relazioni del tipo

$$\eta = \frac{\text{energia ottenuta}}{\text{energia fornita}} = 1 - \frac{\text{perdite di energia}}{\text{energia fornita}} \quad (9.42)$$

dove i termini sono presi in valore assoluto.

Nella definizione (9.42), per energia "fornita" s'intendono

- le quantità di calore positive,
- le quantità di lavoro negative, prese in valore assoluto, e
- le differenze positive tra le quantità entranti ed uscenti d'entalpia, energia potenziale ed energia cinetica.

Simmetricamente, per energia "ottenuta" s'intendono

- le quantità di calore negative, prese in valore assoluto,
- le quantità di lavoro positive, e
- le differenze negative, prese in valore assoluto, tra le quantità entranti ed uscenti d'entalpia, energia potenziale ed energia cinetica.

Le perdite sono pari, evidentemente, alla differenza tra quanto si fornisce e quanto si ottiene e s'identificano con le dispersioni d'energia in ambiente.

I rendimenti di primo principio non distinguono tra le diverse forme d'energia e non consentono di valutare, in maniera oggettiva e secondo un

metro comune, le efficienze energetiche di processi e cicli non omogenei tra loro. In particolare, i rendimenti di primo principio non risentono della perdita di capacità di lavoro associata alle irreversibilità e, per questa ragione, sono spesso privi di significato.

Ovviamente considerazioni analoghe, non ripetute per brevità, possono essere riferite ai bilanci d'energia espressi in termini di flussi termici, potenze tecniche utili e flussi energetici.

### 9.5.2 Rendimenti di Secondo Principio

I rendimenti di secondo principio sono basati, come si è detto, sui bilanci d'energia utilizzabile. Essi possono venire espressi da relazioni del tipo

$$\eta_{II} = \frac{\text{exergia ottenuta}}{\text{exergia fornita}} = 1 - \frac{\text{perdite di exergia}}{\text{exergia fornita}} \quad (9.43)$$

dove i termini sono presi in valore assoluto.

Nella definizione (9.43), per exergia "fornita" s'intendono

- le exergie positive associate alle quantità di calore scambiate,
- le quantità di lavoro negative, prese in valore assoluto, e
- le differenze positive tra le quantità entranti ed uscenti d'exergia, energia potenziale ed energia cinetica.

Simmetricamente, per exergia "ottenuta" s'intendono

- le exergie negative, prese in valore assoluto, associate alle quantità di calore scambiate,
- le quantità di lavoro positive, e
- le differenze negative, prese in valore assoluto, tra le quantità entranti ed uscenti d'exergia, energia potenziale ed energia cinetica.

Le perdite sono pari, evidentemente, alla differenza tra quanto si fornisce e quanto si ottiene e s'identificano con le distruzioni d'exergia dovute alle irreversibilità.

I rendimenti di secondo principio sono basati su una valutazione oggettiva dei diversi termini di bilancio, fondata sulla convertibilità in lavoro meccanico delle varie forme d'energia. Essi forniscono quindi gli strumenti adatti per localizzare la sede delle irreversibilità, ed identificare il tipo e la grandezza delle perdite nella capacità di produrre lavoro utile.

Ovviamente considerazioni analoghe, non ripetute per brevità, possono essere riferite ai bilanci d'exergia espressi in termini di potenze tecniche utili e flussi d'energia utilizzabile.

## 9.6 ESEMPI DI APPLICAZIONE

Alcuni esempi d'applicazione, riferiti a situazioni di grande interesse tecnico, illustrano la metodologia seguita nelle analisi exergetiche. In particolare, i bilanci relativi alle apparecchiature tecnologiche chiariscono il significato delle perdite d'exergia, mentre i bilanci relativi ai cicli chiariscono il ruolo giocato dagli scambi d'exergia associati agli scambi termici.

### 9.6.1 Espansioni e Compressioni

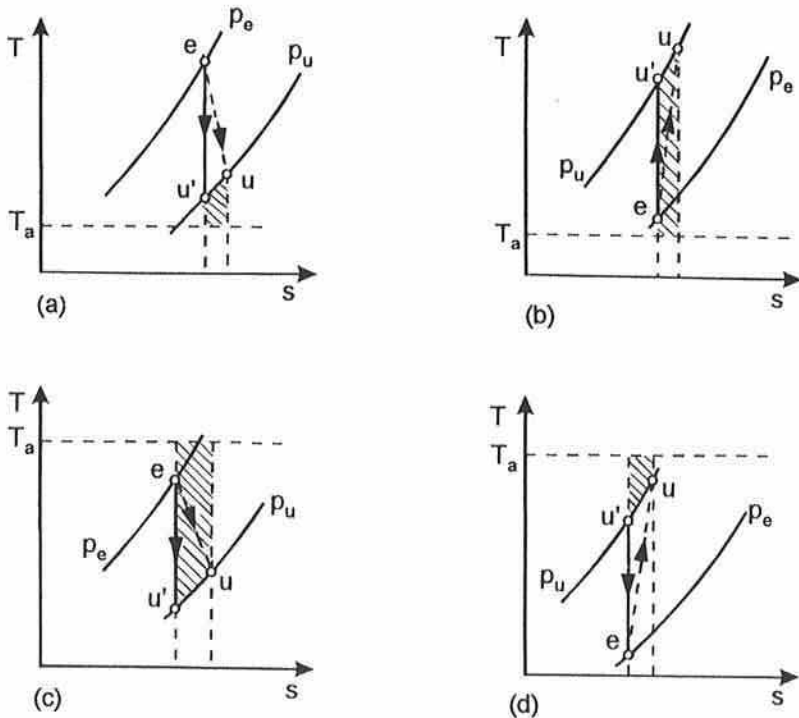
Nelle ipotesi in cui ci si pone in questo paragrafo, i processi d'espansione e compressione hanno luogo adiabaticamente ed in regime stazionario, con variazioni trascurabili d'energia cinetica e potenziale. In tal caso, i rendimenti di primo principio sono identicamente uguali ad 1, poiché espansori e compressori adiabatici non danno luogo a perdite verso l'ambiente. Di conseguenza, i rendimenti di primo principio di queste apparecchiature non forniscono alcuna informazione significativa. Per ottenere informazioni di una certa utilità pratica, nel Capitolo 5 erano stati definiti i rendimenti isoentropici di espansione

$$\eta_{ie} = \frac{L'_{eu}}{L'_{is}} = \frac{h_e - h_u}{h_e - h_{u'}} \quad (9.44)$$

e compressione

$$\eta_{ic} = \frac{|L'_{eu}|}{|L'_{is}|} = \frac{h_{u'} - h_e}{h_u - h_e} \quad (9.45)$$

nei quali, con riferimento agli schemi di Fig. 9.8,  $e$  rappresenta le condizioni di ingresso,  $u$  le condizioni di uscita ed  $u'$  si trova alla stessa pressione di  $u$  ma all'entropia di  $e$ . Tuttavia, si era già osservato che i rendimenti isoentropici confrontano processi reali con ipotetici processi ideali mentre, come vedremo, i rendimenti exergetici non soffrono di limitazioni concettuali di questo tipo.



**Figura 9.8** Schemi d'appoggio per l'analisi exergetica di processi adiabatici: (a) espansione con  $T > T_a$ , (b) compressione con  $T > T_a$ , (c) espansione con  $T < T_a$  e (d) compressione con  $T < T_a$ .

Poiché il lavoro scambiato è totalmente convertibile in exergia, dalla definizione (9.43) si evince che, nelle ipotesi in cui ci si pone in questo paragrafo, risulta

$$(\eta_{II})_e = \frac{L'_{eu}}{e_e - e_u} = \frac{h_e - h_u}{(h_e - h_u) - T_a(s_e - s_u)} \quad (9.46)$$

per le espansioni adiabatiche, ed

$$(\eta_{II})_c = \frac{e_u - e_e}{|L'_{eu}|} = \frac{(h_u - h_e) - T_a(s_u - s_e)}{h_u - h_e} \quad (9.47)$$

per le compressioni adiabatiche.

Nelle (9.46) e (9.47), troviamo l'exergia ottenuta al numeratore e l'exergia fornita al denominatore. Le perdite sono valutabili come differenza tra denominatore e numeratore oppure sono ricavabili direttamente dai bilanci d'energia utilizzabile. In quest'ultimo caso, dal bilancio (9.37) e dalla definizione (9.40) si ha

$$L'_{eu} = (e_e - e_u) - T_a \Delta s_{irr} \quad (9.48)$$

ovvero

$$\begin{aligned} T_a \Delta s_{irr} &= (e_e - e_u) - L'_{eu} \\ &= [(h_e - h_u) - T_a(s_e - s_u)] - (h_e - h_u) = T_a(s_u - s_e) \end{aligned} \quad (9.49)$$

con tutta generalità. Infatti, dalla (9.46) risulta

$$(e_e - e_u) - L'_{eu} = T_a(s_u - s_e) \quad (9.50)$$

nelle espansioni mentre, dalla (9.47), risulta

$$|L'_{eu}| - (e_u - e_e) = T_a(s_u - s_e) \quad (9.51)$$

nelle compressioni. In entrambi i casi, quindi, le perdite sono collegate agli aumenti d'entropia, cioè alle irreversibilità che, inevitabilmente, si verificano durante i processi reali. Tra le irreversibilità, quelle associate agli attriti convertono energia meccanica in energia termica, e quindi fanno sì che nelle espansioni e compressioni adiabatiche reali i fluidi escano a temperatura più alta che nelle corrispondenti trasformazioni ideali. Ciò implica che, quando si opera al di sopra della temperatura ambiente, i rendimenti exergetici di compressione ed espansione siano più elevati dei rendimenti isoentropici corrispondenti. Infatti, come evidenziato nelle Fig. 9.8 (a) e 9.8 (b), le aree sottostanti ai tratti d'isobara  $\overline{uu'}$ , rappresentative delle perdite entalpiche nelle trasformazioni reali rispetto alle trasformazioni ideali, sono maggiori delle aree dei rettangoli di altezza  $T_a$  e base  $(s_u - s_e)$ , rappresentative delle perdite d'energia utilizzabile. Viceversa, quando si opera al di sotto della temperatura ambiente, gli aumenti di temperatura associati agli attriti distruggono exergia e, quindi, i rendimenti exergetici sono più bassi dei rendimenti isoentropici corrispondenti. Infatti, come evidenziato nelle Fig. 9.8 (c) e 9.8 (d), le aree sottostanti ai tratti d'isobara  $\overline{uu'}$ , rappresentative delle perdite entalpiche nelle trasformazioni reali rispetto alle trasformazioni ideali, sono minori delle aree dei rettangoli di altezza  $T_a$  e base  $(s_u - s_e)$ , rappresentative delle perdite di energia utilizzabile.

Infine si osservi che, nel caso particolare dei processi di laminazione, l'espansione adiabatica non è accompagnata da alcuna produzione di lavoro utile. Pertanto, dalla (9.48) si ha

$$L'_{eu} = 0 = (e_e - e_u) - T_a \Delta s_{irr} \quad (9.52)$$

ovvero  $(e_e - e_u) = T_a \Delta s_{irr}$ , in quanto tutta l'energia utilizzabile fornita viene distrutta.

### Esempio 9.5

Con riferimento alla situazione illustrata nell'Esempio 5.10 e nell'ipotesi

che la temperatura ambiente sia pari a 273 K, si calcoli il rendimento exergetico della compressione caratterizzata da  $\eta_{ic} = 0,86$ , avente rapporto delle pressioni  $p_u / p_e = 5$ , nella quale il gas azoto entra alla temperatura  $T_e = 300$  K.

### Soluzione

Nell'Esempio 5.10 si era già trovato  $T_{u'} = 475$  K,  $T_u = 503,5$  K,  $s_u - s_e = 0,0605$  kJ/(kg K) ed  $|L'_{irr}| = h_u - h_e = 212$  kJ / kg. Risulta quindi

$$\begin{aligned} (\eta_{II})_c &= \frac{e_u - e_e}{|L'_{eu}|} = \frac{(h_u - h_e) - T_a(s_u - s_e)}{h_u - h_e} \\ &= \frac{212 - 273 \cdot 0,0605}{212} = \frac{195,5}{212} = 0,922 \end{aligned}$$

dove il rendimento exergetico è superiore al rendimento isoentropico poiché si opera a temperature maggiori della temperatura ambiente.

Per quanto riguarda le perdite d'energia utilizzabile, si ha

$$\begin{aligned} T_a \Delta s_{irr} &= -T_a(s_e - s_u) = |L'_{eu}| - (e_u - e_e) \\ &= 273 \cdot 0,0605 = 16,5 \text{ kJ / kg} \end{aligned}$$

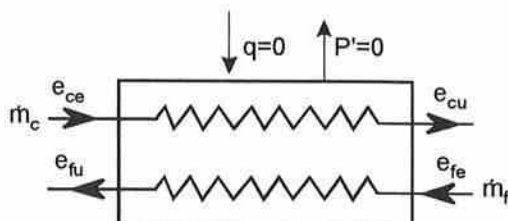
e quindi le perdite exergetiche sono inferiori alle perdite entalpiche  $(h_u - h_{u'}) = 24,6$  kJ/kg, calcolate nell'Esempio 5.10.

## 9.6.2 Scambiatori di Calore

Nelle ipotesi in cui ci si pone in questo paragrafo, gli scambiatori di calore sono adiabatici verso l'esterno e le variazioni d'energia cinetica e potenziale tra entrata ed uscita sono trascurabili. In tal caso, i rendimenti di primo principio sono identicamente uguali ad uno poiché gli scambiatori non danno



luogo a perdite verso l'ambiente. Per ottenere informazioni significative, occorre quindi far riferimento ai rendimenti exergetici partendo, ad esempio, dallo schema di Fig. 9.9.



**Figura 9.9** Schema d'appoggio per l'analisi exergetica di scambiatori di calore.

Se si opera a temperature maggiori di  $T_a$ , il fluido caldo fornisce energia a quello freddo, e quindi la relazione (9.43) porge

$$\eta_{II} = \frac{\dot{m}_f (e_{fu} - e_{fe})}{\dot{m}_c (e_{ce} - e_{cu})} \quad (9.53)$$

mentre, se si opera a temperature minori di  $T_a$ , il fluido freddo fornisce energia a quello caldo, e quindi la relazione (9.43) porge

$$\eta_{II} = \frac{\dot{m}_c (e_{cu} - e_{ce})}{\dot{m}_f (e_{fe} - e_{fu})} \quad (9.54)$$

Per quanto riguarda le perdite, dall'equazione di bilancio (9.33) e dalla definizione (9.40), si ha

$$(\dot{m}_c e_{ce} + \dot{m}_f e_{fe}) - (\dot{m}_c e_{cu} + \dot{m}_f e_{fu}) = T_a \dot{S}_{irr} \quad (9.55)$$

e tale bilancio può essere scritto nella forma

$$\dot{m}_c (e_{ce} - e_{cu}) - \dot{m}_f (e_{fu} - e_{fe}) = T_a \dot{S}_{irr} \quad (9.56)$$

se vale la definizione (9.53), o nella forma

$$\dot{m}_f(e_{fe} - e_{fu}) - \dot{m}_c(e_{cu} - e_{ce}) = T_a \dot{S}_{irr} \quad (9.57)$$

se vale la definizione (9.54). In entrambi i casi, le perdite d'energia utilizzabile sono collegate alla produzione d'entropia e quindi alle irreversibilità che, inevitabilmente, si accompagnano agli scambi termici con differenze di temperatura finite.

### Esempio 9.6

Nell'ipotesi che il calore specifico dell'acqua sia  $c = 4,187 \text{ kJ}/(\text{kg K})$  e che la temperatura ambiente sia pari a  $273 \text{ K}$ , si calcoli il rendimento exergetico dello scambiatore di calore acqua-acqua, descritto nell'Esempio 3.2, nel quale si ha  $h_{ce} = 335 \text{ kJ}/\text{kg}$ ,  $h_{cu} = 251 \text{ kJ}/\text{kg}$ ,  $\dot{m}_c = 2 \text{ kg}/\text{s}$ ,  $h_{fe} = 42 \text{ kJ}/\text{kg}$ ,  $h_{fu} = 210 \text{ kJ}/\text{kg}$  ed  $\dot{m}_f = 1 \text{ kg}/\text{s}$ .

#### Soluzione

Dalla relazione  $t \cong h / c$ , si ottiene:  $t_{ce} = 80 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $t_{cu} = 59,9 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $t_{fe} = 10 \text{ }^\circ\text{C}$  e  $t_{fu} = 50,2 \text{ }^\circ\text{C}$ . Risulta quindi

$$\begin{aligned} s_{fu} - s_{fe} &= c \ln \frac{T_{fu}}{T_{fe}} \\ &= 4,187 \ln \frac{(50,2 + 273,15)}{283,15} = 0,556 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} s_{ce} - s_{cu} &= c \ln \frac{T_{ce}}{T_{cu}} \\ &= 4,187 \ln \frac{(80 + 273,15)}{333,05} = 0,245 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \end{aligned}$$

Pertanto, dalla definizione di rendimento exergetico, si ha

$$\eta_{II} = \frac{\dot{m}_f(e_{fu} - e_{fe})}{\dot{m}_c(e_{ce} - e_{cu})} = \frac{\dot{m}_f[(h_{fu} - h_{fe}) - T_a(s_{fu} - s_{fe})]}{\dot{m}_c[(h_{ce} - h_{cu}) - T_a(s_{ce} - s_{cu})]}$$

$$= \frac{1[(210 - 42) - 273 \cdot 0,556]}{2[(335 - 251) - 273 \cdot 0,245]} = \frac{16,2}{34,2} = 0,47$$

Le perdite sono pari a

$$T_a \dot{S}_{irr} = \dot{m}_c(e_{ce} - e_{cu}) - \dot{m}_f(e_{fu} - e_{fe}) = 34,2 - 16,2 = 18,0 \text{ kW}$$

ed, ovviamente, coincidono con la differenza tra exergia fornita ed exergia ottenuta.

### 9.6.3 Cicli Diretti Bitermici

Il rendimento di conversione, o di primo principio, per un ciclo diretto bitermico tra la temperatura  $T$  e la temperatura ambiente  $T_a < T$ , può venire espresso nella forma

$$\eta = \frac{L_n^+}{Q^+} = \frac{Q^+ + Q_a^-}{Q^+} = 1 - \frac{|Q_a^-|}{Q^+} \leq 1 - \frac{T_a}{T} = \eta_{Carnot} \quad (9.58)$$

dove è evidenziata come perdita la quantità di calore  $|Q_a^-|$ , obbligatoriamente scaricata all'esterno alla temperatura  $T_a$ .

Il rendimento exergetico, o di secondo principio, per un ciclo diretto bitermico tiene conto, più correttamente, dell'exergia  $e_Q^+$  associata alla quantità di calore  $Q^+$  fornita alla temperatura  $T > T_a$  mentre, in base alle equazioni di bilancio, evidenzia come perdita la sola generazione d'entropia moltiplicata per  $T_a$ . Infatti, con riferimento allo schema di Fig. 9.10, i bilanci exergetici (9.11) e (9.31) forniscono

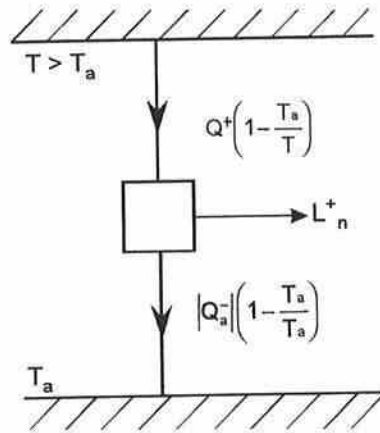
$$L_n^+ = e_Q^+ - T_a \Delta s_{irr} = Q^+ \left(1 - \frac{T_a}{T}\right)^+ - T_a \Delta s_{irr} \quad (9.59)$$

mentre la (9.43) può essere scritta nella forma

$$\eta_{II} = \frac{L_n^+}{Q^+(1 - T_a/T)} = 1 - \frac{T_a \Delta s_{irr}}{Q^+(1 - T_a/T)} = \frac{L_n^+}{Q^+} \frac{T}{T - T_a} = \frac{\eta}{\eta_{Carnot}} \leq 1 \quad (9.60)$$

dove  $\eta$  è tanto minore di  $\eta_{Carnot}$  quanto più forti sono le influenze delle irreversibilità. Nella definizione (9.60) le perdite sono correttamente attribuite alle irreversibilità delle trasformazioni, e non allo scarico nell'ambiente di una quantità di calore  $|Q_a^-|$  che, tra l'altro, ha valore exergetico nullo.

E' importante notare che il rendimento di secondo principio dei cicli diretti bitermici è sempre maggiore, od uguale, al rendimento di primo principio, in quanto il rendimento del ciclo di Carnot è sempre minore od uguale ad uno.



**Figura 9.10** Schema d'appoggio per l'analisi exergetica di un ciclo bitermico diretto.

### Esempio 9.7

In un ciclo bitermico diretto che si svolge tra la temperatura  $T = 600$  K e la temperatura ambiente  $T_a = 300$  K, sono forniti  $Q^+ = 600$  kJ/kg di calore mentre sono ottenuti  $L_n^+ = 250$  kJ/kg di lavoro. Si determini il rendimento di secondo principio.

*Soluzione*

In base alle definizioni si ha

$$\eta = \frac{L_n^+}{Q^+} = \frac{250}{600} = 0,417$$

$$\eta_{Carnot} = 1 - \frac{T_a}{T} = 1 - \frac{300}{600} = 0,5$$

e

$$\eta_{II} = \frac{\eta}{\eta_{Carnot}} = \frac{0,417}{0,5} = 0,834$$

Di conseguenza le perdite specifiche d'energia utilizzabile ammontano a

$$T_a \Delta s_{irr} = Q^+ \left( 1 - \frac{T_a}{T} \right) - L_n^+ = 600 \cdot 0,5 - 250 = 50 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Esse sono dovute unicamente alle irreversibilità presenti nel ciclo e non sono legate alla quantità di calore scaricata in ambiente

$$|Q_a^-| = Q^+ - L_n^+ = 600 - 250 = 350 \text{ kJ / kg}$$

che ha valore exergetico nullo.

#### 9.6.4 Cicli Inversi Bitermici

Come si è già osservato, per i cicli inversi non è possibile definire rendimenti di primo principio ed, in sostituzione, sono utilizzati i coefficienti d'effetto utile. Così per un ciclo frigorifero bitermico, che si svolge tra la temperatura  $T$  e la temperatura ambiente  $T_a > T$ , risulta

$$\varepsilon = \frac{Q^+}{|L_n^-|} \leq \frac{T}{T_a - T} = \varepsilon_{Carnot} \quad (9.61)$$

mentre per un ciclo bitermico a pompa di calore, che si svolge tra la temperatura  $T$  e la temperatura ambiente  $T_a < T$ , risulta

$$\varepsilon' = \frac{|Q^-|}{|L_n^-|} = \frac{T}{T - T_a} \leq \varepsilon'_{Carnot} \quad (9.62)$$

I coefficienti  $\varepsilon$  variano tra 0 ed infinito, mentre i coefficienti  $\varepsilon'$  variano tra 1 ed infinito. Pertanto, se si vuole avere un parametro comune di giudizio indipendente dalle temperature, è necessario ricorrere ai rendimenti di secondo principio.

Il rendimento di secondo principio di un ciclo frigorifero bitermico, tiene conto dell'exergia ottenuta  $e_{\bar{Q}}$ , associata alla quantità di calore  $Q^+$  scambiata a  $T < T_a$ , ed evidenzia come perdita la generazione d'entropia moltiplicata per  $T_a$ . Infatti, con riferimento allo schema di Fig. 9.11, i bilanci exergetici (9.11) e (9.31) forniscono

$$L_n^- = e_{\bar{Q}} - T_a \Delta s_{irr} = Q^+ \left(1 - \frac{T_a}{T}\right)^- - T_a \Delta s_{irr} \quad (9.63)$$

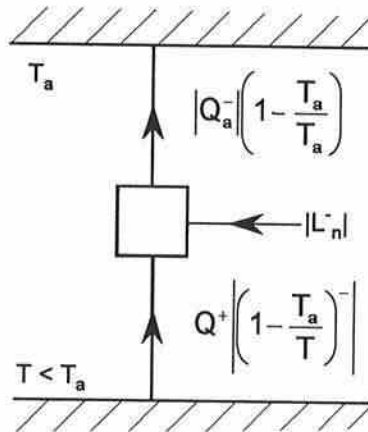
ovvero, con riferimento ai valori assoluti

$$|e_{\bar{Q}}| = Q^+ \left| \left(1 - \frac{T_a}{T}\right)^- \right| = |L_n^-| - T_a \Delta s_{irr} \quad (9.64)$$

Pertanto, in base alla (9.64), la (9.43) può essere scritta nella forma

$$\eta_{II} = \frac{Q^+ \left| \left(1 - T_a / T\right)^- \right|}{|L_n^-|} = 1 - \frac{T_a \Delta s_{irr}}{|L_n^-|} = \frac{Q^+}{|L_n^-|} \frac{T_a - T}{T} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{Carnot}} \leq 1 \quad (9.65)$$

dove  $\varepsilon$  è tanto minore di  $\varepsilon_{Carnot}$  quanto più forti sono le influenze delle irreversibilità.



**Figura 9.11** Schema d'appoggio per l'analisi exergetica di un ciclo frigorifero bitermico.

Analogamente, il rendimento di secondo principio di un ciclo bitermico a pompa di calore, tiene conto dell'exergia  $e_{\bar{Q}}$  associata alla quantità di calore  $Q^-$  scambiata alla temperatura  $T < T_a$ , ed evidenzia come perdita la generazione di entropia moltiplicata per  $T_a$ . Infatti, con riferimento allo schema di Fig. 9.12, i bilanci exergetici (9.11) e (9.31) forniscono

$$L_n^- = e_{\bar{Q}} - T_a \Delta s_{irr} = Q^- \left(1 - \frac{T_a}{T}\right)^+ - T_a \Delta s_{irr} \quad (9.66)$$

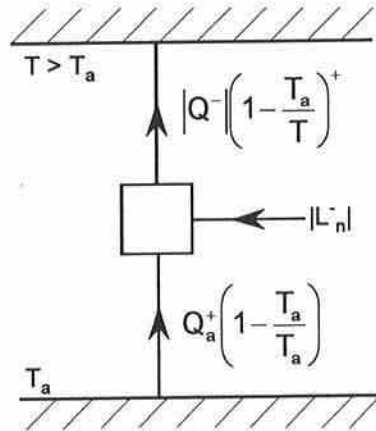
ovvero, con riferimento ai valori assoluti

$$|e_{\bar{Q}}| = |Q^-| \left(1 - \frac{T_a}{T}\right)^+ = |L_n^-| - T_a \Delta s_{irr} \quad (9.67)$$

Pertanto, in base alla (9.67), la (9.43) può essere scritta nella forma

$$\eta_{II} = \frac{|Q^-| \left(1 - T_a/T\right)^+}{|L_n^-|} = 1 - \frac{T_a \Delta s_{irr}}{|L_n^-|} = \frac{|Q^-|}{|L_n^-|} \frac{T - T_a}{T} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon'_{Carnot}} \leq 1 \quad (9.68)$$

dove  $\varepsilon'$  è tanto minore di  $\varepsilon'_{Carnot}$  quanto più forti sono le influenze delle irreversibilità.



**Figura 9.12** Schema d'appoggio per l'analisi exergetica di un ciclo a pompa di calore bitermico.

### Esempio 9.8

In un ciclo frigorifero bitermico, che si svolge tra la temperatura  $T = 250$  K e la temperatura ambiente  $T_a = 300$  K, sono prelevati a bassa temperatura  $Q^+ = 120$  kJ/kg mentre sono spesi  $|L_n^-| = 40$  kJ/kg. Si determini il rendimento di secondo principio.

#### Soluzione

In base alle definizioni si ha

$$\varepsilon = \frac{Q^+}{|L_n^-|} = \frac{120}{40} = 3$$

$$\varepsilon_{Carnot} = \frac{T}{T_a - T} = \frac{250}{300 - 250} = 5$$

e

$$\eta_{II} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{Carnot}} = \frac{3}{5} = 0,6$$



Le perdite specifiche d'energia utilizzabile ammontano a

$$T_a \Delta s_{irr} = |L_n^-| - Q^+ \left( 1 - \frac{T_a}{T} \right)^- = 40 - 120 \cdot \left| 1 - \frac{300}{250} \right| = 16 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

e sono dovute unicamente alle irreversibilità presenti nel ciclo.

### Esempio 9.9

In un ciclo bitermico a pompa di calore, che si svolge tra la temperatura ambiente  $T_a = 280 \text{ K}$  e la temperatura  $T = 320 \text{ K}$ , sono ottenuti  $|Q^-| = 160 \text{ kJ/kg}$  ad alta temperatura mentre sono spesi  $|L_n^-| = 40 \text{ kJ/kg}$ . Si determini il rendimento di secondo principio.

#### Soluzione

In base alle definizioni si ha

$$\varepsilon' = \frac{|Q^-|}{|L_n^-|} = \frac{160}{40} = 4$$

$$\varepsilon'_{Carnot} = \frac{T}{T - T_a} = \frac{320}{320 - 280} = 8$$

e

$$\eta_{II} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon'_{Carnot}} = \frac{4}{8} = 0,50$$

Le perdite specifiche d'energia utilizzabile ammontano a

$$T_a \Delta s_{irr} = |L_n^-| - |Q^-| \left( 1 - \frac{T_a}{T} \right)^+ = 40 - 160 \left( 1 - \frac{280}{320} \right) = 20 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

e sono dovute unicamente alle irreversibilità presenti nel ciclo.

## 9.7 CONCLUSIONI

In questo capitolo sono state date le definizioni d'energia utilizzabile valide per i sistemi chiusi ed i sistemi aperti. Successivamente, è stato determinato il valore exergetico delle quantità di calore disponibili a diverse temperature, mostrando come gli scambi termici irreversibili conducano a distruzioni d'energia utilizzabile. Infine, il concetto d'energia utilizzabile è stato impiegato per definire razionalmente il rendimento delle trasformazioni e dei cicli termodinamici.

Volutamente, non è stato preso in esame il problema della determinazione dell'energia utilizzabile associata all'energia potenziale di tipo chimico contenuta nei combustibili. Tale problema, infatti, sarà affrontato nel prossimo capitolo, dedicato all'analisi termodinamica dei processi di combustione.

---

# CAPITOLO 10

## COMBUSTIONE

---

### 10.1 GENERALITÀ

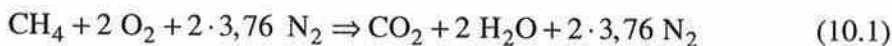
In questo capitolo sono richiamati alcuni concetti di stechiometria, al fine di valutare i parametri fondamentali delle combustioni quali, ad esempio, i rapporti tra aria e combustibile, l'eccesso d'aria e la temperatura di rugiada nei fumi. Successivamente, in base ad analisi di primo principio, sono definiti i poteri calorifici dei combustibili e sono determinate le temperature d'uscita dei fumi. Sulla scorta delle analisi di secondo principio sono definiti, invece, i poteri exergetici dei combustibili, mettendo in evidenza la possibilità di convertire direttamente in lavoro l'energia chimica. Infine, i bilanci dell'energia e dell'exergia sono utilizzati per definire razionalmente i rendimenti di primo e di secondo principio dei più comuni processi di combustione che si svolgono in caldaie, generatori di vapore e camere di combustione a servizio di impianti termici di riscaldamento e impianti motori.

### 10.2 RICHIAMI DI STECHIOMETRIA

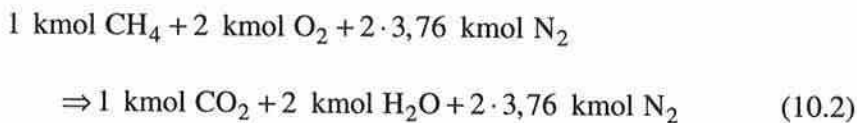
Combustione è una qualunque reazione chimica nella quale una sostanza ossidabile, detta combustibile, reagisca con una sostanza ossidante, detta comburente. In chimica, infatti, ossidazione vuol dire perdita d'elettroni da parte dei combustibili, che si ossidano, a vantaggio dei comburenti che, acquistando elettroni, si riducono. Il nome d'ossidazione deriva dal fatto che, tra

gli agenti ossidanti, l'ossigeno è il più comune, anche se non il solo: si pensi, ad esempio, al fluoro che "ossida" l'idrogeno nella reazione per formare acido fluoridrico. Nel seguito, comunque, si fa riferimento esclusivamente alle "combustioni" che utilizzano l'ossigeno contenuto nell'aria atmosferica.

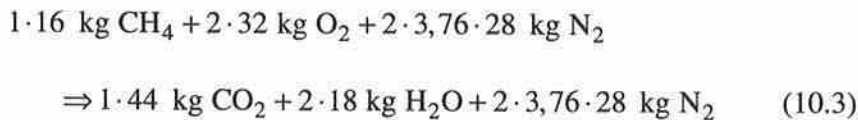
Generalmente, nell'analisi stechiometrica dei processi di combustione, si ipotizza di utilizzare aria "standard" la cui composizione volumetrica è: 21% di ossigeno e 79% di azoto, con un rapporto volumetrico tra azoto ed ossigeno pari a  $79/21 = 3,76$ . In base a quest'ipotesi semplificativa, possono essere scritte immediatamente tutte le equazioni stechiometriche relative a combustioni complete cui partecipino aria standard e combustibili a composizione chimica nota. Ad esempio, nella combustione ideale completa di un idrocarburo intervengono attivamente, come reagenti, ossigeno e combustibile mentre si ottengono, come prodotti, anidride carbonica ed acqua. L'azoto, che non partecipa alla reazione, compare invece immutato in entrambi i membri dell'equazione. Così, per la combustione ideale completa di metano in aria, si ha



cioè



ovvero, con riferimento ai valori arrotondati delle masse molari



Le relazioni del tipo (10.1) e (10.2), consentono il calcolo immediato

della pressione parziale di vapore nei prodotti della combustione, nell'ipotesi che l'acqua si trovi tutta allo stato di vapore e che i prodotti della combustione, cioè i "fumi", si comportino come una miscela di gas ideali. Così, dalla (10.2), si ha

$$\left(\frac{p_v}{p_{fu}}\right)_s = \left(\frac{n_{\text{H}_2\text{O}}}{n_{fu}}\right)_s = (y_{\text{H}_2\text{O}})_s = \frac{2}{1+2+2\cdot 3,76} = 0,19 \quad (10.4)$$

e quindi si deduce che, se i fumi si trovano alla pressione totale di 1 atm, la pressione parziale del vapore in essi contenuto è pari a 0,19 atm nel caso esaminato. Nella (10.4), e nel seguito, si utilizzano i pedici *fu* per indicare i fumi umidi, cioè tutti i prodotti della combustione vapore acqueo *incluso*, al fine di riservare il pedice *f* per indicare i fumi secchi, cioè i prodotti della combustione vapore acqueo *escluso*.

Alla pressione parziale del vapore nei fumi corrisponde una ben definita temperatura di saturazione che rappresenta, evidentemente, la temperatura di rugiada dei fumi, ovvero la temperatura al di sotto della quale il vapor d'acqua contenuto nei fumi inizia a condensare. Così, nel caso della combustione stechiometrica del metano in aria, la temperatura di rugiada è pari a circa 59 °C, cioè pari alla temperatura di saturazione del vapore che si trova alla pressione parziale di  $(0,19 \cdot 101,325 =) 19,25$  kPa. Come si vedrà tra poco, il metano dà origine alla più alta frazione molare di vapor d'acqua tra tutti gli idrocarburi. Infatti, i fumi delle combustioni di gasolio ed olio combustibile sono caratterizzati da temperature di rugiada "teoriche", dell'ordine dei 40 - 50 °C, e quindi inferiori a quella del metano. Se però questi combustibili contengono zolfo, e nei fumi sono presenti quantità anche piccole di anidride solforica, il punto di rugiada assume valori molto più elevati di quello indicato, potendo raggiungere anche i 170 - 180 °C.

Le relazioni del tipo (10.3) consentono il calcolo dei rapporti stechiometrici di massa tra aria e combustibile e tra fumi e combustibile. Ad esempio, per la combustione stechiometrica del metano in aria si ha

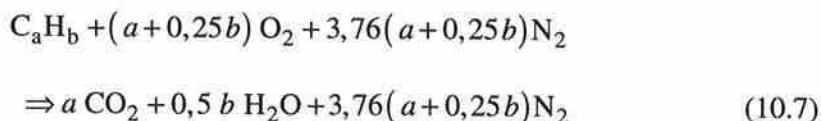
$$m_{as}^* = \frac{m_{as}}{m_c} = \frac{2 \cdot 32 + 2 \cdot 3,76 \cdot 28}{16} = 17,16 \frac{\text{kg}_a}{\text{kg}_c} \quad (10.5)$$

ed

$$\left(m_{fu}^*\right)_s = \left(\frac{m_{fu}}{m_c}\right)_s = \frac{m_{as} + m_c}{m_c} = 1 + \frac{m_{as}}{m_c} = 1 + m_{as}^* = 18,16 \frac{\text{kg}_f}{\text{kg}_c} \quad (10.6)$$

dove i simboli asteriscati indicano i rapporti tra le grandezze che partecipano al processo, in questo caso le masse d'aria e di fumi umidi, e la massa di combustibile.

Nel caso della combustione completa di un idrocarburo a composizione nota  $C_aH_b$ , la relazione stechiometrica (10.1) può essere scritta nella forma generale



mentre, nelle combustioni dei solidi, le relazioni precedenti vanno modificate per tenere conto della eventuale presenza di sostanze incombustibili. Da un punto di vista pratico, infatti, le sostanze incombustibili riducono la massa attiva che partecipa alla reazione ed implicano una corrispondente produzione di ceneri, che rimangono nel focolare, o di fuliggine, cioè di particelle solide che sono trascinate in sospensione nei fumi.

Per i soli combustibili gassosi, le relazioni del tipo (10.1) e (10.2) consentono anche il calcolo dei rapporti stechiometrici di volume, sempre nell'ipotesi che i fumi possano essere considerati una miscela di gas ideali. Ad esempio, nella combustione stechiometrica di metano in aria, si ha

$$V_{as}^* = \frac{V_{as}}{V_c} = \frac{n_{as}}{n_c} = \frac{2 + 2 \cdot 3,76}{1} = 9,52 \frac{\text{m}_a^3}{\text{m}_c^3} \quad (10.8)$$

per il rapporto tra aria e combustibile e

$$(V_{fu}^*)_s = \left( \frac{V_{fu}}{V_c} \right)_s = \frac{V_{as} + V_c}{V_c} = 1 + \frac{V_{as}}{V_c} = 1 + V_{as}^* = 10,52 \frac{\text{m}_f^3}{\text{m}_c^3} \quad (10.9)$$

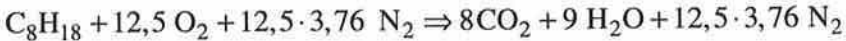
per il rapporto tra fumi umidi e combustibile.

### Esempio 10.1

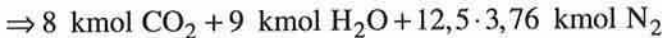
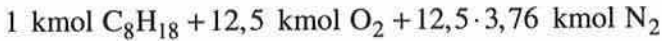
Si ricavino le relazioni corrispondenti alle (10.1) - (10.6) per la combustione stechiometrica d'ottano in aria.

#### Soluzione

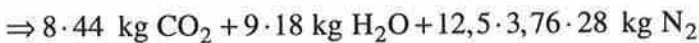
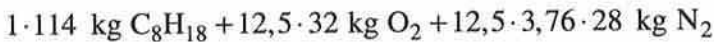
In molte analisi di prima approssimazione, l'ottano è l'idrocarburo scelto per rappresentare la composizione chimica della benzina per autoveicoli. Nella combustione completa d'ottano in aria si ha, nell'ordine



ed



ovvero, con riferimento alle masse



Pertanto si ottiene

$$\left( \frac{p_v}{p_{fu}} \right)_s = \left( \frac{n_{\text{H}_2\text{O}}}{n_{fu}} \right)_s = (y_{\text{H}_2\text{O}})_s = \frac{9}{8 + 9 + 12,5 \cdot 3,76} = 0,14$$

e

$$m_{as}^* = \frac{m_{as}}{m_c} = \frac{12,5 \cdot 32 + 12,5 \cdot 3,76 \cdot 28}{114} = 15,05 \frac{\text{kg}_a}{\text{kg}_c}$$

Ovviamente, relazioni simili si ricavano facilmente per le combustioni stechiometriche di tutti i combustibili a composizione nota.

### 10.2.1 Eccesso d'Aria

Generalmente, nei processi di combustione reali, si utilizza aria in eccesso rispetto a quella stechiometrica, in quanto si cerca di bruciare tutto il combustibile a disposizione. In alcuni processi tecnologici poi, si aumenta l'eccesso d'aria anche oltre i limiti strettamente necessari per assicurare una combustione completa, al fine d'abbassare la temperatura dei fumi. È questo il caso, ad esempio, delle combustioni che hanno luogo in molti impianti con turbine a gas, dove motivi di carattere tecnologico impongono di entrare nel turbomotore con fumi a temperatura controllata.

Il coefficiente d'eccesso d'aria è definito come

$$\varepsilon = \frac{m_a - m_{as}}{m_{as}} = \frac{m_a}{m_{as}} - 1 = \frac{n_a M_a}{n_{as} M_a} - 1 = \frac{n_a}{n_{as}} - 1 = \lambda - 1 \quad (10.10)$$

dove

$$\lambda = \frac{m_a}{m_{as}} = \frac{m_a^*}{m_{as}^*} = \frac{n_a}{n_{as}} = \frac{n_a^*}{n_{as}^*} = 1 + \varepsilon \quad (10.11)$$

è il rapporto tra la quantità d'aria utilizzata e la quantità d'aria stechiometrica. Negli ultimi anni, il parametro  $\lambda$  ha assunto una grande rilevanza tecnologica in quanto è monitorato, in continuo, dalle sonde omonime che pilotano i sistemi di iniezione del carburante nei motori delle autovetture fornite di marmitte catalitiche.

Dalle definizioni poste, risulta

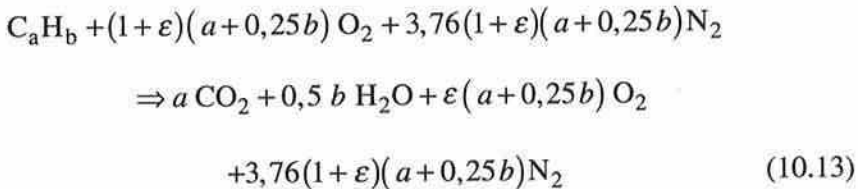
$$m_a^* = \frac{m_a}{m_c} = \frac{\lambda m_{as}}{m_c} = \lambda m_{as}^* = (1 + \varepsilon) m_{as}^* \quad (10.12)$$

e quindi il rapporto aria-combustibile può essere calcolato a partire sia da  $\lambda$



che da  $\varepsilon$ . Nelle combustioni pratiche in caldaie e generatori di vapore, il coefficiente d'eccesso d'aria assume valori minimi che vanno da 0,05 (= 5%), con i combustibili gassosi, fino a 0,5 (= 50%), per i combustibili solidi non polverizzati.

Nel caso di combustione, con eccesso d'aria, di un idrocarburo a composizione nota  $C_aH_b$ , la relazione (10.7) può essere ulteriormente generalizzata, scrivendo



Come si vede, quando si opera con aria in eccesso i fumi contengono ancora ossigeno, talvolta in quantità sufficiente a supportare dei processi di post-combustione. È questo il caso, ad esempio, dei processi di post-combustione che hanno luogo in alcuni impianti con turbine a gas.

### 10.2.2 Analisi dei Fumi

Nelle combustioni reali, oltre ad anidride carbonica, acqua ed azoto, i fumi contengono sostanze inquinanti come

- ossidi di zolfo, derivanti dalla combustione dello zolfo presente in alcuni combustibili solidi e liquidi,
- particelle in sospensione, derivanti dal trascinarsi di incombusti solidi, o dalla carbonizzazione di goccioline di combustibile liquido,
- ossidi d'azoto, derivanti dalle reazioni che, ad alta temperatura, possono avere luogo tra azoto ed ossigeno,
- ossido di carbonio, derivante dalla combustione incompleta del carbonio.

L'emissione di inquinanti durante i processi di combustione non riveste

particolare importanza ai fini energetici, ma va limitata il più possibile per evidenti ragioni di carattere ecologico alle quali si aggiunge, nel caso degli ossidi di zolfo, anche la necessità di diminuire i rischi di corrosione. Da questo punto di vista occorre quindi raffinare i combustibili liquidi e scegliere opportunamente i combustibili solidi, al fine di ridurre la concentrazione di zolfo ed inerti nei reagenti. È importante poi, aumentare la finezza di polverizzazione dei combustibili liquidi e solidi per facilitare le reazioni d'ossidazione. Inoltre, la temperatura di combustione non può essere troppo elevata per non rendere agevole la formazione d'ossidi di azoto. Infine, si può osservare che la presenza d'ossido di carbonio nei fumi è possibile anche nelle combustioni in eccesso d'aria, a causa della difficoltà di far reagire il carbonio con l'ossigeno. Infatti, è noto che, nelle combustioni di interesse pratico, l'idrogeno tende sempre a bruciare completamente, data la sua grande affinità con l'ossigeno, mentre parte del carbonio può dare luogo ad ossido di carbonio, se il coefficiente di eccesso d'aria non è molto elevato o se la miscelazione tra comburente e combustibile non è ottimale. Poiché l'ossido di carbonio è un gas molto pericoloso per la salute, anche a concentrazioni di poche parti per milione, la sua eventuale presenza va sempre evidenziata nelle analisi sperimentali dei prodotti della combustione.

Nella determinazione del coefficiente d'eccesso d'aria, può essere misurato direttamente il rapporto  $\lambda$  (come nelle autovetture con marmitte catalitiche) od, in alternativa, può essere effettuata una vera e propria analisi dei fumi (come nella maggior parte degli impianti termici). In quest'ultimo caso, per analizzare i fumi sono utilizzati strumenti automatici a microprocessore che operano sui prodotti della combustione essiccati e forniscono direttamente le frazioni volumetriche d'anidride carbonica, ossido di carbonio ed ossigeno. Se poi si desidera effettuare un'analisi completa dal punto di vista ecologico, gli analizzatori della combustione possono venire corredati da celle supplementari che consentano di rilevare anche le frazioni volumetriche degli ossidi di zolfo e di azoto. Dai risultati dell'analisi, si arriva alla determinazione dell'eccesso d'aria in base ad una serie di calcoli ste-

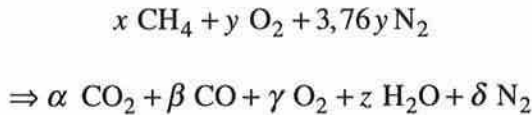
chiometrici fondati su relazioni simili alla (10.13). È superfluo notare che tali calcoli, ormai, sono eseguiti automaticamente dagli stessi analizzatori.

### Esempio 10.2

Si ricavi la relazione omologa alla (10.13) per il caso della combustione incompleta di metano in aria. Si applichi la relazione così ricavata ad un'analisi dei fumi, effettuata dopo l'essiccazione, che ha dato il seguente risultato su base volumetrica: anidride carbonica 9%, ossido di carbonio 0,5%, ossigeno 4,2% ed azoto ( $100 - 9 - 0,5 - 4,2 =$ ) 86,3%.

#### Soluzione

Nella combustione incompleta di metano in aria, si ha



dove  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$  sono note dall'analisi volumetrica dei fumi, mentre  $y$ ,  $x$  e  $z$  sono incognite determinabili, rispettivamente, in base ai bilanci dell'azoto, del carbonio e dell'idrogeno. Il bilancio dell'ossigeno, poi, deve confermare l'accuratezza del calcolo. Dal bilancio dell'azoto si ha subito

$$y = \frac{\delta}{3,76}$$

mentre dal bilancio del carbonio si ottiene

$$x = \alpha + \beta$$

Dal bilancio dell'idrogeno si ricava

$$z = 2x = 2(\alpha + \beta)$$

dal momento che si è ipotizzata una combustione completa dell'idrogeno contenuto nel metano. Infine, dal bilancio dell'ossigeno si ricava

$$y = [\alpha + \gamma + 0,5(\beta + z)] = (\alpha + 0,5\beta + \gamma + 0,5z) = 2\alpha + 1,5\beta + \gamma$$

Facendo riferimento, per comodità di calcolo, a 100 moli di fumi secchi si ha

$$y = \frac{86,3}{3,76} = 22,95$$

$$x = 9 + 0,5 = 9,5$$

$$z = 2x = 2 \cdot 9,5 = 19$$

mentre il bilancio dell'ossigeno porge

$$y = \alpha + 0,5\beta + \gamma + 0,5z = 9 + 0,5 \cdot 0,5 + 4,2 + 0,5 \cdot 19 = 22,95$$

a conferma dell'accuratezza dei calcoli. Nella reazione considerata si ha ancora

$$n_a^* = \frac{n_a}{n_c} = \frac{4,76y}{x} = \frac{4,76 \cdot 22,95}{9,5} = 11,50$$

mentre, nella corrispondente reazione stechiometrica (10.1), risulta

$$n_{as}^* = \frac{n_{as}}{n_c} = \frac{2 + 2 \cdot 3,76}{1} = 9,52$$

Pertanto, in base alla (10.11), si ottiene

$$\lambda = \frac{n_a}{n_{as}} = \frac{n_a^*}{n_{as}^*} = \frac{11,50}{9,52} = 1,208$$

che corrisponde, nel caso in esame, ad un coefficiente d'eccesso d'aria

$$\varepsilon = \lambda - 1 = 1,208 - 1 = 0,208$$

Nella combustione in aria di un idrocarburo avente composizione nota  $C_aH_b$ , il procedimento di valutazione dell'eccesso d'aria non cambia, ma le relazioni stechiometriche sono più complesse.

### 10.3 POTERI CALORIFICI

Per la valutazione del potere calorifico dei combustibili, si fa riferimento ad alcune ipotesi generali ed a un processo di combustione come quello schematizzato in Fig. 10.1. In tale processo si opera in regime stazionario a pressione costante, non si hanno scambi di lavoro tecnico utile con l'esterno e si fa in modo che le variazioni d'energia cinetica e potenziale abbiano un'influenza trascurabile.

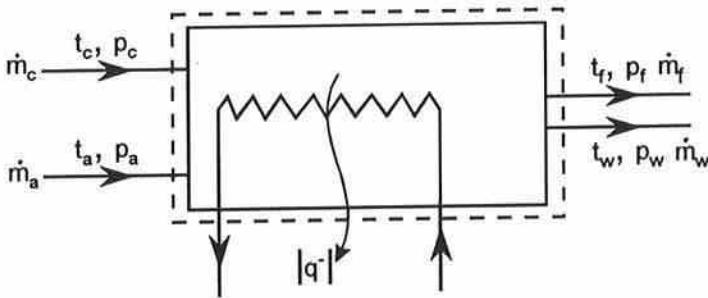


Figura 10.1 Combustione con scambio termico.

Dal primo principio della termodinamica, applicato allo schema di Fig. 10.1, si ottiene

$$\dot{m}_a h_a + \dot{m}_c h_c + \dot{q}^- = \dot{m}_f h_f + \dot{m}_w h_w \quad (10.14)$$

in quanto entrano aria e combustibile, mentre escono prodotti della combustione in fase gassosa (frazione secca dei fumi, contraddistinta dal pedice  $f$ ) ed acqua in fase liquida o vapore (contraddistinta, appunto, dal pedice generico  $w$ ). Per estrarre dal processo di combustione la massima quantità di calore possibile, occorre che:

- la combustione sia completa senza dar luogo ad incombusti od a produzione di ceneri;
- l'acqua proveniente dalla combustione dell'idrogeno esca tutta condensata;
- aria e combustibile entrino come tali ed escano come prodotti, sempre alle stesse condizioni, di solito assunte pari a  $t_0 = 25\text{ °C}$  e  $p_0 = 1\text{ atm}$  (= 101,325 kPa).

Inoltre, per fissare le idee, si può ipotizzare che aria e combustibile stiano tra loro in rapporto stechiometrico anche se, come vedremo, quest'ultima ipotesi non è necessaria.

Amnesso che le condizioni sopraelencate siano soddisfatte, dalla (10.14) si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{|q^-|}{\dot{m}_c} &= \frac{\dot{m}_a}{\dot{m}_c} h_a^o + h_c^o - \frac{\dot{m}_f}{\dot{m}_c} h_f^o - \frac{\dot{m}_\ell}{\dot{m}_c} h_\ell^o \\ &= m_a^* h_a^o + h_c^o - m_f^* h_f^o - m_\ell^* h_\ell^o = H_s^0 \end{aligned} \quad (10.15)$$

dove le entalpie di aria, combustibile e fumi secchi sono valutate alla temperatura di riferimento  $t_0$  mentre si è posto  $m_w h_w^0 = m_\ell h_\ell^0$  il quanto si considera la fase liquida dell'acqua. In tali ipotesi,  $H_s^0$  rappresenta la massima quantità di calore estraibile, nello stato di riferimento, dall'unità di massa di combustibile nello stato (solido, liquido o gassoso) in cui il combustibile stesso è utilizzato, quando l'acqua nei prodotti è in fase liquida. Tale quantità, espressa in joule, chilojoule o megajoule per chilogrammo, cioè [J/kg], [kJ/kg] o [MJ/kg], è definita potere calorifico superiore del combustibile.

Giunti a questo punto, con riferimento alla Fig. 10.2 può essere utile

osservare che l'aria in eccesso  $\varepsilon \dot{m}_{as}$  non si combina con il combustibile, e quindi entra ed esce alle stesse condizioni  $(t_0, p_0)$  senza contribuire, in alcun modo, al bilancio energetico. Pertanto, come si era anticipato, l'ipotesi di combustione stechiometrica non è indispensabile nella definizione del potere calorifico. Per analogia si può anche notare che, nella determinazione sperimentale del potere calorifico, è possibile operare con aria saturata d'umidità all'ingresso, in modo che tutta l'acqua formata nella combustione si trovi condensata all'uscita, come assunto nella valutazione del potere calorifico superiore. Se però, all'opposto, si opera con aria secca all'ingresso e con un elevato coefficiente d'eccesso d'aria, si può ipotizzare che, praticamente, tutta l'acqua formata nella combustione si trovi allo stato di vapore all'uscita. In quest'ultimo caso, dalla (10.14) si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{|q^-|}{\dot{m}_c} &= \frac{\dot{m}_a}{\dot{m}_c} h_a^o + h_c^o - \frac{\dot{m}_f}{\dot{m}_c} h_f^o - \frac{\dot{m}_v}{\dot{m}_c} h_v^o \\ &= m_a^* h_a^o + h_c^o - m_f^* h_f^o - m_v^* h_v^o = H_i^o \end{aligned} \quad (10.16)$$

dove le entalpie di aria, combustibile e fumi umidi sono valutate ancora alla temperatura  $t_0$  mentre si è assunto  $\dot{m}_w h_w^0 = \dot{m}_v h_v^o$  in quanto si considera la fase vapore dell'acqua. Nelle ipotesi di validità della (10.16),  $H_i^o$  rappresenta la massima quantità di calore estraibile, nello stato di riferimento, dall'unità di massa di combustibile nello stato (solido, liquido o gassoso) in cui il combustibile stesso è utilizzato, quando l'acqua nei prodotti è in fase vapore.

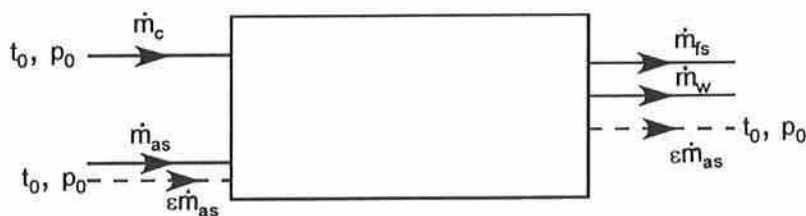


Figura 10.2 Aria in eccesso e combustione.

Tale quantità, espressa in joule, chilojoule o megajoule per chilogrammo, cioè [J/kg], [kJ/kg] o [MJ/kg], è definita potere calorifico inferiore del combustibile.

Ovviamente, potere calorifico superiore ed inferiore sono legati tra loro. Infatti, sottraendo membro a membro la (10.16) dalla (10.15) e tenendo conto del fatto che  $\dot{m}_v^* = \dot{m}_\ell^* = \dot{m}_w^*$ , in quanto l'acqua deriva dalla combustione dell'idrogeno, si ricava immediatamente

$$H_s^0 - H_i^0 = m_v^* h_v^0 - m_\ell^* h_\ell^0 = m_v^* (h_v^0 - h_\ell^0) = m_v^* r_0 \quad (10.17)$$

dove  $r_0$  è il calore di vaporizzazione alla temperatura di riferimento. Poiché i flussi termici e le portate di massa sono direttamente misurabili, la (10.15) o la (10.16), insieme con la (10.17), consentono la determinazione sperimentale dei poteri calorifici. In questo modo si aggira la difficoltà rappresentata dal fatto che, in presenza di variazioni di composizione chimica tra reagenti e prodotti, le entalpie che compaiono nelle (10.15) e (10.16) andrebbero valutate singolarmente, ciascuna con riferimento al suo zero entalpico assoluto.

I poteri calorifici superiori ed inferiori di alcuni combustibili, valutati a 25 °C ed a 1 atm (= 101,325 kPa) sono riportati nella Tabella 10.1.

**Tabella 10.1** Poteri calorifici di alcuni combustibili valutati a 25 °C ed alla pressione atmosferica normale.

COMBUSTIBILE	$H_s^0$ [MJ / kg]	$H_i^0$ [MJ / kg]
Carbonio (C grafite)	32,8	=
Idrogeno (H <sub>2</sub> gas)	141,8	120,0
Metano (CH <sub>4</sub> gas)	55,5	50,1
Benzina (ottano C <sub>8</sub> H <sub>18</sub> liquido)	48,0	44,5
Benzina (ottano C <sub>8</sub> H <sub>18</sub> gas)	48,4	44,9
Cherosene (liquido)	46,5	43,5
Gasolio (C <sub>14,4</sub> H <sub>24,9</sub> liquido)	45,7	42,9
Olio combustibile (liquido)	43,5	41,1



Nella maggior parte delle situazioni d'interesse pratico, si fa in modo che l'acqua proveniente dalla combustione dell'idrogeno esca sotto forma di vapore. Infatti, l'acqua condensata nei fumi risulta, di per sé, corrosiva ed, inoltre, può dare luogo ad acido solforico ed acido nitrico se, ad esempio, i fumi contengono, rispettivamente, ossidi di zolfo e d'azoto. Di conseguenza, nelle combustioni industriali i fumi sono fatti uscire a temperature comprese tra i 150 °C ed i 200 °C, superiori alla temperatura di rugiada dei fumi stessi. Nel caso generale, inoltre, i reagenti possono entrare ed i prodotti possono uscire in condizioni diverse da quelle di riferimento. In tali ipotesi, dallo schema di Fig. 10.1 e dalla (10.14), si ottiene

$$\frac{|q^-|}{\dot{m}_c} = m_a^* h_a + h_c - m_f^* h_f - m_v^* h_v \quad (10.18)$$

dove il secondo membro non è uguale ad  $H_i^o$ . Dalla (10.18), tuttavia, può essere sottratta membro a membro la (10.16), arrivando così all'espressione

$$\frac{|q^-|}{\dot{m}_c} - H_i^o = m_a^* (h_a - h_a^0) + (h_c - h_c^0) - m_f^* (h_f - h_f^0) - m_v^* (h_v - h_v^0) \quad (10.19)$$

dove compaiono il potere calorifico inferiore e le differenze tra le entalpie di due stati diversi delle stesse sostanze omogenee. Tali differenze sono quindi valutabili in base a riferimenti scelti arbitrariamente assumendo, ad esempio, che i calori specifici siano indipendenti dalla temperatura e che, evidentemente, si abbia  $t_f = t_v$ . Risulta allora

$$h_a - h_a^0 = c_{pa}(t_a - t_0) \quad (10.20)$$

e

$$h_c - h_c^0 = c_{pc}(t_c - t_0) \quad (10.21)$$

$$h_f - h_f^0 = c_{pf}(t_f - t_0) \quad (10.22)$$

e

$$h_v - h_v^o = c_{pv}(t_f - t_0) \quad (10.23)$$

Nelle relazioni (10.19), (10.22) e (10.23) si considerano entità separate i fumi secchi ed il vapore d'acqua. In realtà, essi formano una miscela di gas per la quale si ha

$$\begin{aligned} m_f^*(h_f - h_f^o) + m_v^*(h_v - h_v^o) &= (m_f^*c_{pf} + m_v^*c_{pv})(t_f - t_0) \\ &= m_{fu}^* \left( \frac{m_f^*}{m_{fu}^*} c_{pf} + \frac{m_v^*}{m_{fu}^*} c_{pv} \right) (t_f - t_0) = m_{fu}^* c_{pu} (t_f - t_0) \end{aligned} \quad (10.24)$$

intendendo che

$$m_{fu}^* = m_f^* + m_v^* = m_a^* + 1 \quad (10.25)$$

è la massa totale di fumi umidi che si formano per unità di massa di combustibile, mentre la media ponderata

$$c_{pu} = \frac{m_f^*}{m_{fu}^*} c_{pf} + \frac{m_v^*}{m_{fu}^*} c_{pv} \quad (10.26)$$

è il calore specifico dei fumi umidi. Sostituendo le (10.20), (10.21), (10.24) e (10.26) nella (10.19), si arriva alla relazione

$$\frac{|\dot{q}^-|}{\dot{m}_c} = H_i^o + m_a^* c_{pa}(t_a - t_0) + c_{pc}(t_c - t_0) - m_{fu}^* c_{pu}(t_f - t_0) \quad (10.27)$$

che esprime, in forma molto conveniente, il bilancio termico delle combustioni di interesse pratico.

### 10.3.1 Variazioni del Potere Calorifico con la Temperatura

Poiché il potere calorifico non dipende dall'eccesso d'aria, le variazioni del

potere calorifico con la temperatura possono essere valutate ponendo  $t_a = t_c = t_f = t$  nella (10.27) riferita ad una combustione stechiometrica. Si ottiene così la relazione

$$\frac{|q^-|}{\dot{m}_c} - H_i^0 = H_i(t) - H_i^0 = \left[ m_{as}^* c_{pa} + c_{pc} - (m_{fu}^* c_{pu})_s \right] (t - t_0) \quad (10.28)$$

dal momento che la quantità  $|q^-| / \dot{m}_c$ , valutata alla temperatura  $t$  di entrata dei reagenti ed uscita dei prodotti, è proprio il potere calorifico inferiore  $H_i$  valutato alla temperatura  $t$ . Dall'Eq. (10.28) si evince che le variazioni dei poteri calorifici con la temperatura sono molto modeste nella maggior parte dei casi pratici. Infatti, in base al principio di conservazione della massa, si ha

$$(m_{fu}^*)_s = m_{as}^* + 1 \quad (10.29)$$

mentre i calori specifici dei reagenti e dei prodotti sono dello stesso ordine di grandezza.

### Esempio 10.3

Si determini la variazione del potere calorifico inferiore del metano tra la temperatura di 5 °C e la temperatura di riferimento di 25 °C.

#### Soluzione

Nelle ipotesi poste si ha

$$m_{as}^* = 17,16 \text{ kg}_a / \text{kg}_c$$

$$(m_{fu}^*)_s = m_{as}^* + 1 = 18,16 \text{ kg}_a / \text{kg}_c$$

$$m_{vs}^* = \frac{2 \cdot 18}{16} = 2,25 \frac{\text{kg}_v}{\text{kg}_c}$$

e

$$m_{fs}^* = (m_{fu}^*)_s - m_{vs}^* = 18,16 - 2,25 = 15,91 \text{ kg}_f / \text{kg}_c$$

mentre si può assumere  $c_{pa} = 1,006 \text{ kJ}/(\text{kg K})$ ,  $c_{pc} = 2,23 \text{ kJ}/(\text{kg K})$ ,  $c_{pf} = 0,98 \text{ kJ}/(\text{kg K})$  e  $c_{pv} = 1,875 \text{ kJ}/(\text{kg K})$ . Si ottiene quindi

$$(c_{pu})_s = \frac{m_{fs}^*}{(m_{fu}^*)_s} c_{pf} + \frac{m_{vs}^*}{(m_{fu}^*)_s} c_{pv} = \frac{15,91}{18,16} 0,98 + \frac{2,25}{18,16} 1,875 = 1,091 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}$$

e

$$H_i(t) - H_i^0 = \left[ m_{as}^* c_{pa} + c_{pc} - (m_{fu}^* c_{pu})_s \right] (t - t_0)$$

$$= (17,16 \cdot 1,006 + 2,25 - 18,16 \cdot 1,091)(5 - 20) = 5,99 \text{ kJ / kg}$$

a fronte di un potere calorifico inferiore del metano pari a  $50100 \text{ kJ/kg}$ . L'errore che si commette trascurando la variazione del potere calorifico con la temperatura è, in questo caso, dell'ordine dello  $0,01\%$ .

### 10.3.2 Poteri Calorifici nei Sistemi Chiusi

Alcuni processi di combustione in sistemi chiusi, tecnicamente molto importanti, avvengono a pressione costante, come nei motori a ciclo Diesel, od a volume costante, come nei motori a ciclo Otto. A questo proposito si può osservare, innanzi tutto, che non vi può essere alcuna differenza termodinamica tra combustioni a pressione costante nei sistemi chiusi e nei sistemi aperti. In linea di principio, invece, si deve ammettere la possibilità di differenze termodinamiche tra combustioni a pressione ed a volume costante. Tuttavia, si verifica sperimentalmente che, nella maggior parte delle applicazioni pratiche, la differenza tra i poteri calorifici a pressione costante ed a volume costante è trascurabile. In particolare se, nelle combustioni in fase gassosa reagenti e prodotti si comportano come gas ideali, dalla definizione stessa di potere calorifico inferiore a volume costante, si ha

$$\begin{aligned}
 \frac{|\hat{Q}^-|}{m_c} &= m_a^* u_a^o + u_c^o - m_f^* u_f^o - m_v^* u_v^o = U_i^0 \\
 &= m_a^* h_a^o + h_c^o - m_f^* h_f^o - m_v^* h_v^o - \frac{1}{m_c} (m_a R_a + m_c R_c - m_f R_f - m_v R_v) T_0 \\
 &= H_i^0 - \frac{1}{m_c} (n_a + n_c - n_f - n_v) \bar{R} T_0 \quad (10.30)
 \end{aligned}$$

La (10.30) implica che, nelle combustioni in fase gassosa, si abbia esattamente  $U_i^0 = H_i^0$  quando il numero di moli dei reagenti coincide col numero di moli dei prodotti.

#### Esempio 10.4

Si determini la differenza tra i poteri calorifici inferiori dell'ottano gassoso valutati, rispettivamente, a pressione ed a volume costante.

#### Soluzione

Dalla (10.30) si ha

$$\begin{aligned}
 H_i^0 - U_i^0 &= \frac{1}{m_c} (n_a + n_c - n_f - n_v) \bar{R} T_0 \\
 &= (n_a + n_c - n_f - n_v) \frac{\bar{R} T_0}{n_c M_c} = (n_a^* + 1 - n_f^* - n_v^*) R_c T_0
 \end{aligned}$$

mentre dalle relazioni stechiometriche ricavate nell'Esempio 10.1, si ottiene

$$n_a^* + 1 - n_f^* - n_v^* = (12,5 + 12,5 \cdot 3,76) + 1 - (8 + 12,5 \cdot 3,76) - 9 = -3,5$$

ed

$$R_c T_0 = \frac{8,314}{114} 298,15 = 21,7 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Risulta quindi, complessivamente

$$H_i^0 - U_i^0 = -3,5 \cdot 21,7 = -76,0 \text{ kJ / kg}$$

ovvero una differenza dell'ordine dello 0,17% del potere calorifico inferiore a pressione costante.

## 10.4 TEMPERATURA DEI FUMI

Le temperature d'uscita dei fumi da caldaie e camere di combustione sono ricavate dai bilanci termici, in base ad ipotesi analoghe a quelle poste per la definizione del potere calorifico. Poiché, come si è detto, nella maggioranza dei casi pratici l'acqua nei fumi si trova sotto forma di vapore, l'equazione di bilancio appropriata è la (10.27). Esplicitando tale equazione rispetto alla differenza di temperatura tra i fumi umidi e lo stato di riferimento, si arriva alla relazione

$$t_f - t_0 = \frac{H_i^0 + m_a^* c_{pa}(t_a - t_0) + c_{pc}(t_c - t_0) - |q^-| / \dot{m}_c}{m_{fu}^* c_{pu}} \quad (10.31)$$

È evidente che la massima temperatura dei fumi si ha quando non vi è prelievo di calore perché, in tal caso, l'ultimo termine al numeratore è uguale a zero. Alla temperatura raggiunta dai fumi in assenza di scambio termico, si dà il nome di temperatura di combustione adiabatica  $(t_f)_{ad}$  e, dalla (10.31), si ricava immediatamente

$$(t_f)_{ad} = t_0 + \frac{H_i^0 + m_a^* c_{pa}(t_a - t_0) + c_{pc}(t_c - t_0)}{m_{fu}^* c_{pu}} \quad (10.32)$$

dove, ricordiamo, si è ipotizzato un comportamento ideale per reagenti e prodotti e si è ammessa l'indipendenza dei calori specifici dalla temperatura.

I valori teorici della temperatura adiabatica di combustione per i

combustibili più comuni, bruciati con lieve eccesso d'aria, sono dell'ordine di 1500 - 2000 °C. Nella pratica, però, valori così alti non sono mai raggiunti perché, a temperature molto elevate, i prodotti della combustione tendono a dissociarsi nei loro componenti atomici, assorbendo l'energia necessaria alla dissociazione. Nelle combustioni reali non adiabatiche, che hanno luogo in caldaie e generatori di vapore, tale energia è restituita a temperature più basse durante la successiva riassociazione. In questo modo, non si hanno conseguenze dal punto di vista del bilancio energetico ma, ugualmente, nelle prime fasi della combustione non si raggiungono temperature prossime a quelle della combustione adiabatica teorica.

### Esempio 10.5

Ipotizzando che aria e combustibile entrino a 25 °C, si determini la temperatura d'uscita dei fumi da una caldaia nella quale sono bruciati 0,0005 kg/s di metano, con coefficiente di eccesso d'aria del 10% ed in presenza d'un flusso termico totale uscente di 23 kW.

#### Soluzione

In questo caso si può porre  $c_{pu} = 1,2$  kJ/(kg K) per i fumi umidi ad alta temperatura, mentre si ha  $c_{pa} = 1,006$  kJ/(kg K) e  $c_{pc} = 2,23$  kJ/(kg K) per i reagenti a bassa temperatura. Inoltre risulta

$$m_a^* = (1 + \varepsilon)m_{as}^* = 1,1 \cdot 17,16 = 18,88 \text{ kg}_a / \text{kg}_c$$

e

$$m_{fu}^* = m_a^* + 1 = 19,88 \text{ kg}_f / \text{kg}_c$$

Pertanto, dalla (10.31) si ottiene

$$\begin{aligned} t_f &= t_0 + \frac{H_i^0 + m_a^* c_{pa} (t_a - t_0) + c_{pc} (t_c - t_0) - |q^-| / \dot{m}_c}{m_{fu}^* c_{pu}} \\ &= 25 + \frac{50100 + 0 + 0 - 23 / 0,0005}{19,88 \cdot 1,2} = 197 \text{ °C} \end{aligned}$$

ovvero, una temperatura sufficientemente elevata per quanto riguarda i rischi di condensazione e non troppo elevata per quanto riguarda lo sfruttamento dell'entalpia dei fumi.

### Esempio 10.6

Si determini la temperatura di combustione adiabatica del metano nei tre casi seguenti

- combustione stechiometrica con aria e combustibile entranti a 25 °C,
- coefficiente d'eccesso d'aria del 10%, con aria e combustibile entranti a 5 °C,
- coefficiente d'eccesso d'aria del 400%, con aria e combustibile entranti a 250 °C.

Per semplicità, nei primi due casi si assumano gli stessi valori dei calori specifici utilizzati nell'esempio precedente mentre, nel terzo caso, si assuma un calore specifico dei fumi umidi pari a 1,1 kJ/(kg K).

### Soluzione

In tutti tre i casi, la relazione applicabile è la (10.32). Nel primo caso, in base alla (10.6), si ha

$$\begin{aligned}(t_f)_{ad} &= t_0 + \frac{H_i^0 + m_a^* c_{pa}(t_a - t_0) + c_{pc}(t_c - t_0)}{m_{fu}^* c_{pu}} \\ &= 25 + \frac{50100 + 0 + 0}{18,16 \cdot 1,2} = 2324 \text{ °C}\end{aligned}$$

Nel secondo caso, in base alle relazioni stechiometriche utilizzate nell'esempio precedente, si ottiene

$$(t_f)_{ad} = 25 + \frac{50100 + 18,88 \cdot 1,006(5 - 25) + 2,23(5 - 25)}{19,88 \cdot 1,2} = 2107 \text{ °C}$$

Nel terzo caso, si ha



$$m_a^* = (1 + \varepsilon)m_{as}^* = 5 \cdot 17,16 = 85,8 \text{ kg}_a / \text{kg}_c$$

$$m_{fu}^* = m_a^* + 1 = 86,8 \text{ kg}_f / \text{kg}_c$$

e

$$(t_f)_{ad} = 25 + \frac{50100 + 85,8 \cdot 1,006(250 - 25) + 2,23(250 - 25)}{86,8 \cdot 1,1} = 758 \text{ }^\circ\text{C}$$

Come si vede, la temperatura di combustione adiabatica dipende dalla temperatura d'ingresso dell'aria e del combustibile e dal coefficiente d'eccesso d'aria. Con coefficienti d'eccesso d'aria bassi, la temperatura teorica di combustione adiabatica è molto elevata, anche con aria e combustibile entranti a temperature prossime a quella di riferimento.

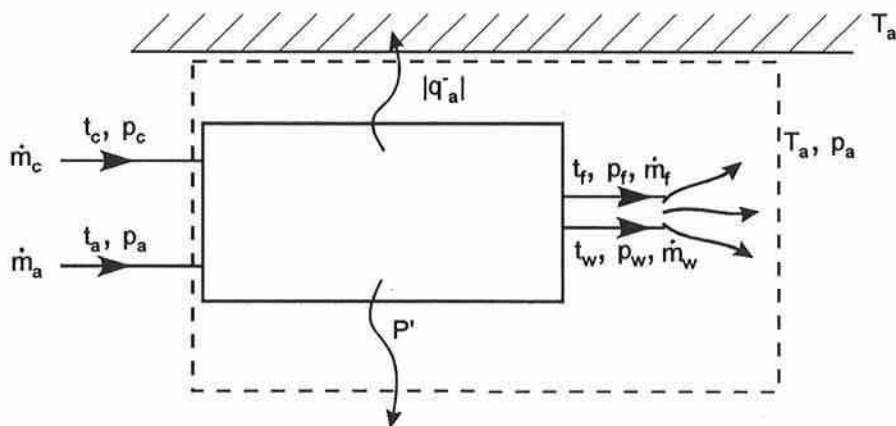
## 10.5 POTERE EXERGETICO DEI COMBUSTIBILI

Per la valutazione del potere exergetico dei combustibili, si fa riferimento ad alcune ipotesi generali ed a un processo di combustione come quello schematizzato in Fig. 10.3. In tale processo, si opera in regime stazionario a pressione costante, e si fa in modo che le variazioni d'energia cinetica e potenziale abbiano un'influenza trascurabile. Ovviamente, in questo caso, si hanno anche scambi di lavoro tecnico utile con l'esterno oltre a scambi termici con l'ambiente. Per estrarre la massima quantità di lavoro possibile dal processo occorre, innanzi tutto, che

- aria e combustibile entrino come tali ed escano come prodotti, sempre alle stesse condizioni, di solito assunte pari a  $t_0 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$  e  $p_0 = 1 \text{ atm}$ .

Nella valutazione del potere exergetico, però, intervengono anche le variazioni di entropia che, come è noto, dipendono dalle pressioni parziali. Pertanto, in questi calcoli non si può prescindere dalle variazioni di concentrazione e quindi, oltre al raggiungimento degli equilibri termico e meccanico, è richiesto anche il raggiungimento dell'equilibrio chimico con l'ambiente. Infatti, come evidenziato in Fig. 10.3, occorre che

- i fumi si miscelino con l'aria esterna prima di uscire dal volume di controllo.



**Figura 10.3** Combustione con scambi di calore e lavoro tecnico utile.

Da un punto di vista pratico, quest'ultima condizione equivale ad imporre un eccesso d'aria infinito nelle combustioni. Da un punto di vista operativo, invece, la dispersione dei fumi all'esterno consente di introdurre un riferimento "naturale" per le concentrazioni d'equilibrio dei gas combusti. Per fissare le idee, si può anche assumere che

- l'acqua proveniente dalla combustione dell'idrogeno esca tutta condensata (ma tale ipotesi non è necessaria in quanto, come vedremo, i poteri exergetici superiore ed inferiore coincidono).

Amnesso che le condizioni sopraelencate siano tutte soddisfatte, dal bilancio di primo principio applicato allo schema di Fig. 10.3, si ha

$$P' = q_a + (\dot{m}_a h_a^0 + \dot{m}_c h_c^0 - \dot{m}_f h_f^0 - \dot{m}_\ell h_\ell^0) \quad (10.33)$$

mentre dal bilancio d'entropia si ottiene

$$\frac{q_a}{T_a} = (\dot{m}_f s_f^0 + \dot{m}_\ell s_\ell^0 - \dot{m}_a s_a^0 - \dot{m}_c s_c^0) - \dot{S}_{irr} \quad (10.34)$$

Nelle Eq. (10.33) e (10.34), entalpie ed entropie sono valutate nello stato di riferimento mentre si è assunto  $\dot{m}_w h_w^0 = \dot{m}_\ell h_\ell^0$  ed  $\dot{m}_w s_w^0 = \dot{m}_\ell s_\ell^0$ . Moltiplicando entrambi i membri della (10.34) per  $T_a$  si ricava

$$q_a = T_a (\dot{m}_f s_f^0 + \dot{m}_\ell s_\ell^0 - \dot{m}_a s_a^0 - \dot{m}_c s_c^0) - T_a \dot{S}_{irr} \quad (10.35)$$

e sommando membro a membro la (10.33) e la (10.35) si ha

$$\begin{aligned} P' &= (\dot{m}_a h_a^0 + \dot{m}_c h_c^0 - \dot{m}_f h_f^0 - \dot{m}_\ell h_\ell^0) \\ &- T_a (\dot{m}_a s_a^0 + \dot{m}_c s_c^0 - \dot{m}_f s_f^0 - \dot{m}_\ell s_\ell^0) - T_a \dot{S}_{irr} \end{aligned} \quad (10.36)$$

Se nella (10.36) si pone  $\dot{S}_{irr} = 0$ , e si dividono entrambi i membri per  $\dot{m}_c$ , si arriva all'espressione della potenza massima che si può ottenere per unità di portata di combustibile, ovvero all'espressione del lavoro tecnico utile massimo che si può ottenere per unità di massa di combustibile

$$\begin{aligned} e_c^0 &= \frac{P'_{\max}}{\dot{m}_c} = \frac{\hat{L}'_{\max}}{m_c} \\ &= (\dot{m}_a^* h_a^0 + h_c^0 - \dot{m}_f^* h_f^0 - \dot{m}_\ell^* h_\ell^0) - T_a (\dot{m}_a^* s_a^0 + s_c^0 - \dot{m}_f^* s_f^0 - \dot{m}_\ell^* s_\ell^0) \\ &= H_s^0 - T_a (\dot{m}_a^* s_a^0 + s_c^0 - \dot{m}_f^* s_f^0 - \dot{m}_\ell^* s_\ell^0) \end{aligned} \quad (10.37)$$

Nelle ipotesi poste  $e_c^0$ , espresso in joule, kilojoule o megajoule per chilogrammo, cioè [J/kg], [kJ/kg] o [MJ/kg], è definito potere energetico del combustibile nello stato di riferimento.

In via teorica, è possibile distinguere tra potere exergetico superiore e potere exergetico inferiore di un combustibile ma, nelle normali condizioni operative, i due valori non sono mai molto diversi tra loro. In particolare, potere exergetico superiore e potere exergetico inferiore coincidono esattamente tutte le volte che la temperatura ambiente  $t_a$ , utilizzata nelle analisi

exergetiche, coincide con la temperatura di riferimento  $t_0$ . Per dimostrare tale asserzione si può osservare, innanzi tutto, che lo stato dell'acqua dopo la combustione influenza solamente i termini della (10.37) relativi alle valutazioni del potere calorifico e dell'entropia del liquido. Ai fini che qui interessano, tali termini possono essere scritti nella forma

$$\begin{aligned} H_s^0 + T_a m_\ell^* s_\ell^0 &= (H_s^0 - m_v^* r_0) + m_v^* r_0 + T_a m_\ell^* s_\ell^0 \\ &= H_i^0 + T_a m_v^* \left( s_\ell^0 + \frac{r_0}{T_a} \right) \cong H_i^0 + T_a m_v^* s_v^0 \end{aligned} \quad (10.38)$$

dimostrando così che, per  $T_a \cong T_0$ , il valore dell'exergia non dipende dallo stato dell'acqua nei prodotti della combustione. Con ragionamenti analoghi si potrebbe dimostrare che il potere exergetico dei combustibili non varia con lo stato, liquido o gassoso, del combustibile, almeno per temperature ambiente non troppo diverse dalla temperatura di riferimento.

A conclusione del paragrafo, si può anche osservare che numerose valutazioni sperimentali, e considerazioni teoriche simili a quelle illustrate in precedenza, evidenziano come i poteri exergetici, analogamente ai poteri calorifici, risultino praticamente indipendenti dalla temperatura e dal tipo di combustione (a pressione od a volume costante).

### 10.5.1 Valutazione del Potere Exergetico dei Combustibili

Nella valutazione dei poteri exergetici dei combustibili, sorge la difficoltà di tenere conto della variazione di composizione chimica tra reagenti e prodotti. Nella valutazione dei contributi entalpici tale difficoltà è stata aggirata utilizzando la definizione operativa di potere calorifico e contando sul fatto che le entalpie dei prodotti della combustione non dipendono dalle pressioni parziali (e quindi non risentono dell'eventuale mescolamento con l'aria ambiente). I contributi entropici, invece, dipendono sempre dalle pressioni par-

ziali, e ciò costringe ad utilizzare riferimenti assoluti per le entropie. Si potrebbe dimostrare che, in base al terzo principio della termodinamica, le entropie assolute delle sostanze d'interesse tecnico sono uguali a zero a 0 K. Fortunatamente, però, non occorre calcolare le entropie assolute  $s^0(t_0, p)$  partendo dalle definizioni fondamentali, in quanto i valori di  $s(t_0, p_0)$ , a  $t_0 = 25\text{ }^\circ\text{C}$  e  $p_0 = 1\text{ atm}$ , sono disponibili in letteratura, sotto forma di tabelle del tipo della Tabella 10.2.

**Tabella 10.2** Entropia assoluta di alcune sostanze valutata a  $25\text{ }^\circ\text{C}$  ed alla pressione atmosferica normale.

SOSTANZA	$s(t_0, p_0)$ [kJ / (kg K)]
Carbonio (C grafite)	0,474
Idrogeno (H <sub>2</sub> gas)	65,33
Metano (CH <sub>4</sub> gas)	11,642
Benzina (ottano C <sub>8</sub> H <sub>18</sub> liquido)	3,163
Gasolio (C <sub>14,4</sub> H <sub>24,9</sub> liquido)	2,656
Ossigeno (O <sub>2</sub> gas)	6,474
Anidride carbonica (CO <sub>2</sub> gas)	4,860
Acqua (H <sub>2</sub> O liquida)	3,888

I valori tabulati costituiscono degli ottimi punti di partenza per la valutazione delle entropie a pressioni parziali diverse dalla pressione atmosferica. Infatti, se la pressione parziale è diversa da quella atmosferica, ma la temperatura resta costante, si può far riferimento alla relazione termodinamica valida per i gas ideali

$$s^0(t_0, p) - s(t_0, p_0) = -R \ln \frac{p}{p_0} \quad (10.39)$$

dove

$$\frac{p}{p_0} = \frac{V}{V_0} = \frac{n}{n_0} \quad (10.40)$$

è la frazione molare del gas considerato, valutata nell'aria esterna a  $t_0 = 25 \text{ °C}$  e  $p_0 = 1 \text{ atm}$ .

In realtà ci si può facilmente convincere che, nell'Eq. (10.37), basterà considerare combustibile ed ossigeno all'entrata ed anidride carbonica ed acqua liquida all'uscita. Infatti, nelle ipotesi poste per la valutazione di  $e_c^0$  gli altri gas, rappresentati dal solo azoto nell'aria standard, escono inalterati alla stessa temperatura  $t_0$  ed alla stessa pressione parziale che avevano all'entrata. Per i gas da considerare si ha

$$\frac{n_{\text{O}_2}}{n_0} = \frac{V_{\text{O}_2}}{V_0} = \frac{p_{\text{O}_2}}{p_0} = 0,21 \quad (10.41)$$

e

$$\frac{n_{\text{CO}_2}}{n_0} = \frac{V_{\text{CO}_2}}{V_0} = \frac{p_{\text{CO}_2}}{p_0} = 0,0003 \quad (10.42)$$

mentre, per semplicità ed in base alla (10.37), conviene fare riferimento allo stato liquido dell'acqua prodotta dalla combustione. Dalle relazioni (10.39) - (10.42) e dalla Tabella 10.2, si ha allora

$$\begin{aligned} s_{\text{O}_2}^0(t_0, p) &= s_{\text{O}_2}(t_0, p_0) - R_{\text{O}_2} \ln \frac{p_{\text{O}_2}}{p_0} \\ &= 6,474 - \frac{8,314}{32} \ln 0,21 = 6,879 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \end{aligned} \quad (10.43)$$

ed

$$\begin{aligned} s_{\text{CO}_2}^0(t_0, p) &= s_{\text{CO}_2}(t_0, p_0) - R_{\text{CO}_2} \ln \frac{p_{\text{CO}_2}}{p_0} \\ &= 4,860 - \frac{8,314}{44} \ln 0,0003 = 6,393 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \end{aligned} \quad (10.44)$$

mentre, per l'entropia dell'acqua liquida, si può fare riferimento direttamente al valore tabulato, in quanto l'entropia dei liquidi non dipende dalla

pressione.

Procedendo nel modo indicato possono essere determinati i poteri exergetici dei combustibili riportati nella Tabella 10.3.

**Tabella 10.3** Potere exergetico di alcuni combustibili, valutato a 25 °C ed alla pressione atmosferica normale.

COMBUSTIBILE	$e_c^0$ [MJ / kg]
Carbonio	32,2
Idrogeno	117,6
Metano	51,7
Benzina	47,4
Gasolio	45,2

Come si può vedere dal confronto tra i valori riportati nelle Tabelle 10.1 e 10.3, i poteri exergetici sono compresi, di solito, tra i poteri calorifici superiori ed i poteri calorifici inferiori. Di conseguenza nei calcoli tecnici, i poteri exergetici sono assunti, quasi sempre, uguali ai poteri calorifici inferiori. In questo modo, come vedremo nel prossimo paragrafo, si evita di giungere a valori numerici diversi per i rendimenti di primo e di secondo principio degli impianti motori termici.

### Esempio 10.7

Si valuti il potere exergetico del metano alla temperatura di 25 °C ed alla pressione di 101,325 kPa.

#### Soluzione

Nel caso del metano, si può fare riferimento al valore  $H_s^0 = 55533$  kJ/kg del potere calorifico superiore, più accurato di quello (arrotondato) di cui alla Tabella 10.1, mentre per la combustione stechiometrica si può fare riferimento alla relazione



Nella (10.37) si considera il potere calorifico superiore e quindi l'acqua si trova allo stato liquido nei prodotti della combustione. Pertanto, in base alla Tabella 10.2 si ha

$$s_{\text{H}_2\text{O}}^0(t_0, p) = s_{\text{H}_2\text{O}}(t_0, p_0) = 3,888 \text{ kJ / (kg K)}$$

Il metano arriva al bruciatore a pressione atmosferica e quindi, dalla Tabella 10.2, si ottiene direttamente

$$s_{\text{CH}_4}^0(t_0, p) = s_{\text{CH}_4}(t_0, p_0) = 11,642 \text{ kJ / (kg K)}$$

Di conseguenza, utilizzando i valori delle entropie dell'ossigeno e dell'anidride carbonica, calcolati nelle (10.43) e (10.44), si ottiene

$$\begin{aligned} e_{\text{CH}_4}^0 &= H_s^0 - T_a \left( m_{\text{O}_2}^* s_{\text{O}_2}^0 + s_{\text{CH}_4}^0 - m_{\text{CO}_2}^* s_{\text{CO}_2}^0 - m_{\text{H}_2\text{O}}^* s_{\text{H}_2\text{O}}^0 \right) \\ &= 55533 - 298,15 \left( \frac{64}{16} \cdot 6,879 + 11,642 - \frac{44}{16} \cdot 6,393 - \frac{36}{16} \cdot 3,888 \right) \\ &= 51708 \text{ kJ / kg} \end{aligned}$$

I calcoli relativi al metano possono essere ripetuti per altri combustibili d'interesse tecnico per i quali sia nota la composizione, determinandone così i rispettivi poteri exergetici.

## 10.6 RENDIMENTI DEI PROCESSI DI COMBUSTIONE

I processi di combustione più comuni sono quelli che si svolgono in caldaie, generatori di vapore e camere di combustione a servizio di impianti termici di riscaldamento e impianti motori. Per tali processi si possono definire ren-



dimenti di primo e di secondo principio, procedendo come nel Paragrafo 9.5. Al solito, i rendimenti di conversione, o di primo principio, sono definiti partendo dai bilanci d'energia, mentre i rendimenti exergetici, o di secondo principio, sono definiti partendo dai bilanci d'energia utilizzabile.

Come si è già osservato, i rendimenti di primo principio sono espressi mediante relazioni del tipo

$$\eta = \frac{\text{energia ottenuta}}{\text{energia fornita}} = 1 - \frac{\text{perdite di energia}}{\text{energia fornita}} \quad (10.45)$$

dove i termini sono presi in valore assoluto. Generalmente, nel caso dei processi di combustione a servizio degli impianti termici di riscaldamento e degli impianti termici motori, per energia "fornita" s'intendono

- il flusso d'energia associato al potere calorifico inferiore dei combustibili, e
- le potenze tecniche utili negative, prese in valore assoluto.

Simmetricamente, per energia "ottenuta" s'intendono

- i flussi termici negativi, presi in valore assoluto,
- le potenze tecniche utili positive, e
- le differenze positive tra i flussi uscenti ed entranti d'entalpia.

Le variazioni d'energia potenziale ed energia cinetica hanno generalmente influenza trascurabile sui bilanci di energia, mentre le perdite sono pari, evidentemente, alla differenza tra quanto si fornisce e quanto si ottiene e si identificano con i flussi d'energia dispersi nell'ambiente. Ovviamente considerazioni analoghe, non ripetute per brevità, possono essere riferite ai bilanci d'energia espressi in termini di quantità di calore, lavori tecnici utili ed entalpie.

Come si è già osservato, i rendimenti di secondo principio sono espressi mediante relazioni del tipo

$$\eta_{II} = \frac{\text{exergia ottenuta}}{\text{exergia fornita}} = 1 - \frac{\text{perdite di exergia}}{\text{exergia fornita}} \quad (10.46)$$

dove i termini sono presi in valore assoluto. Di solito, nel caso dei processi di combustione a servizio degli impianti termici di riscaldamento e degli impianti termici motori, per exergia "fornita" s'intendono

- il flusso d'exergia associato al potere exergetico dei combustibili, e
- le potenze tecniche utili negative, prese in valore assoluto.

Simmetricamente, per exergia "ottenuta" s'intendono

- i flussi exergetici negativi, presi in valore assoluto, associati ai flussi termici utili,
- le potenze tecniche utili positive, e
- le differenze positive tra i flussi uscenti ed entranti d'exergia.

Le variazioni d'energia potenziale ed energia cinetica hanno generalmente influenza trascurabile sui bilanci d'exergia, mentre le perdite sono pari, evidentemente, alla differenza tra quanto si fornisce e quanto si ottiene e s'identificano con le distruzioni d'exergia dovute alle irreversibilità. Ovviamente considerazioni analoghe, non ripetute per brevità, possono essere riferite ai bilanci di quantità d'exergia.

## 10.7 RENDIMENTI DI CALDAIE E GENERATORI DI VAPORE

Per i processi di combustione che si svolgono nelle caldaie e nei generatori di vapore, lo schema di riferimento è quello della Fig. 10.4 nel quale i confini del sistema sono posti a valle del camino, nell'atmosfera, dove si ha una situazione d'equilibrio termodinamico con l'ambiente. Inoltre, nella maggior parte dei casi pratici si ha  $t_a = t_c$  in quanto non si effettua un preriscaldamento esterno del combustibile. Nell'ipotesi ulteriore che l'acqua nei fumi all'uscita si trovi allo stato di vapore, dal primo principio si ottiene

$$\dot{q}_u^- + \dot{q}_a^- + \dot{q}_{fa}^- + \dot{m}_a h_a + \dot{m}_c h_c = P_v^- + \dot{m}_{fu} h_{fu} \quad (10.47)$$

e quindi, passando ai valori assoluti e tenendo conto della definizione di

potere calorifico inferiore, risulta

$$\begin{aligned}
 |q_u^-| + |q_a^-| + |q_{fa}^-| &= \dot{m}_a h_a + \dot{m}_c h_c - \dot{m}_{fu} h_{fu} + |P_v^-| \\
 &= \dot{m}_c H_i^0 + (\dot{m}_a c_{pa} + \dot{m}_c c_{pc} - \dot{m}_{fu} c_{pu}) (t_a - t_0) + |P_v^-| \\
 &= \dot{m}_c H_i(t_a) + |P_v^-|
 \end{aligned}
 \tag{10.48}$$

in quanto aria e combustibile entrano, ed i fumi escono, a temperatura ambiente. Nella (10.48)

$$|q_u^-| = \dot{m}_w (h_{wu} - h_{we})
 \tag{10.49}$$

è il flusso termico utile scambiato, ad esempio, con l'acqua dell'impianto termico

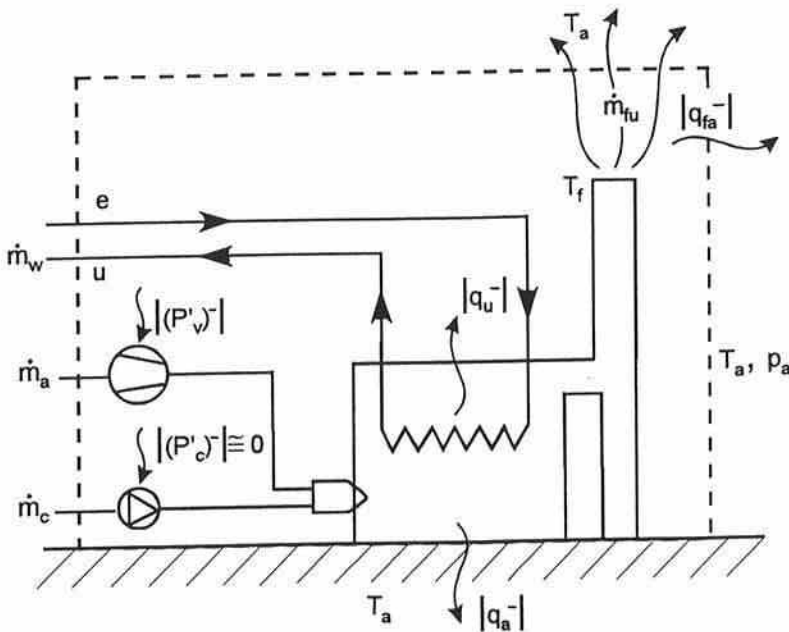


Figura 10.4 Schema d'appoggio per l'analisi di caldaie o generatori di vapore.

$$|\dot{q}_{fa}^-| = \dot{m}_{fu} c_{pu} (t_f - t_a) \quad (10.50)$$

con  $t_f$  temperatura di uscita dai fumi dalla caldaia, è il flusso termico disperso dai fumi verso l'ambiente,  $|\dot{q}_a^-|$  è il flusso termico disperso dalla caldaia verso l'ambiente per convezione ed irraggiamento,  $H_i(t_a)$  è il potere calorifico inferiore del combustibile alla temperatura  $t_a$  e  $|P_v^-|$  rappresenta la potenza meccanica consumata dagli ausiliari, praticamente coincidente con la potenza del ventilatore. In base allo schema di Fig. 10.4 ed alla definizione (10.45), il rendimento di conversione, o di primo principio, di una caldaia o di un generatore di vapore può essere scritto nella forma

$$\eta = \frac{\text{energia ottenuta}}{\text{energia fornita}} = \frac{|\dot{q}_u^-|}{\dot{m}_c H_i + |P_v^-|} = \frac{\dot{m}_w (h_{wu} - h_{we})}{\dot{m}_c H_i + |P_v^-|} \quad (10.51)$$

Nella pratica, tuttavia, è utilizzata anche la definizione alternativa equivalente

$$\eta = 1 - \frac{\text{perdite di energia}}{\text{energia fornita}} = 1 - \frac{|\dot{q}_a^-| + |\dot{q}_{fa}^-|}{\dot{m}_c H_i + |P_v^-|} \quad (10.52)$$

in quanto, spesso, è più semplice valutare le perdite piuttosto che il flusso termico utile.

In base allo schema di Fig. 10.4, ed in armonia alla (10.51) ed alla definizione generale (10.46), il rendimento di secondo principio di una caldaia o di un generatore di vapore può essere scritto nella forma

$$\eta_{II} = \frac{\text{exergia ottenuta}}{\text{exergia fornita}} = \frac{\dot{m}_w (e_{wu} - e_{we})}{\dot{m}_c e_c + |P_v^-|} \quad (10.53)$$

dove  $e_c$  è il potere exergetico del combustibile e  $|P_v^-|$  rappresenta la potenza meccanica consumata dagli ausiliari, praticamente coincidente con la potenza del ventilatore. Dall'esame comparato delle (10.51) e (10.53) si vede co-

me il rendimento di secondo principio tenga conto della degradazione dell'energia dovuta alle irreversibilità in quanto, al numeratore, compaiono le differenze d'energia utilizzabile e non semplici differenze d'entalpia

### Esempio 10.8

Si determinino i rendimenti di primo e di secondo principio di una caldaia a gasolio che opera con un rapporto, in massa, tra aria e combustibile pari a 16, quando aria e combustibile entrano a 25 °C mentre i fumi escono a 200 °C. Si assuma che

- il flusso termico disperso dalla caldaia verso l'ambiente sia pari al 10% del flusso termico disperso dai fumi,
- si possa trascurare la potenza della pompa del combustibile,
- il ventilatore assorba 100 chilojoule per chilogrammo di gasolio e
- il calore specifico medio dei fumi umidi sia pari a 1,2 kJ/(kg K).

Nella valutazione del rendimento di secondo principio, si assuma inoltre che

- il potere exergetico del combustibile coincida con il potere calorifico inferiore,
- il flusso termico utile sia impiegato per riscaldare acqua di processo dalla temperatura di 60 °C alla temperatura di 80 °C e
- la temperatura ambiente sia pari a 298 K.

### Soluzione

In base alle assunzioni fatte, essendo  $t_a \cong t_0$ , si ha

$$\begin{aligned} \frac{|q_{fa}^-|}{\dot{m}_c} &= m_{fu}^* c_{pu} (t_f - t_0) = (m_a^* + 1) c_{pu} (t_f - t_0) \\ &= (16 + 1) 1,2 (200 - 25) = 3570 \text{ kJ / kg}_c \end{aligned}$$

e

$$\frac{|q_a^-|}{\dot{m}_c} = 0,1 \frac{|q_{fa}^-|}{\dot{m}_c} = 0,1 \cdot 3570 = 357 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}_c}$$

Pertanto, dalla (10.48), si ricava

$$\frac{|q_u^-|}{\dot{m}_c} = H_i + \frac{|P_v^-|}{\dot{m}_c} - \frac{|q_a^-|}{\dot{m}_c} - \frac{|q_{fa}^-|}{\dot{m}_c} = 42900 + 100 - 357 - 3570 = 39073 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}_c}$$

e quindi il rendimento di primo principio è pari a

$$\eta = \frac{|q_u^-|}{\dot{m}_c H_i + |P_v^-|} = \frac{|q_u^-| / \dot{m}_c}{H_i + |P_v^-| / \dot{m}_c} = \frac{39073}{42900 + 100} = 0,91$$

Ovviamente, si sarebbe giunti allo stesso risultato anche partendo dalla definizione alternativa (10.52).

Dal bilancio termico sull'acqua di processo si ha

$$m_w^* = \frac{\dot{m}_w}{\dot{m}_c} = \frac{|q_u^-| / \dot{m}_c}{(h_{wu} - h_{we})} = \frac{|q_u^-| / \dot{m}_c}{c_w (t_{wu} - t_{we})} = \frac{39073}{4,187(80 - 60)} = 467 \frac{\text{kg}_w}{\text{kg}_c}$$

mentre dalle definizioni risulta

$$\begin{aligned} e_{wu} - e_{we} &= c_w \left[ (t_{wu} - t_{we}) - T_a \ln \frac{T_{wu}}{T_{we}} \right] \\ &= 4,187 [(80 - 60) - 298 \ln(353,15 / 333,15)] = 11,0 \text{ kJ / kg} \end{aligned}$$

Pertanto, in base alla (10.53), il rendimento di secondo principio è pari a

$$\eta_{II} = \frac{\dot{m}_w (e_{wu} - e_{we})}{\dot{m}_c e_c + |P_v^-|} = \frac{m_w^* (e_{wu} - e_{we})}{H_i + |P_v^-| / \dot{m}_c} = \frac{467 \cdot 11,0}{42900 + 100} = 0,12$$

Come si vede, l'analisi di secondo principio conduce ad una valutazione molto più realistica del vero "rendimento" d'una normale caldaia.

## 10.8 RENDIMENTI DELLE CAMERE DI COMBUSTIONE

Nelle camere di combustione delle turbine a gas, l'effetto utile è dato dalla fornitura d'energia allo stesso fluido che partecipa alla combustione. Infatti, il lavoro tecnico utile si ottiene espandendo nella turbina i fumi all'uscita dalla camera di combustione. In base allo schema di Fig. 10.5 ed al bilancio di primo principio si può scrivere

$$\dot{q}_a^- + \dot{m}_a h_{ae} + \dot{m}_c h_c = \dot{m}_{fu} h_{fu} \quad (10.54)$$

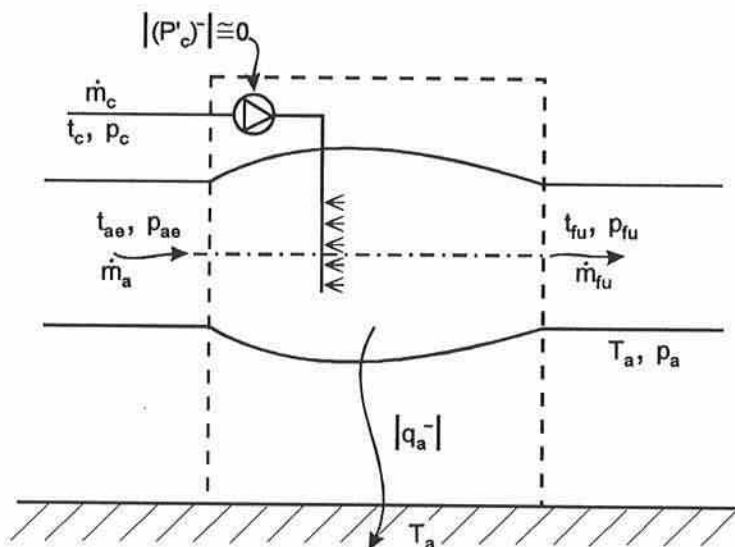
dove il pedice *ae* indica l'aria all'entrata della camera di combustione, che si trova in condizioni diverse dall'aria nell'ambiente. Passando ai valori assoluti e tenendo conto della definizione di potere calorifico inferiore, si ha

$$\begin{aligned} |\dot{q}_a^-| &= \dot{m}_a h_{ae} + \dot{m}_c h_c - \dot{m}_{fu} h_{fu} \\ &= \dot{m}_c H_i^0 + \dot{m}_a c_{pa} (t_{ae} - t_0) + \dot{m}_c c_{pc} (t_c - t_0) - \dot{m}_{fu} c_{pu} (t_f - t_0) \Rightarrow \\ |\dot{q}_a^-| + [\dot{m}_{fu} c_{pu} (t_f - t_0) - \dot{m}_a c_{pa} (t_{ae} - t_0) - \dot{m}_c c_{pc} (t_c - t_0)] &= \dot{m}_c H_i^0 \quad (10.55) \end{aligned}$$

dove  $|\dot{q}_a^-|$  è il flusso termico disperso verso l'ambiente, per irraggiamento e convezione, e dove compare il potere calorifico inferiore in quanto il calore latente dei fumi non è sfruttato dalle apparecchiature a valle.

In base allo schema di Fig. 10.5 ed alla definizione (10.45), il rendimento di conversione, o di primo principio, di una camera di combustione può essere scritto nella forma

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\dot{m}_{fu} c_{pu} (t_f - t_0) - \dot{m}_a c_{pa} (t_{ae} - t_0) - \dot{m}_c c_{pc} (t_c - t_0)}{\dot{m}_c H_i^0} \\ &= \frac{m_{fu}^* c_{pu} (t_f - t_0) - m_a^* c_{pa} (t_{ae} - t_0) - c_{pc} (t_c - t_0)}{H_i^0} \quad (10.56) \end{aligned}$$



**Figura 10.5** Schema d'appoggio per l'analisi di una camera di combustione.

Nella pratica, tuttavia, è utilizzata anche la definizione alternativa equivalente

$$\eta = 1 - \frac{|q_a^-|}{\dot{m}_c H_i^0} \quad (10.57)$$

in quanto, spesso, è più semplice valutare le perdite piuttosto che il flusso termico utile.

In base allo schema di Fig. 10.5, ed in armonia alla (10.56) ed alla definizione generale (10.46), il rendimento di secondo principio di una camera di combustione può essere scritto nella forma

$$\begin{aligned} \eta_{II} &= \frac{\dot{m}_{fu}(e_{fu} - e_{fu}^0) - \dot{m}_a(e_{ae} - e_a^0) - \dot{m}_c(e_c - e_c^0)}{\dot{m}_c e_c^0} \\ &= \frac{m_{fu}^*(e_{fu} - e_{fu}^0) - m_a^*(e_{ae} - e_a^0) - c_{pc}(e_c - e_c^0)}{e_c^0} \end{aligned} \quad (10.58)$$



Dall'esame comparato delle (10.56) e (10.58) si vede come il rendimento di secondo principio tenga conto della degradazione dell'energia dovuta alle irreversibilità in quanto, al numeratore, compaiono le differenze d'energia utilizzabile tra prodotti e reagenti, e non semplici differenze d'entalpia. Infine vale la pena notare che, in genere, le perdite termiche verso l'ambiente sono modeste rispetto al flusso d'energia associato al potere calorifico del combustibile e, di conseguenza, il rendimento di primo principio non fornisce informazioni significative, essendo sempre prossimo all'unità.

### Esempio 10.9

Nella camera di combustione di una turbina a gas ha luogo una combustione adiabatica. L'aria entra alla pressione di 10 atm ed alla temperatura di 573 K, mentre il combustibile liquido (cherosene) arriva alla temperatura di 25 °C. All'uscita, i fumi hanno una temperatura di 1273 K ed una pressione di 9,5 atm. Si calcoli il rendimento exergetico assumendo un calore specifico medio dell'aria pari a 1,006 kJ/(kg K), un calore specifico medio dei fumi umidi pari a 1,1 kJ/(kg K), un rapporto  $k$  tra i calori specifici pari a 1,4 sia per i fumi sia per l'aria, una temperatura ambiente di 298 K ed un potere exergetico del combustibile uguale al potere calorifico inferiore.

### Soluzione

Se la camera di combustione è adiabatica, il rendimento di primo principio è uguale ad uno. Tuttavia, il bilancio energetico (10.55) può essere utilizzato per ricavare il rapporto tra aria e combustibile. Infatti, posto  $t_a \cong t_0$ , dividendo la (10.55) per la portata di combustibile si ottiene la relazione

$$\frac{|q_a^-|}{\dot{m}_c} + \left[ m_{fu}^* c_{pu} (t_f - t_0) - m_a^* c_{pa} (t_{ae} - t_0) - c_{pc} (t_c - t_0) \right] = H_i^0$$

nella quale sono uguali a zero il primo termine al primo membro e l'ultimo termine entro parentesi quadre, mentre si ha

$$m_{fu}^* = m_a^* + 1$$

Quindi il rapporto tra aria e combustibile è pari a

$$\begin{aligned} m_a^* &= \frac{H_i^0 - c_{pu}(t_f - t_0)}{c_{pu}(t_f - t_0) - c_{pa}(t_{ae} - t_0)} \\ &= \frac{43500 - 1,1(1000 - 25)}{1,1(1000 - 25) - 1,006(300 - 25)} = 53,3 \frac{\text{kg}_a}{\text{kg}_c} \end{aligned}$$

Dalle definizioni si ottiene poi

$$\begin{aligned} e_{fu} - e_{fu}^0 &= c_{pu}(t_f - t_0) - c_{pu} T_a \left[ \ln\left(\frac{T_f}{T_0}\right) - \frac{k-1}{k} \ln\left(\frac{p_f}{p_0}\right) \right] \\ &= 1,1(1000 - 25) - 1,1 \cdot 298 \left[ \ln\left(\frac{1273}{298}\right) - \frac{0,4}{1,4} \ln 9,5 \right] = 807,3 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} e_{ae} - e_a^0 &= c_{pa}(t_{ae} - t_0) - c_{pa} T_a \left[ \ln\left(\frac{T_{ae}}{T_0}\right) - \frac{k-1}{k} \ln\left(\frac{p_f}{p_0}\right) \right] \\ &= 1,006(300 - 25) - 1,006 \cdot 298 \left[ \ln\left(\frac{573}{298}\right) - \frac{0,4}{1,4} \ln 10 \right] = 277,9 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \end{aligned}$$

Pertanto, in base alla (10.58), il rendimento di secondo principio è pari a

$$\begin{aligned} \eta_{II} &= \frac{m_{fu}^*(e_{fu} - e_{fu}^0) - m_a^*(e_{ae} - e_a^0) - c_{pc}(e_c - e_c^0)}{e_c^0} \\ &= \frac{54,3 \cdot 807,3 - 53,3 \cdot 277,9 - 0}{43500} = 0,67 \end{aligned}$$

Come si vede, il rendimento di secondo principio delle camere di combustione è molto maggiore del rendimento corrispondente delle caldaie, in quanto la fornitura di calore avviene a temperature molto più elevate.

## 10.9 RENDIMENTI DEGLI IMPIANTI TERMICI MOTORI

Lo schema di riferimento per i processi di combustione che si svolgono negli impianti motori è quello di Fig. 10.6, nella quale i confini del sistema sono posti a valle dello scarico, nell'atmosfera, dove si ha una situazione d'equilibrio termodinamico con l'ambiente. Inoltre, nella maggior parte dei casi pratici, si può assumere  $t_c = t_a$ , in quanto non si effettua un preriscaldamento esterno del combustibile. Nell'ipotesi ulteriore che l'acqua nei fumi all'uscita si trovi allo stato di vapore, dal primo principio si ottiene

$$\bar{q}_a^- + \bar{q}_{fa}^- + \dot{m}_a h_a + \dot{m}_c h_c = \dot{m}_{fu} h_{fu} + P_n^+ \quad (10.59)$$

e quindi, passando ai valori assoluti e tenendo conto della definizione di potere calorifico inferiore, risulta

$$\begin{aligned} P_n^+ + |\bar{q}_a^-| + |\bar{q}_{fa}^-| &= \dot{m}_a h_a + \dot{m}_c h_c - \dot{m}_{fu} h_{fu} \\ &= \dot{m}_c H_i^0 + (\dot{m}_a c_{pa} + \dot{m}_c c_{pc} - \dot{m}_{fu} c_{pu})(t_a - t_0) = \dot{m}_c H_i(t_a) \end{aligned} \quad (10.60)$$

in quanto aria e combustibile entrano, ed i fumi escono, a temperatura ambiente. Nella (10.60), come nella (10.50)

$$|\bar{q}_{fa}^-| = \dot{m}_{fu} c_{pu}(t_f - t_a)$$

con  $t_f$  temperatura di uscita dei fumi dal motore, è il flusso termico di-

perso dai fumi verso l'ambiente,  $|q_a^-|$  è il flusso termico disperso dal motore verso l'ambiente per convezione e irraggiamento,  $H_i(t_a)$  è il potere calorifico inferiore del combustibile alla temperatura  $t_a$  e  $P_n^+$  rappresenta la potenza meccanica netta ottenuta. In base allo schema di Fig. 10.6 ed alla definizione (10.45), il rendimento di conversione, o di primo principio, dell'impianto può essere scritto nella forma

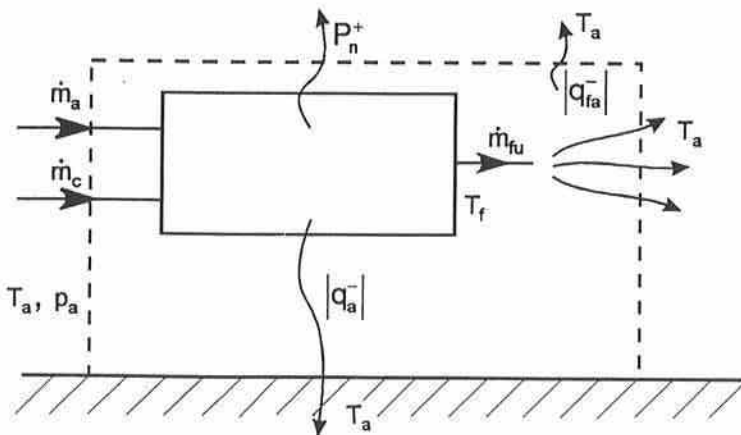
$$\eta_{imp} = \frac{\text{energia ottenuta}}{\text{energia fornita}} = \frac{P_n^+}{\dot{m}_c H_i} \quad (10.61)$$

in quanto il flusso energetico ottenuto coincide con la potenza netta meccanica, mentre il flusso energetico fornito è dato da  $\dot{m}_c H_i$ .

Nella pratica, tuttavia, può essere utilizzata anche la definizione alternativa equivalente

$$\eta_{imp} = 1 - \frac{\text{perdite di energia}}{\text{energia fornita}} = 1 - \frac{|q_a^-| + |q_{fa}^-|}{\dot{m}_c H_i} \quad (10.62)$$

formalmente uguale alla (10.52), che implica la valutazione delle perdite invece della potenza netta.



**Figura 10.6** Schema d'appoggio per l'analisi di un impianto termico motore.

In base allo schema di Fig. 10.6, ed in armonia alla (10.61) ed alla definizione generale (10.46), il rendimento di secondo principio dell'impianto può essere scritto nella forma

$$(\eta_{II})_{imp} = \frac{\text{exergia ottenuta}}{\text{exergia fornita}} = \frac{P_n^+}{\dot{m}_c e_c} \quad (10.63)$$

in quanto il flusso exergetico ottenuto coincide con la potenza netta meccanica, mentre il flusso exergetico fornito è dato da  $\dot{m}_c e_c$ .

Dall'esame comparato delle (10.61) e (10.63), risulta quindi che i rendimenti di primo e di secondo principio degli impianti termici motori a combustione coincidono se si assume

$$H_i \cong e_c \quad (10.64)$$

Come si è era già osservato, l'ipotesi (10.64) è quasi sempre adottata nei calcoli tecnici.

### Esempio 10.10

Una centrale termoelettrica brucia 18,6 kg/s d'olio combustibile, mentre fornisce 320 MW di potenza netta. Si vogliono determinare i rendimenti di primo e di secondo principio dell'impianto, assumendo che potere exergetico e potere calorifico inferiore del combustibile coincidano.

#### Soluzione

In base alle ipotesi, si ottiene

$$\eta_{imp} = (\eta_{II})_{imp} = \frac{P_n^+}{\dot{m}_c e_c} = \frac{P_n^+}{\dot{m}_c H_i} = \frac{320}{18,6 \cdot 41,1} = 0,42$$

cioè un valore abbastanza rappresentativo delle condizioni operative per impianti di questo tipo.

## 10.10 CONCLUSIONI

In questo capitolo sono state prese in esame le reazioni chimiche di combustione, sia come possibili sorgenti di calore sia come fonti di lavoro meccanico. In base a questi due diversi punti di vista sono stati definiti, rispettivamente, i poteri calorifici ed il potere exergetico dei combustibili. Infine, partendo dalle equazioni di bilancio dell'energia e dell'exergia, sono stati espressi i rendimenti di primo e di secondo principio di caldaie, generatori di vapore, camere di combustione ed impianti termici motori.

---

# CAPITOLO 11

## CICLI DIRETTI A GAS

---

### 11.1 GENERALITÀ

I cicli diretti a gas costituiscono il riferimento termodinamico per la schematizzazione degli impianti termici che producono potenza meccanica utilizzando un gas come fluido di lavoro. Gli impianti di questo tipo sono definiti a circuito chiuso, od aperto, a seconda che non presentino od, al contrario, presentino fasi d'immissione ed espulsione del fluido operativo. Nei circuiti chiusi può essere utilizzato qualunque gas, purché sia caratterizzato da proprietà opportune come bassa reattività chimica, alto calore specifico ed elevata conduttività termica. Nei circuiti aperti, invece, è sempre utilizzata l'aria per consentire la fornitura di calore attraverso un processo di combustione interno all'impianto. In quest'ultimo caso i prodotti della combustione sono scaricati all'esterno, mentre nuova aria viene aspirata dall'atmosfera.

A rigore, quando il fluido di lavoro non ritorna allo stato iniziale dopo una serie di trasformazioni, non si potrebbe parlare di "ciclo". Questa difficoltà concettuale, tuttavia, si supera facendo riferimento a "cicli ad aria standard", nei quali:

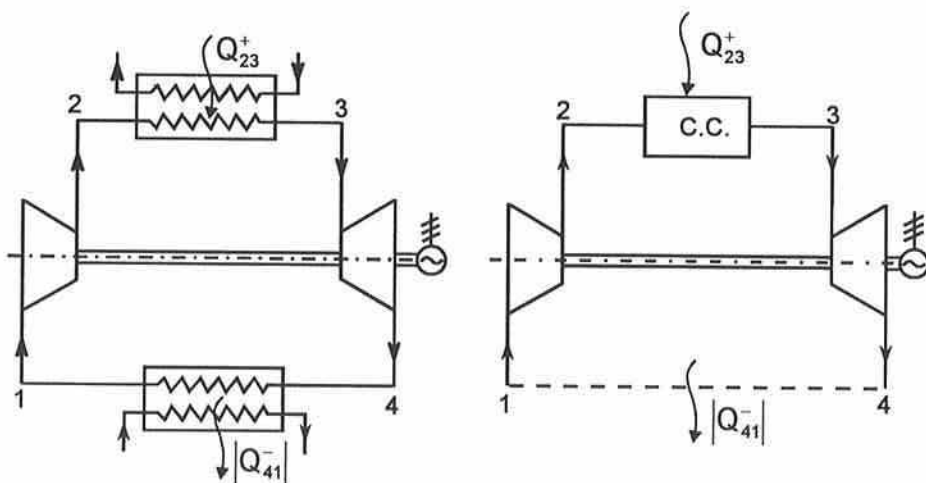
- le proprietà termodinamiche del fluido di lavoro sono assimilate a quelle dell'aria che, a sua volta, è considerata un gas ideale con calori specifici costanti;
- i processi di combustione sono sostituiti da equivalenti forniture di calore dall'esterno, a volume od a pressione costante;
- i processi d'immissione del fluido di lavoro sono ignorati, mentre i pro-

cessi d'espulsione sono sostituiti da cessioni di calore all'esterno, ancora a volume od a pressione costante.

I risultati quantitativi ottenuti in questo modo non sono completamente applicabili ai cicli reali, ma consentono ugualmente di valutare l'influenza delle principali condizioni operative sulla produzione di lavoro e sul rendimento.

## 11.2 CICLO JOULE

Il ciclo Joule, talvolta chiamato anche ciclo di Brayton-Joule, costituisce il riferimento termodinamico per lo studio dei turbomotori a gas più semplici, schematizzati in Fig. 11.1. Nella versione a circuito chiuso, rappresentata in Fig. 11.1 (a), la fornitura e la cessione di calore hanno luogo a pressione costante in due scambiatori di calore. Nella versione a circuito aperto, rappresentata in Fig. 11.1 (b), la fornitura di calore è associata ad un processo di combustione a pressione costante in una camera di combustione, mentre la cessione di calore ha luogo quando i fumi, scaricati nell'atmosfera, disperdono l'energia termica in essi contenuta mescolandosi con l'aria esterna.



**Figura 11.1** Turbomotori a gas : (a) a circuito chiuso e (b) a circuito aperto.

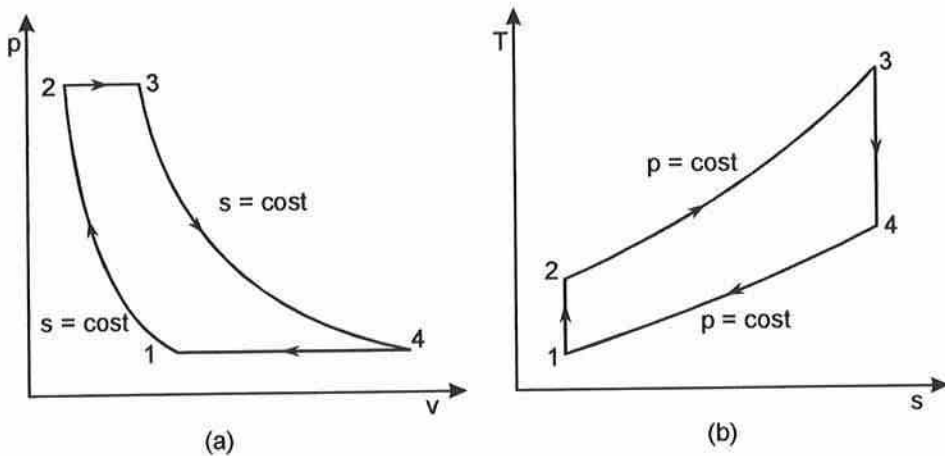


Nelle applicazioni sono utilizzati, quasi sempre, turbomotori a gas a circuito aperto e quindi, negli schemi funzionali che seguono, sarà fatto riferimento esclusivamente ad essi.

### 11.2.1 Ciclo Joule Ideale

Come indicato in Fig. 11.2, il ciclo Joule ideale ad aria standard comprende le trasformazioni:

- compressione isoentropica ( $\overline{12}$ )
- fornitura di calore a pressione costante internamente reversibile  $Q_{23}^+$ ;
- espansione isoentropica ( $\overline{34}$ );
- cessione di calore a pressione costante internamente reversibile  $Q_{41}^-$ .



**Figura 11.2** Ciclo Joule ideale ad aria standard rappresentato: (a) sul diagramma ( $p, v$ ) e (b) sul diagramma ( $T, s$ ).

Il rendimento di conversione, o di primo principio, di un ciclo a gas è definito, al solito, come rapporto tra il lavoro netto ottenuto e la quantità di calore fornita. A sua volta, il lavoro netto è valutabile come differenza tra il calore fornito ed il calore ceduto e quindi, nel caso del ciclo Joule, il rendi-

mento di primo principio può essere espresso come

$$\eta = \frac{L_n}{Q_{23}^+} = \frac{Q_{23}^+ + Q_{41}^-}{Q_{23}^+} = 1 + \frac{Q_{41}^-}{Q_{23}^+} \quad (11.1)$$

Se, come spesso accade, è possibile trascurare le variazioni d'energia cinetica e potenziale, il primo principio della termodinamica, scritto per sistemi aperti con una sola entrata ed una sola uscita, porge

$$Q_{23}^+ = h_3 - h_2 \quad (11.2)$$

e

$$Q_{41}^- = h_1 - h_4 \quad (11.3)$$

Sostituendo le relazioni (11.2) ed (11.3) nell'espressione del rendimento, ed assumendo che i calori specifici non dipendano dalla temperatura, si ottiene

$$\eta = 1 + \frac{h_1 - h_4}{h_3 - h_2} = 1 + \frac{c_p(T_1 - T_4)}{c_p(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} \quad (11.4)$$

Si osservi che, nelle ipotesi poste, si poteva giungere al risultato (11.4) anche esprimendo il lavoro netto nella (11.1) come somma algebrica del lavoro ottenuto nell'espansione e del lavoro speso nella compressione

$$\begin{aligned} L_n &= L_e^+ + L_c^- = (h_3 - h_4) + (h_1 - h_2) \\ &= (h_3 - h_2) - (h_4 - h_1) = c_p[(T_3 - T_2) - (T_4 - T_1)] \end{aligned} \quad (11.5)$$

Fino a questo punto, non si è sfruttata alcuna ipotesi sulla reversibilità interna delle trasformazioni e, quindi, le (11.1) - (11.5) valgono per tutti i cicli Joule ad aria standard. Solo in un ciclo Joule ideale, però, i processi di compressione ed espansione sono isoentropici e consentono di scrivere

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{(1-k)/k} = r_p^{(k-1)/k} = \left(\frac{p_4}{p_3}\right)^{(1-k)/k} = \frac{T_3}{T_4} = r_T \quad (11.6)$$

dove, in assenza di perdite di carico durante gli scambi termici, il rapporto delle pressioni

$$r_p = \frac{p_2}{p_1} = \frac{p_3}{p_4} \quad (11.7)$$

ha lo stesso valore per il compressore e la turbina. Poiché la (11.6) implica

$$\frac{T_3}{T_2} = \frac{T_4}{T_1} \quad (11.8)$$

e, nella stessa relazione,  $r_T$  è il valore comune dei rapporti tra le temperature nelle trasformazioni isoentropiche, la (11.4) può essere riscritta nella maniera seguente

$$\begin{aligned} \eta &= 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \frac{T_4 / T_1 - 1}{T_3 / T_2 - 1} \\ &= 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{T_4}{T_3} = 1 - \frac{1}{r_T} = 1 - \frac{1}{r_p^{(k-1)/k}} \end{aligned} \quad (11.9)$$

Come si può notare, il rendimento di conversione del ciclo Joule ideale è pari al rendimento di un ciclo di Carnot che si svolga tra le temperature d'inizio compressione  $T_1$  e fine compressione  $T_2$  o, se si vuole, tra le temperature di fine espansione  $T_4$  ed inizio espansione  $T_3$ . Esso aumenta asintoticamente all'aumentare di  $r_p$ , fino a raggiungere un valore unitario per un rapporto delle pressioni infinito.

Nei turbomotori reali, tuttavia, la temperatura minima  $T_1$  è prossima alla temperatura ambiente  $T_a$ , mentre la temperatura massima  $T_3$  è limitata da precauzioni di carattere tecnologico connesse alla resistenza a caldo dei

materiali ed alla metodologia di raffreddamento delle palettature della turbina. Attualmente, secondo le applicazioni, si opera con temperature massime comprese tra i 700 °C ed i 1300 °C e, quindi, con eccessi d'aria tali da mantenere le temperature di combustione entro i valori massimi prestabiliti. Una volta fissato il rapporto delle temperature  $T_3 / T_1$ , il rapporto delle pressioni può variare dall'unità fino ad un valore massimo teorico pari a

$$(r_p)_{\max} = \left( \frac{T_3}{T_1} \right)^{k/(k-1)} \quad (11.10)$$

in corrispondenza al quale si ha  $T_2 = T_3$ . Pertanto, la curva del rendimento presenta l'andamento illustrato nella Fig. 11.3.

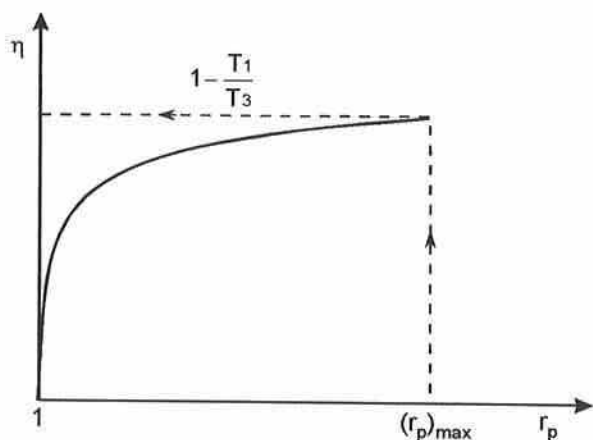
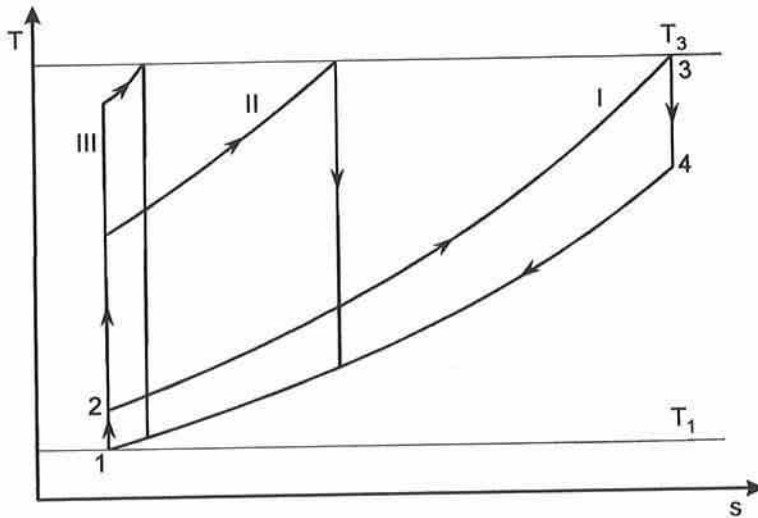


Figura 11.3 Rendimento di un ciclo Joule ideale.

Se all'aumentare di  $r_p$  si mantiene costante  $T_3 / T_1$  e fisso il punto 1, come illustrato in Fig. 11.4, il ciclo Joule ideale si trasforma da I a III tendendo a diventare un particolare ciclo di Carnot ad area nulla, nel quale il rendimento raggiunge il massimo mentre il lavoro netto è uguale a zero. Poiché nella tecnica interessa produrre lavoro, nei cicli pratici occorrerà scegliere il rapporto delle pressioni tenendo conto sia del rendimento sia del

lavoro netto ottenuto.



**Figura 11.4** Influenza del rapporto delle pressioni sulla forma di un ciclo Joule ideale a temperatura massima costante.

### 11.2.2 Lavoro Netto in un Ciclo Joule Ideale

In un ciclo Joule ideale, per un valore fissato del rapporto  $T_3 / T_1$ , il lavoro netto può essere espresso come

$$\begin{aligned}
 L_n &= Q_{23}^+ + Q_{41}^- = c_p [(T_3 - T_2) + (T_1 - T_4)] \\
 &= c_p [(T_3 - T_4) + (T_1 - T_2)] = L_e^+ + L_c^- \\
 &= c_p T_1 \left[ \frac{T_3}{T_1} \left( 1 - \frac{T_4}{T_3} \right) + \left( 1 - \frac{T_2}{T_1} \right) \right] \quad (11.11)
 \end{aligned}$$

Di conseguenza, il lavoro netto adimensionale, può essere espresso mediante la relazione

$$\begin{aligned}
 L_n^* &= \frac{L_n}{c_p T_1} = (L_e^+)^* + (L_c^-)^* \\
 &= \frac{T_3}{T_1} \left[ 1 - \frac{1}{r_p^{(k-1)/k}} \right] + [1 - r_p^{(k-1)/k}] = \frac{T_3}{T_1} \left( 1 - \frac{1}{r_T} \right) + (1 - r_T) \quad (11.12)
 \end{aligned}$$

rappresentata in Fig. 11.5. Come si vede, il lavoro netto si annulla per due rapporti delle pressioni: 1 ed  $(r_p)_{\max}$  e presenta, a sua volta, un massimo assoluto in corrispondenza ad un rapporto delle pressioni che, per questo motivo, viene detto "ottimale". Per trovare tale rapporto si può derivare due volte, rispetto ad  $r_T$ , l'ultimo membro della (11.12) verificando così che il valore per cui si annulla la derivata prima è il massimo cercato. In questo modo, si arriva alla relazione

$$(r_T)_{\text{ott}} = (r_p)_{\text{ott}}^{(k-1)/k} = \sqrt{\frac{T_3}{T_1}} = (r_p)_{\max}^{(k-1)/2k} \quad (11.13)$$

da cui si deduce che, in corrispondenza al rapporto ottimale delle pressioni, le temperature di fine compressione e fine espansione sono uguali e pari a

$$T_2 = T_4 = \sqrt{T_1 T_3} \quad (11.14)$$

e che il rapporto ottimale delle pressioni

$$(r_p)_{\text{ott}} = \sqrt{(r_p)_{\max}} = \left( \frac{T_3}{T_1} \right)^{k/[2(k-1)]} \quad (11.15)$$

è pari alla radice quadrata del rapporto massimo. È appena il caso di far notare che, in corrispondenza al rapporto ottimale delle pressioni, i turbomotori a gas producono la potenza voluta elaborando la portata minima di fluido. Operare con rapporto ottimale di pressioni consente quindi la riduzione d'ingombri, pesi e costi di costruzione.

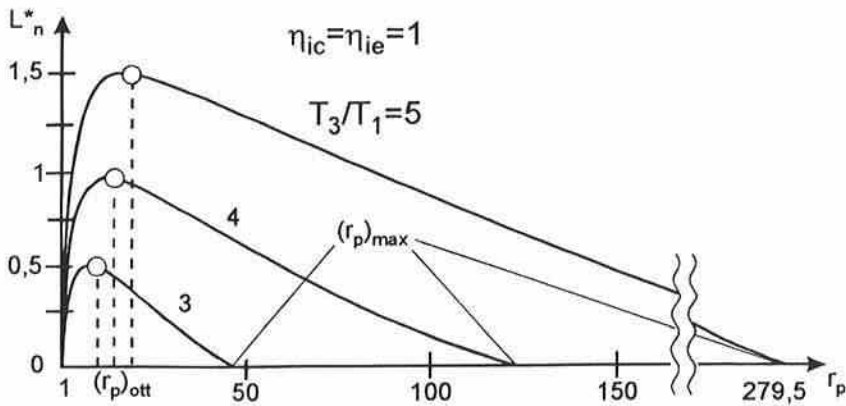


Figura 11.5 Lavoro netto adimensionale in un ciclo Joule ideale.

### Esempio 11.1

Per un ciclo Joule ideale ad aria standard ( $k = 1,4$ ), nell'ipotesi che si abbia  $T_3 / T_1 = 4$  si determini il rapporto delle pressioni ottimale ed, in corrispondenza ad esso, si calcolino

- il lavoro netto massimo adimensionale,
- il rapporto tra il lavoro netto ed il lavoro della turbina,
- il rendimento del ciclo e
- le temperature  $T_2$  e  $T_4$  per  $T_1 = 300$  K.

### Soluzione

Il rapporto delle pressioni ottimale è

$$(r_p)_{ott} = \left( \frac{T_3}{T_1} \right)^{k/[2(k-1)]} = 4^{1,4/0,8} = 11,3$$

mentre il rapporto delle pressioni massimo vale

$$(r_p)_{max} = \left( \frac{T_3}{T_1} \right)^{k/(k-1)} = 4^{1,4/0,4} = 128 (= 11,3^2)$$

In corrispondenza al rapporto delle pressioni ottimale, il lavoro massimo a-dimensionale è pari a

$$\begin{aligned} L_n^* &= \frac{L_n}{c_p T_1} = (L_e^+)^* + (L_c^-)^* = \frac{T_3}{T_1} \left[ 1 - \frac{1}{(r_T)_{out}} \right] + [1 - (r_T)_{out}] \\ &= 4 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{4}} \right) + (1 - \sqrt{4}) = 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

mentre il rapporto tra lavoro netto e lavoro della turbina è dato da

$$\frac{L_n^*}{(L_e^+)^*} = \frac{1}{2} = 0,5$$

ed il rendimento vale

$$\eta = 1 - \frac{1}{(r_p)_{out}^{(k-1)/k}} = 1 - \frac{1}{(r_T)_{out}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{4}} = 0,5$$

Tale valore è quindi pari ai 2/3 del rendimento massimo teorico

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_3} = 1 - \frac{1}{4} = 0,75$$

in corrispondenza al quale il lavoro netto si annulla.

La temperatura di fine compressione è pari a

$$T_2 = T_1 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{(k-1)/k} = 300 \cdot 11,3^{0,4/1,4} = 600 \text{ K}$$

mentre essendo

$$T_3 = 4 T_1 = 4 \cdot 300 = 1200 \text{ K}$$



la temperatura di fine espansione

$$T_4 = T_3 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{(1-k)/k} = 1200 \cdot 11,3^{-0,4/1,4} = 600 \text{ K}$$

risulta pari, a meno degli arrotondamenti, alla temperatura di fine compressione. Infatti, le temperature di fine compressione e di fine espansione coincidono quando il rapporto delle pressioni è quello ottimale.

La conoscenza dei valori delle temperature consente il calcolo del rendimento in base all'espressione (11.4)

$$\eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{600 - 300}{1200 - 600} = 0,5$$

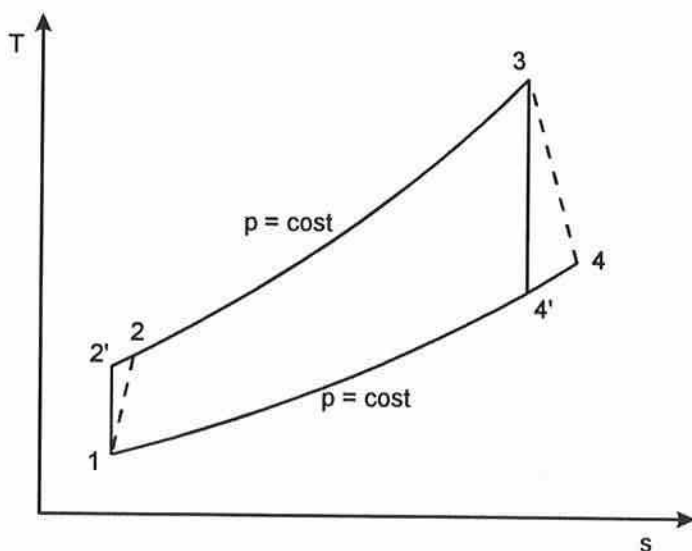
conducendo, ovviamente, allo stesso risultato ottenuto mediante l'applicazione della (11.9).

### 11.2.3 Influenza delle Irreversibilità Interne

Nei cicli Joule reali, espansioni e compressioni possono ancora essere considerate adiabatiche, ma non sono più isoentropiche. A causa delle irreversibilità, il lavoro speso nel compressore è maggiore, in modulo, del lavoro ideale mentre il lavoro ottenuto nella turbina è minore del lavoro ideale. Inoltre, le perdite di carico nella camera di combustione fanno diminuire il salto di pressione tra ingresso ed uscita della turbina, riducendo così anche il salto entalpico disponibile per l'espansione. Tuttavia, in gran parte delle situazioni di interesse pratico, le perdite di carico sono abbastanza piccole rispetto alla differenza tra le pressioni massima e minima di lavoro. Pertanto, in una stima di prima approssimazione del rendimento di un ciclo reale, è sufficiente prendere in considerazione le non isoentropicità della compressione e dell'espansione, come indicato in Fig. 11.6.

La presenza delle irreversibilità nelle trasformazioni adiabatiche, fa

sì che il lavoro speso nella compressione uguagli il lavoro ottenuto nell'espansione ben prima che venga raggiunto il rapporto massimo delle pressioni definito dalla (11.10). Nel ciclo Joule reale, infatti, il compressore assorbe normalmente dal 40 all'80% del lavoro generato dalla turbina. Pertanto, se si opera con forti irreversibilità o con rapporti delle pressioni troppo alti, si rischia di non arrivare nemmeno alla condizione di autosostentamento, nella quale il compressore assorbe tutto il lavoro generato dalla turbina.



**Figura 11.6** Effetto delle irreversibilità sul ciclo Joule reale.

Il rendimento di un ciclo reale è sempre definito dall'espressione (11.1) ricavabile, senza ipotesi restrittive, dal primo principio della termodinamica. Analogamente, l'espressione (11.4) del rendimento resta valida anche per i cicli reali mentre, nell'ipotesi di non isoentropicità delle trasformazioni adiabatiche, l'unica difficoltà aggiuntiva è costituita dalla determinazione dei punti di fine trasformazione. Tuttavia, se i calori specifici non dipendono dalla temperatura e sono noti i rendimenti isoentropici di

compressione

$$\eta_{ic} = \frac{h_{2'} - h_1}{h_2 - h_1} = \frac{T_{2'} - T_1}{T_2 - T_1} \quad (11.16)$$

e di espansione

$$\eta_{ie} = \frac{h_3 - h_4}{h_3 - h_{4'}} = \frac{T_3 - T_4}{T_3 - T_{4'}} \quad (11.17)$$

le entalpie  $h_2$  ed  $h_4$ , e le temperature  $T_2$  e  $T_4$ , possono essere facilmente calcolate.

Seguendo procedure analoghe a quelle illustrate nei paragrafi precedenti, dopo alcuni passaggi algebrici non riportati per brevità, si arriva alle espressioni finali del lavoro adimensionale e del rendimento in un ciclo Joule reale. Le espressioni ottenute sono le seguenti

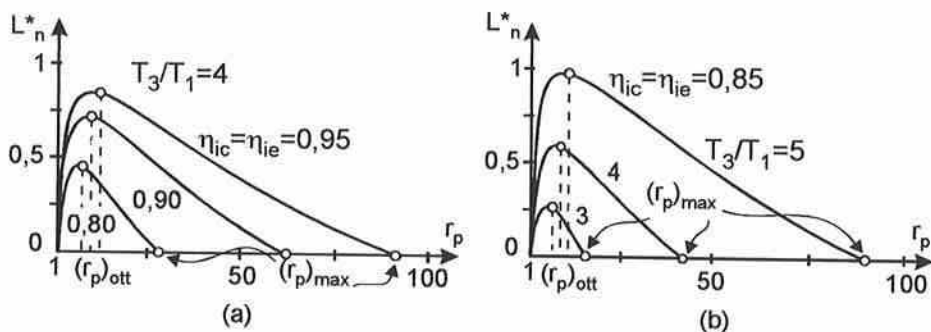
$$\begin{aligned} L_n^* &= \frac{L_n}{c_p T_1} = (L_e^+)^* + (L_c^-)^* \\ &= \eta_{ie} \frac{T_3}{T_1} \left[ 1 - \frac{1}{r_p^{(k-1)/k}} \right] + \frac{1}{\eta_{ic}} \left[ 1 - r_p^{(k-1)/k} \right] \end{aligned} \quad (11.18)$$

ed

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{L_n^*}{Q_{23}^*} = \frac{L_n / c_p T_1}{Q_{23} / c_p T_1} \\ &= \left[ 1 - \frac{1}{r_p^{(k-1)/k}} \right] \frac{\eta_{ie} (T_3 / T_1) - r_p^{(k-1)/k} / \eta_{ic}}{(T_3 / T_1) - 1 + \left[ 1 - r_p^{(k-1)/k} \right] / \eta_{ic}} \end{aligned} \quad (11.19)$$

diagrammate, rispettivamente, in Fig. 11.7 ed in Fig. 11.8. Come osservazione generale, si può affermare che l'aumento dei rendimenti isoent-

tropici e l'aumento del rapporto delle temperature  $T_3 / T_1$  hanno effetti benefici analoghi, sia sul lavoro netto sia sul rendimento.



**Figura 11.7** Influenza delle irreversibilità (a) e del rapporto delle temperature (b) sul lavoro netto di un ciclo Joule reale.

In particolare, dall'Eq. (11.18) e dalla Fig. 11.7 si evince che, in questo caso, il lavoro netto si annulla per un rapporto delle pressioni unitario e per un rapporto massimo pari a

$$(r_p)_{\max} = \left( \eta_{ic} \eta_{ie} \frac{T_3}{T_1} \right)^{k/(k-1)} \quad (11.20)$$

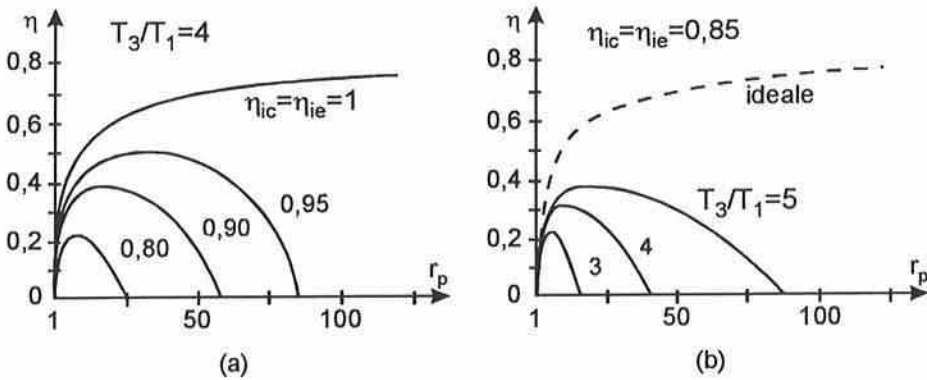
mentre il rapporto ottimale delle pressioni, che rende massimo il lavoro specifico, ora vale

$$(r_p)_{\text{ott}} = \sqrt{(r_p)_{\max}} = \left( \eta_{ic} \eta_{ie} \frac{T_3}{T_1} \right)^{k/[2(k-1)]} \quad (11.21)$$

Inoltre va notato che, nei cicli Joule reali, non si ha più uguaglianza tra le temperature di fine compressione e di fine espansione in corrispondenza al rapporto ottimale delle pressioni dato dalla (11.21). Tale uguaglianza, infatti, continua a verificarsi nelle vicinanze del rapporto delle pressioni dato

dalla (11.15), per il quale risultano certamente uguali le temperature  $T_2$  e  $T_4$ .

Dall'Eq. (11.19) e dalle Fig. 11.7 e 11.8 si vede che, necessariamente, il rendimento si annulla in corrispondenza agli stessi valori dei rapporti di pressione per i quali si annulla il lavoro netto. Invece, i rapporti delle pressioni per i quali si hanno i valori massimi del rendimento, sono diversi e più elevati dei rapporti delle pressioni per i quali si ottengono i massimi del lavoro netto.



**Figura 11.8** Influenza delle irreversibilità (a) e del rapporto delle temperature (b) sul rendimento di un ciclo Joule reale.

### Esempio 11.2

Per un ciclo Joule reale ad aria standard ( $k = 1,4$ ) nell'ipotesi che si abbia  $T_3 / T_1 = 4$  e che i rendimenti di compressione ed espansione isoentropici siano pari a 0,85, si determini il rapporto delle pressioni ottimale ed, in corrispondenza ad esso, si calcolino

- il lavoro massimo netto adimensionale,
- il rapporto tra il lavoro netto ed il lavoro della turbina,
- il rendimento del ciclo e
- le temperature  $T_2$  e  $T_4$  per  $T_1 = 300$  K.

*Soluzione*

Il rapporto delle pressioni ottimale è

$$(r_p)_{out} = \left( \eta_{ic} \eta_{ie} \frac{T_3}{T_1} \right)^{k/[2(k-1)]} = (0,85 \cdot 0,85 \cdot 4)^{1,4/0,8} = 6,41$$

mentre il rapporto delle pressioni massimo vale

$$(r_p)_{max} = \left( \eta_{ic} \eta_{ie} \frac{T_3}{T_1} \right)^{k/(k-1)} = (0,85 \cdot 0,85 \cdot 4)^{1,4/0,4} = 41,0 (= 6,41^2)$$

In corrispondenza al rapporto delle pressioni ottimale, si ha

$$\begin{aligned} L_n^* &= \frac{L_n}{c_p T_1} = (L_e^+)^* + (L_c^-)^* = \eta_{ie} \frac{T_3}{T_1} \left[ 1 - \frac{1}{r_p^{(k-1)/k}} \right] + \frac{1}{\eta_{ic}} \left[ 1 - r_p^{(k-1)/k} \right] \\ &= 0,85 \cdot 4 \left( 1 - \frac{1}{6,41^{0,4/1,4}} \right) + \frac{1}{0,85} (1 - 6,41^{0,4/1,4}) = 1,4 - 0,824 = 0,576 \end{aligned}$$

mentre il rapporto tra lavoro netto ottenuto e lavoro della turbina è

$$\frac{L_n^*}{(L_e^+)^*} = \frac{0,576}{1,4} = 0,41$$

ed il rendimento vale

$$\begin{aligned} \eta &= \left[ 1 - \frac{1}{r_p^{(k-1)/k}} \right] \frac{\eta_{ie} (T_3/T_1) - r_p^{(k-1)/k} / \eta_{ic}}{(T_3/T_1) - 1 + [1 - r_p^{(k-1)/k}] / \eta_{ic}} \\ &= \left( 1 - \frac{1}{6,41^{0,4/1,4}} \right) \frac{0,85 \cdot 4 - 6,41^{0,4/1,4} / 0,85}{4 - 1 + (1 - 6,41^{0,4/1,4}) / 0,85} = 0,265 \end{aligned}$$

Come si può notare dal confronto con i risultati dell'Esempio 11.1, le irreversibilità nella compressione e nell'espansione portano ad un netto peggioramento delle prestazioni.

Poiché risulta

$$T_{2'} = T_1 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{(k-1)/k} = 300 \cdot 6,41^{0,4/1,4} = 510 \text{ K}$$

la temperatura di fine compressione è pari a

$$T_2 = T_1 + \frac{T_{2'} - T_1}{\eta_{ic}} = 300 + \frac{510 - 300}{0,85} = 547 \text{ K}$$

Analogamente, essendo

$$T_3 = 4 T_1 = 4 \cdot 300 = 1200 \text{ K}$$

e

$$T_{4'} = T_3 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{(1-k)/k} = 1200 \cdot 6,41^{-0,4/1,4} = 705,8 \text{ K}$$

si ha

$$T_4 = T_3 - \eta_{ie}(T_3 - T_{4'}) = 1200 - 0,85(1200 - 705,8) = 779,9 \text{ K}$$

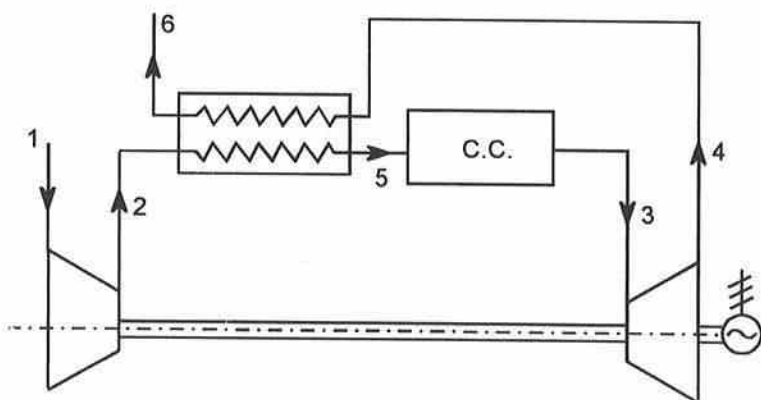
La conoscenza dei valori delle temperature consente il calcolo del rendimento in base all'espressione (11.4)

$$\eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{779,9 - 300}{1200 - 547} = 0,265$$

conducendo, ovviamente, allo stesso risultato ottenuto mediante l'applicazione della (11.19).

### 11.3 CICLO JOULE RIGENERATIVO

Molte volte, nei cicli Joule, la temperatura allo scarico della turbina è più alta della temperatura all'uscita dal compressore. In questi casi, al fine di ridurre i consumi termici ed aumentare i rendimenti, conviene preriscaldare l'aria uscente dal compressore utilizzando il gas di scarico della turbina. Ciò si ottiene, come indicato in Fig. 11.9, inserendo nell'impianto uno scambiatore di calore in controcorrente, chiamato "rigeneratore" in quanto trasferisce calore tra componenti interni del ciclo.



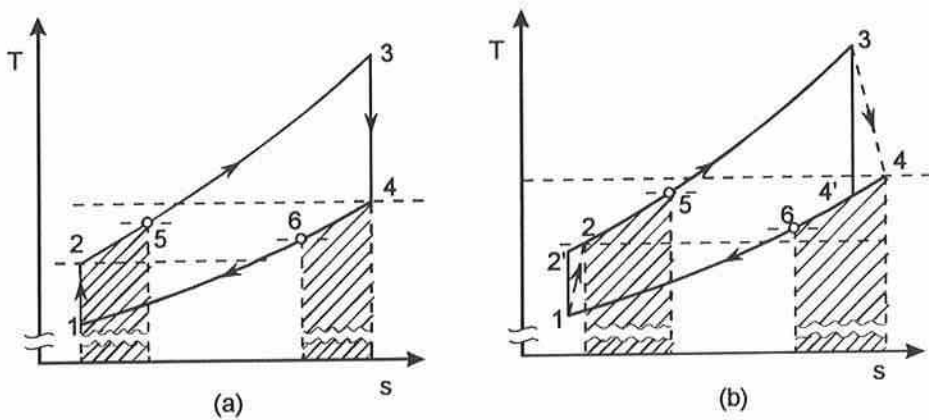
**Figura 11.9** Schema funzionale di un turbomotore a gas con scambiatore rigenerativo.

Il parametro che descrive il comportamento dello scambiatore rigenerativo è l'efficienza  $\varepsilon$ , definita come rapporto tra il flusso termico effettivamente scambiato ed il massimo flusso termico scambiabile da uno scambiatore ideale. Con riferimento ai cicli Joule ad aria standard ed alle situazioni illustrate in Fig. 11.10, l'efficienza dello scambiatore rigenerativo può essere espressa come

$$\varepsilon = \frac{h_5 - h_2}{h_4 - h_2} = \frac{T_5 - T_2}{T_4 - T_2} = \frac{h_4 - h_6}{h_4 - h_2} = \frac{T_4 - T_6}{T_4 - T_2} \quad (11.22)$$



L'efficienza del rigeneratore è sempre compresa tra 0 ed 1, assumendo il valore 0 quando non vi è scambio termico ed il valore 1 quando lo scambio termico è così efficace da portare all'uguaglianza tra le temperature nei punti 5 e 4 e nei punti 6 e 2. Nella Fig. 11.10, le due aree comprese tra l'asse delle ascisse ( $T = 0$  K) ed i due tratti d'isobara  $\overline{25}$  e  $\overline{46}$  rappresentano, rispettivamente, la quantità di calore ceduta dal fluido caldo e la quantità di calore ricevuta dal fluido freddo. Esse sono quindi uguali se lo scambiatore è adiabatico.



**Figura 11.10** Ciclo Joule con scambiatore rigenerativo e trasformazioni adiabatiche (a) reversibili e (b) irreversibili.

Il rendimento di primo principio di un ciclo rigenerativo può essere definito mediante l'espressione generale

$$\eta = \frac{L_n}{Q_{53}^+} = \frac{Q_{53}^+ + Q_{61}^-}{Q_{53}^+} = 1 + \frac{Q_{61}^-}{Q_{53}^+} = 1 - \frac{h_6 - h_1}{h_3 - h_5} \quad (11.23)$$

ricavata senza ipotesi restrittive dal primo principio della termodinamica. Come si può vedere, la quantità di calore fornita diminuisce, rispetto ai cicli corrispondenti senza rigenerazione, mentre il lavoro netto non varia in

quanto le trasformazioni adiabatiche non subiscono mutamenti.

### 11.3.1 Rigeneratori ad Efficienza Unitaria

Se si fa l'ipotesi che il rigeneratore abbia efficienza unitaria e si assume, come al solito, che i calori specifici non dipendano dalla temperatura, si ricava

$$Q_{53}^+ = h_3 - h_5 = c_p(T_3 - T_5) = c_p(T_3 - T_4) \quad (11.24)$$

e

$$Q_{61}^- = h_6 - h_1 = c_p(T_6 - T_1) = c_p(T_2 - T_1) \quad (11.25)$$

in quanto si arriva all'uguaglianza tra le temperature nei punti 5 e 4 e nei punti 6 e 2. Sostituendo le relazioni (11.24) ed (11.25) nella (11.23), e tenendo conto delle relazioni intercorrenti tra temperature e pressioni nelle trasformazioni adiabatiche, si arriva alle espressioni del rendimento.

Nel caso di rigenerazione ad efficienza unitaria, con compressione ed espansione isoentropiche, si ottiene

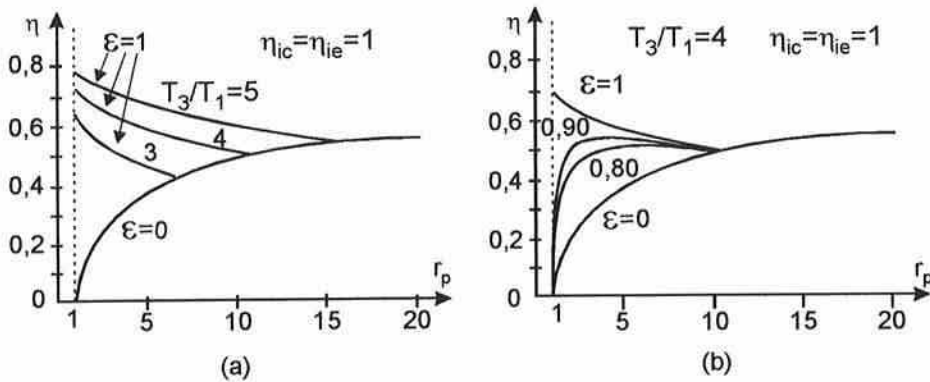
$$\begin{aligned} \eta &= 1 - \frac{c_p(T_2 - T_1)}{c_p(T_3 - T_4)} = 1 - \frac{T_1(T_2 / T_1 - 1)}{T_3(1 - T_4 / T_3)} \\ &= 1 - \frac{T_1}{T_3} \frac{r_p^{(k-1)/k} - 1}{1 - 1 / r_p^{(k-1)/k}} = 1 - \frac{T_1}{T_3} r_p^{(k-1)/k} \end{aligned} \quad (11.26)$$

Nella Fig. 11.11 (a), è messo in evidenza l'effetto della rigenerazione, ad efficienza unitaria, sui cicli ideali. Come si può vedere, la rigenerazione ha senso soltanto al di sotto del rapporto ottimale delle pressioni (in corrispondenza al quale si ha l'uguaglianza tra le temperature d'uscita dalla turbina e dal compressore).

Nel caso di rigenerazione ad efficienza unitaria, con compressione ed espansione non reversibili, si può dimostrare che vale la relazione

$$\eta = 1 - \frac{1}{\eta_{ic}\eta_{ie}} \frac{T_1}{T_3} r_p^{(k-1)/k} \quad (11.27)$$

Pertanto, il rendimento di conversione di un qualunque ciclo Joule con rigeneratore ad efficienza unitaria aumenta al diminuire del rapporto delle pressioni e, per un ciclo Joule ideale con  $r_p = 1$ , raggiunge il rendimento di un ciclo di Carnot che si svolge tra  $T_1$  e  $T_3$ . Ciò si può giustificare intuitivamente osservando che, al diminuire del rapporto delle pressioni in un ciclo rigenerativo, la fornitura di calore dall'esterno e la cessione di calore all'ambiente hanno luogo a temperature medie sempre più vicine, rispettivamente, alla temperatura massima di ciclo ed alla temperatura ambiente.



**Figura 11.11** Influenza della rigenerazione sul rendimento di un ciclo Joule ideale valutata: (a) al variare di  $T_3/T_1$  e (b) al variare dell'efficienza del rigeneratore.

### 11.3.2 Rigeneratori ad Efficienza Non Unitaria

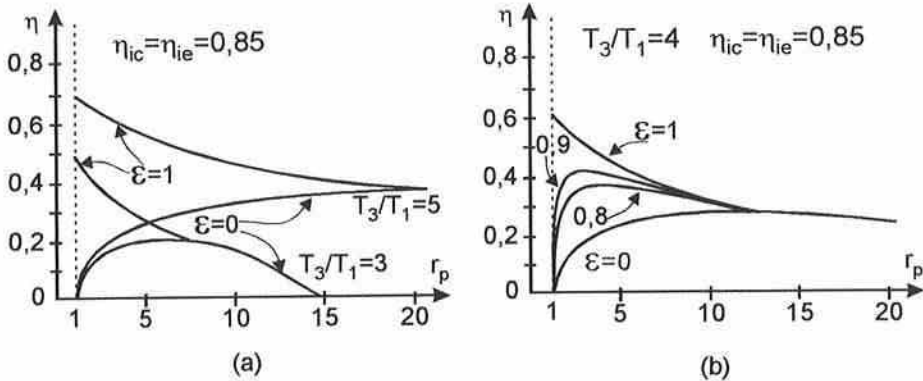
Nella realtà i rigeneratori operano con efficienza non unitaria e, di con-

seguenza, le relazioni (11.26) ed (11.27) non sono più valide. In particolare, nei cicli reali al tendere ad uno del rapporto delle pressioni tende a zero il rendimento in quanto tende ad annullarsi il lavoro ottenuto, ma non la quantità di calore che si deve ancora fornire. L'espressione analitica del rendimento può essere ricavata partendo, anche in questo caso, dalle relazioni (11.22) ed (11.23) e, dopo una serie di passaggi non riportati per brevità, si giunge all'espressione generale

$$\eta = \frac{L_n / (c_p T_1)}{Q_{53} / (c_p T_1)} = \left[ 1 - \frac{1}{r_p^{(k-1)/k}} \right] \cdot \frac{\eta_{ie} \frac{T_3}{T_1} - \frac{1}{\eta_{ic}} r_p^{(k-1)/k}}{(1 - \varepsilon) \left[ \frac{T_3}{T_1} - 1 + \frac{1 - r_p^{(k-1)/k}}{\eta_{ic}} \right] + \varepsilon \eta_{ie} \frac{T_3}{T_1} \left[ 1 - \frac{1}{r_p^{(k-1)/k}} \right]} \quad (11.28)$$

valida per il rendimento di tutti i cicli Joule considerati finora. Infatti, dalla (11.28) si ottengono, ad esempio: la (11.19) in assenza di rigenerazione ( $\varepsilon = 0$ ); la (11.27) per efficienza unitaria del rigeneratore ( $\varepsilon = 1$ ) e la (11.26) per efficienza unitaria del rigeneratore e rendimenti isoentropici unitari.

Nella Fig. 11.11 (b), ad esempio, è evidenziato l'effetto dell'efficienza del rigeneratore sui cicli ideali e, come si è già osservato, per  $\varepsilon < 1$  il rendimento tende a zero quando il rapporto delle pressioni tende ad uno. Nella Fig. 11.12, invece, è evidenziato, l'effetto della rigenerazione sui cicli reali al variare di  $T_3 / T_1$  e dell'efficienza del rigeneratore. In questo caso, gli effetti della rigenerazione non sono qualitativamente diversi rispetto alla situazione ideale, ma i benefici si prolungano interessando la zona dei rapporti di pressione (e rendimenti) più elevati. Pertanto, nei cicli Joule pratici la rigenerazione trova, quasi sempre, un'applicazione vantaggiosa.



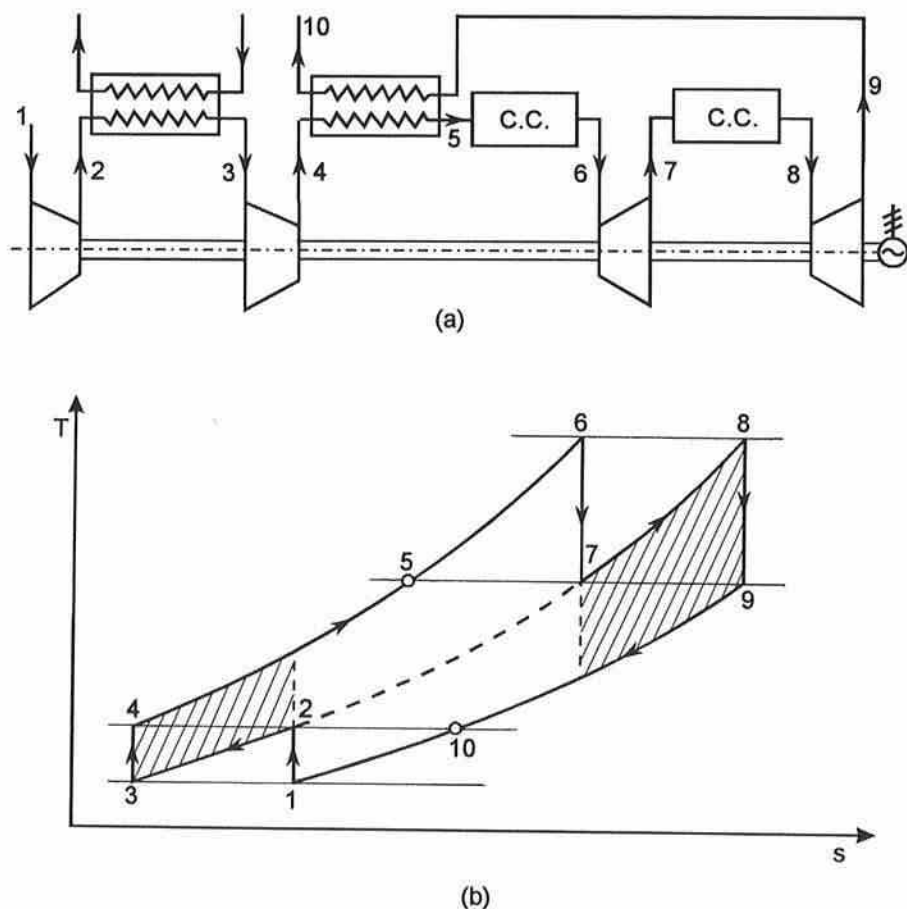
**Figura 11.12** Influenza delle della rigenerazione sul rendimento di un ciclo Joule reale valutata: (a) al variare di  $T_3/T_1$  e (b) al variare dell'efficienza del rigeneratore.

### 11.3.3 Rigenerazione con Espansione e Compressione in Più Stadi

Come si è visto nei paragrafi precedenti, in condizioni operative non ottimali i cicli con turbina a gas sono caratterizzati da un basso valore del lavoro specifico netto adimensionale. L'aggiunta di uno scambiatore rigenerativo, pur benefica nei confronti del rendimento, non influisce sul lavoro netto. Per aumentare il lavoro netto occorre, infatti, ridurre il lavoro di compressione ed aumentare, contemporaneamente, il lavoro d'espansione. Nella Sezione 5.6 si è visto che il lavoro di compressione può essere ridotto frazionando la compressione in due (o più) stadi con refrigerazione intermedia. Analogamente, come sarà dimostrato per via grafica nel seguito, il lavoro di espansione può essere aumentato frazionando l'espansione in due (o più) stadi con post-combustione intermedia.

Nella pratica, compressioni ed espansioni non possono venire frazionate troppo per evidenti motivi di costo e di complessità. Tuttavia, come illustrato in Fig. 11.13 (a), sono normalmente realizzati impianti a ciclo rigenerativo che utilizzano due compressor, con uno stadio di refrigerazione intermedio, e due turbine, con una camera di post-combustione intermedia.

Nell'ipotesi di trasformazioni reversibili e di rigeneratore con efficienza unitaria, il ciclo termodinamico corrispondente è del tipo rappresentato in Fig. 11.13 (b).



**Figura 11.13** Turbomotore a gas con scambiatore rigenerativo e compressione ed espansione in due stadi: (a) schema funzionale e (b) ciclo ideale di riferimento.

L'aumento di lavoro specifico netto è facilmente identificabile in quanto è rappresentato dalle due aree tratteggiate nella Fig. 11.13 (b): quella inferiore relativa alla doppia compressione e quella superiore relativa alla

doppia espansione. Non altrettanto evidente, invece, è l'influenza sul rendimento di compressioni ed espansioni frazionate. Infatti, l'aumento di lavoro netto comporta, in assenza di rigenerazione, un aumento della quantità di calore fornita dall'esterno, al fine di compensare la cessione di calore all'esterno associata alla refrigerazione intermedia. In presenza di rigenerazione, al contrario, la quantità di calore aggiuntiva richiesta dalla refrigerazione intermedia, è compensata dalla quantità di calore aggiuntiva disponibile alla fine dell'espansione. Si potrebbe dimostrare che nei cicli a più stadi di compressione e d'espansione aumentano, in presenza di rigenerazione, sia il lavoro netto che il rendimento mentre, in assenza di rigenerazione, aumenta il lavoro netto ma diminuisce il rendimento.

## 11.4 IMPIANTI CON TURBINA A GAS

Le analisi energetiche riportate nei paragrafi precedenti, sono basate sulle quantità di calore fornite al fluido di lavoro e non sulle quantità d'energia primaria fornite all'impianto con il combustibile. In questo paragrafo, invece, si parte dall'energia primaria anche se, per semplicità, ci si limita a considerare impianti con turbina a gas per la produzione d'energia elettrica. Secondo il punto di vista impiantistico, la produzione d'energia elettrica può essere schematizzata come una serie di trasformazioni che agiscono, in sequenza, su

- il flusso d'energia primaria associato al combustibile,
- il flusso termico utile fornito al fluido operativo,
- la potenza resa disponibile dal ciclo termodinamico,
- la potenza meccanica ottenuta dal gruppo turbocompressore,
- la potenza elettrica generata dall'alternatore,
- la potenza immessa nella rete elettrica.

Nella conversione dei flussi energetici da una forma all'altra, occorre tener conto dei rendimenti di conversione od, in alternativa, delle perdite. Così nel

passaggio da flusso d'energia primaria a flusso termico utile, interviene il rendimento della camera di combustione, in armonia con quanto visto nel Paragrafo 10.8. Analogamente, nella trasformazione da flusso termico utile a potenza resa disponibile dal ciclo, interviene il rendimento termodinamico, in armonia con quanto visto nei paragrafi precedenti. Infine, procedendo in sequenza, s'incontrano il rendimento meccanico della turbina, il rendimento elettrico dell'alternatore e le perdite rappresentate dai consumi, quasi esclusivamente elettrici, delle apparecchiature ausiliarie inserite nell'impianto. Tuttavia, se si limita l'analisi alla sfera strettamente termodinamica (in armonia con quanto visto nel Paragrafo 10.9), il rendimento d'impianto può essere stimato mediante l'espressione

$$\eta_{imp} = \frac{P_n}{\dot{m}_c H_i} = \eta_{cc} \eta \quad (10.29)$$

dove  $P_n$  è la potenza netta resa disponibile dal ciclo termodinamico,  $\dot{m}_c H_i$  è il flusso di energia primaria associato alla portata di combustibile,  $\eta_{cc}$  è il rendimento della camera di combustione, definito nel Paragrafo 10.8, ed  $\eta$  è il rendimento termodinamico del ciclo definito nei paragrafi precedenti.

### Esempio 11.3

Si stimino il rendimento di conversione globale ed il rendimento d'impianto (10.29) per una centrale termoelettrica a turbogas, nella quale si abbia

- rendimento della camera di combustione  $\eta_{cc} = 97\%$ ,
- rendimento del ciclo termodinamico  $\eta = 35\%$ ,
- rendimento meccanico del gruppo turbocompressore  $\eta_m = 99\%$ ,
- rendimento elettrico dell'alternatore  $\eta_{elt} = 98\%$  e
- perdita imputabile ai consumi degli ausiliari  $\pi_a = 1\%$ .

#### Soluzione

Procedendo come nella definizione del rendimento (10.29), il rendimento



globale della centrale termoelettrica a turbogas può essere stimato mediante una relazione del tipo

$$\eta_{globale} = \frac{P_{elt}}{\dot{m}_c H_i} = \eta_{cc} \eta \eta_m \eta_{elt} (1 - \pi_a)$$

dove  $P_{elt}$  è la potenza immessa nella rete elettrica,  $\dot{m}_c H_i$  è il flusso di energia primaria associato alla portata di combustibile,  $\eta_{cc}$  è il rendimento della camera di combustione,  $\eta$  è il rendimento termodinamico del ciclo,  $\eta_m$  è il rendimento meccanico del gruppo turbocompressore,  $\eta_{elt}$  è il rendimento elettrico dell'alternatore e  $\pi_a$  è la perdita imputabile ai consumi degli ausiliari. Nella fattispecie, il rendimento di produzione dell'energia elettrica è pari a

$$\eta_{globale} = \eta_{cc} \eta \eta_m \eta_{elt} (1 - \pi_a) = 0,97 \cdot 0,35 \cdot 0,99 \cdot 0,98 (1 - 0,01) = 0,33$$

A causa della scarsa incidenza delle perdite elettromeccaniche e dei consumi degli ausiliari, il rendimento globale non è molto inferiore al rendimento termodinamico. La situazione, come vedremo, è diversa nelle centrali termoelettriche con turbine a vapore, nelle quali il rendimento termodinamico è abbastanza più alto del rendimento globale.

Il rendimento d'impianto, definito dalla (10.29), è invece pari a

$$\eta_{imp} = \eta_{cc} \eta = 0,97 \cdot 0,35 = 0,34$$

e, nel caso in esame, non è troppo diverso dal rendimento globale della produzione di energia elettrica.

#### 11.4.1 Analisi Exergetica di un Impianto con Turbina a Gas

Le analisi energetiche, basate esclusivamente sul primo principio della ter-

modinamica, non tengono conto, se non indirettamente, delle irreversibilità. Infatti, in base al punto di vista definibile di “primo principio”, le uniche “perdite” dei cicli termodinamici sono costituite dalle quantità di calore scaricate nell’ambiente.

Per individuare le “vere” perdite termodinamiche ed intervenire in maniera corretta sui componenti più critici degli impianti, occorre quindi utilizzare gli strumenti dell’analisi exergetica. Al fine di giungere a risultati sufficientemente realistici, pur nell’ambito di una trattazione abbastanza elementare, negli esempi qui riportati si tiene conto della fornitura di calore mediante un processo di combustione. Per semplicità, ed in armonia con quanto visto al Paragrafo (10.9), lo studio è, tuttavia, limitato all’analisi termodinamica.

#### **Esempio 11.4**

Con riferimento allo schema d’appoggio, illustrato in Fig. 11.1 (a), ed al ciclo Joule reale, rappresentato in Fig. 11.6, si mettano in relazione tra loro i rendimenti di primo e di secondo principio d’un impianto con turbina a gas assumendo

- portate uguali, e pari ad  $\dot{m}_a$ , per l’aria ed i fumi,
- potere calorifico inferiore uguale al potere exergetico del combustibile e
- condizioni ambiente rappresentate dal punto 1.

#### *Soluzione*

L’exergia ottenuta, sia dal ciclo sia dall’impianto, è pari alla potenza meccanica netta

$$P_n = \dot{m}_a [(h_3 - h_4) - (h_2 - h_1)]$$

L’exergia fornita al ciclo è pari a

$$\dot{m}_a e_Q = \dot{m}_a [(h_3 - h_2) - T_a (s_3 - s_2)]$$

ed è diversa dall'exergia fornita all'impianto, pari a

$$\dot{m}_a e_c \cong \dot{m}_a H_i = \frac{\dot{m}_a (h_3 - h_2)}{\eta_{cc}}$$

dove  $\eta_{cc}$  è il rendimento di primo principio della camera di combustione.

L'energia fornita al ciclo è pari a

$$q_{23}^+ = \dot{m}_a (h_3 - h_2)$$

ed è diversa dall'energia fornita all'impianto, pari a

$$\dot{m}_c H_i = \frac{\dot{m}_a (h_3 - h_2)}{\eta_{cc}}$$

dove  $\eta_{cc}$  è il rendimento di primo principio della camera di combustione.

Nel ciclo si hanno perdite exergetiche, al compressore

$$|P_{12}^-| - \dot{m}_a (e_2 - e_1) = \dot{m}_a \left\{ (h_2 - h_1) - [(h_2 - h_1) - T_a (s_2 - s_1)] \right\} = \dot{m}_a T_a (s_2 - s_1)$$

alla turbina

$$\dot{m}_a (e_3 - e_4) - P_{34}^+ = \dot{m}_a \left\{ [(h_3 - h_4) - T_a (s_3 - s_4)] - (h_3 - h_4) \right\} = \dot{m}_a T_a (s_4 - s_3)$$

ed allo scarico

$$\dot{m}_a (e_4 - e_1) = \dot{m}_a [(h_4 - h_1) - T_a (s_4 - s_1)]$$

dove è dispersa all'esterno tutta l'exergia ancora contenuta nei fumi.

Nell'intero impianto si hanno, in aggiunta, le perdite exergetiche in camera di combustione

$$\begin{aligned}\dot{m}_c e_c - \dot{m}_a (e_3 - e_2) &= \frac{\dot{m}_a (h_3 - h_2)}{\eta_{cc}} - \dot{m}_a [(h_3 - h_2) - T_a (s_3 - s_2)] \\ &= \dot{m}_a \left[ \frac{1 - \eta_{cc}}{\eta_{cc}} (h_3 - h_2) - T_a (s_3 - s_2) \right]\end{aligned}$$

Le perdite energetiche nel ciclo sono pari a

$$|q_{41}^-| = \dot{m}_a (h_4 - h_1)$$

e sono localizzate allo scarico, dove viene dispersa all'esterno tutta l'energia ancora contenuta nei fumi.

Nell'impianto si hanno, in aggiunta, le perdite energetiche in camera di combustione

$$\dot{m}_c H_i - q_{23}^+ = \frac{\dot{m}_a (h_3 - h_2)}{\eta_{cc}} - \dot{m}_a (h_3 - h_2) = \dot{m}_a \frac{1 - \eta_{cc}}{\eta_{cc}} (h_3 - h_2)$$

I rendimenti d'impianto di primo e di secondo principio sono uguali, in quanto si ha

$$(\eta_{II})_{imp} = \frac{P_n}{\dot{m}_c e_c} = \frac{\dot{m}_a [(h_3 - h_4) - (h_2 - h_1)]}{\dot{m}_a (h_3 - h_2) / \eta_{cc}} = \frac{P_n}{\dot{m}_c H_i} = \eta_{imp}$$

Al contrario, il rendimento di secondo principio del ciclo è superiore al rendimento di conversione del ciclo, in quanto si ha

$$\begin{aligned}\eta_{II} &= \frac{P_n}{\dot{m}_a (e_3 - e_2)} = \frac{\dot{m}_a [(h_3 - h_4) - (h_2 - h_1)]}{\dot{m}_a [(h_3 - h_2) - T_a (s_3 - s_2)]} \\ &= \frac{(h_3 - h_4) - (h_2 - h_1)}{(h_3 - h_2) - T_a (s_3 - s_2)} > \frac{(h_3 - h_4) - (h_2 - h_1)}{(h_3 - h_2)} = \eta\end{aligned}$$

poiché al denominatore dell'espressione del rendimento di secondo principio compare il valore exergetico della quantità di calore fornita, e non l'intera quantità di calore.

### Esempio 11.5

Con riferimento alla Fig. 11.6, si esegua l'analisi exergetica di un impianto con turbina a gas avente rapporto delle pressioni pari ad 8, temperatura di fine combustione di 1300 K e temperatura dell'aria all'ingresso, coincidente con la temperatura ambiente, pari a 25 °C. Si assumano una combustione adiabatica e rendimenti isoentropici di 0,85 per il compressore e 0,90 per la turbina. L'impianto utilizza cherosene liquido a temperatura ambiente con potere calorifico inferiore, assunto coincidente con il potere exergetico, pari a 43,5 MJ/kg.

Si assuma, inoltre, che:

- il calore specifico dell'aria sia costante e pari a 1,0 kJ/(kg K),
- il calore specifico dei fumi sia costante e pari a 1,1 kJ/(kg K),
- il rapporto tra i calori specifici a pressione e volume costante valga 1,4 sia per l'aria sia per i fumi e
- nelle analisi exergetiche, la temperatura ambiente possa essere considerata pari a 298 K.

### Soluzione

Con il rapporto delle pressioni ipotizzato, si ha

$$r_T = r_p^{(k-1)/k} = 8^{0,4/1,4} = 1,8114$$

e quindi, operando in sequenza si trova

$$T_{2'} = r_T T_1 = 1,8114 \cdot 298 = 539,8 \text{ K}$$

$$T_2 = T_1 + \frac{T_{2'} - T_1}{\eta_{ic}} = 298 + \frac{539,8 - 298}{0,85} = 582,5 \text{ K}$$

$$T_{4'} = \frac{T_3}{r_T} = \frac{1300}{1,8114} = 717,7 \text{ K}$$

$$T_4 = T_3 - (T_3 - T_{4'}) \eta_{ie} = 1300 - (1300 - 717,7) 0,90 = 775,9 \text{ K}$$

Con riferimento all'Esempio 10.9, si ha poi

$$\begin{aligned} m_a^* &= \frac{H_i^0 - c_{pu}(T_3 - T_0)}{c_{pu}(T_3 - T_0) - c_{pa}(T_2 - T_0)} \\ &= \frac{43500 - 1,1(1300 - 298)}{1,1(1300 - 298) - 1,0(582,5 - 298)} = 51,9 \frac{\text{kg}_a}{\text{kg}_c} \end{aligned}$$

ed

$$m_{fu}^* = m_a^* + 1 = 52,9 \text{ kg}_f / \text{kg}_c$$

Nel compressore si ha

$$|L_{12}| = h_2 - h_1 = c_{pa}(T_2 - T_1) = 1,0(582,5 - 298) = 284,5 \text{ kJ} / \text{kg}_a$$

$$\begin{aligned} e_2 - e_1 &= h_2 - h_1 - T_a(s_2 - s_1) = c_{pa}(T_2 - T_1) - c_{pa}T_a \ln \frac{T_2}{T_2'} \\ &= 284,5 - 298 \cdot 1,0 \ln \frac{582,5}{539,8} = 261,8 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}_a} \end{aligned}$$

e quindi risulta

$$\eta_{II} = \frac{e_2 - e_1}{|L_{12}|} = \frac{261,8}{284,5} = 0,92$$

contro un rendimento isoentropico dell'85%.

Poiché la compressione è adiabatica, non vi sono perdite energetiche,

mentre le perdite exergetiche sono pari a

$$\pi_{II} = \frac{m_a^* T_a (s_2 - s_1)}{e_c^0} = \frac{51,9 \cdot 22,7}{43500} = 2,7 \%$$

Nella camera di combustione non vi sono perdite energetiche poiché la combustione è adiabatica. Per quanto riguarda l'analisi exergetica, si può fare riferimento ancora all'Esempio 10.9, scrivendo

$$\begin{aligned} e_3 - e_f^0 &= c_{pu}(T_3 - T_0) - c_{pu} T_a \left[ \ln \left( \frac{T_3}{T_0} \right) - \frac{k-1}{k} \ln \left( \frac{p_3}{p_0} \right) \right] \\ &= 1,1(1300 - 298) - 1,1 \cdot 298 \left[ \ln \left( \frac{1300}{298} \right) - \frac{0,4}{1,4} \ln 8 \right] = 814,1 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}_f} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} e_2 - e_a^0 &= c_{pa}(T_2 - T_0) - c_{pa} T_a \left[ \ln \left( \frac{T_2}{T_0} \right) - \frac{k-1}{k} \ln \left( \frac{p_2}{p_0} \right) \right] \\ &= 284,5 - 1,0 \cdot 298 \left[ \ln \left( \frac{582,5}{298} \right) - \frac{0,4}{1,4} \ln 8 \right] = 261,9 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}_a} \end{aligned}$$

Pertanto, il rendimento di secondo principio è pari a

$$\begin{aligned} \eta_{II} &= \frac{m_{fu}^* (e_3 - e_f^0) - m_a^* (e_2 - e_a^0) - (e_c - e_c^0)}{e_c^0} \\ &= \frac{52,9 \cdot 814,1 - 51,9 \cdot 261,9 - 0}{43500} = 0,678 \end{aligned}$$

mentre le perdite exergetiche sono

$$\pi_{II} = \frac{e_c^0 - [m_{fu}^*(e_3 - e_f^0) - m_a^*(e_2 - e_a^0) - (e_c - e_c^0)]}{e_c^0}$$

$$= \frac{43500 - 29473}{43500} = 32,2 \%$$

Nella turbina si ha

$$L_{34} = h_3 - h_4 = c_{pu}(T_3 - T_4) = 1,1(1300 - 775,9) = 576,5 \text{ kJ / kg}_f$$

$$e_3 - e_4 = h_3 - h_4 - T_a(s_3 - s_4) = c_{pu}(T_3 - T_4) - c_{pu}T_a \ln \frac{T_4'}{T_4}$$

$$= 576,5 - 298 \cdot 1,1 \ln \left( \frac{717,7}{775,9} \right) = 602,0 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}_f}$$

e quindi risulta

$$\eta_{II} = \frac{L_{34}}{e_3 - e_4} = \frac{576,5}{602,0} = 0,96$$

contro un rendimento isoentropico del 90%.

Poiché l'espansione è adiabatica, non vi sono perdite energetiche, mentre le perdite exergetiche sono pari a

$$\pi_{II} = \frac{m_{fu}^* T_a (s_4 - s_3)}{e_c^0} = \frac{52,9 \cdot 25,6}{43500} = 3,1 \%$$

Nella fase di scarico al camino, si perde tutto il contenuto energetico dei fumi. Si ha quindi una perdita pura, sia energetica

$$\pi_I = \frac{m_{fu}^*(h_4 - h_f^0)}{H_i^0} = \frac{c_{pu}(T_4 - T_0)}{H_i^0} = \frac{52,9 \cdot 1,1(775,9 - 298)}{43500} = 63,8 \%$$



che exergetica

$$\pi_{II} = \frac{m_{fu}^* (e_4 - e_f^0)}{e_c^0} = \frac{m_{fu}^*}{e_c^0} \left[ (h_4 - h_f^0) - c_{pu} T_a \ln \left( \frac{T_4}{T_0} \right) \right]$$

$$= \frac{52,9}{43500} \left[ 1,1(775,9 - 298) - 1,1 \cdot 298 \ln \left( \frac{775,9}{298} \right) \right] = 25,8 \%$$

Tenuto conto dell'intero ciclo e delle perdite percentuali riferite all'energia/exergia fornite con il combustibile, si arriva alla Tabella 11.1. Come si era anticipato nel Paragrafo 10.9, le perdite ed i rendimenti di primo e di secondo principio sono uguali e pari, in questo caso, a

$$\eta_{imp} = (\eta_{II})_{imp} = 1 - \sum \pi = 1 - 0,638 = 0,362$$

D'altronde, pur a parità di risultato globale, le distribuzioni delle perdite individuate negli approcci energetico ed exergetico risultano notevolmente diverse.

**Tabella 11.1** Perdite energetiche ed exergetiche nell'impianto con turbina a gas considerato nell'Esempio 11.4.

PERDITE	ENERGETICHE [%]	EXERGETICHE [%]
Compressore	=	2,7
Camera di combustione	=	32,2
Turbina	=	3,1
Camino	63,8	25,8
TOTALE	63,8	63,8

Tuttavia, sia l'analisi energetica sia quella exergetica indicano che le

perdite maggiori si hanno allo scarico al camino e, di conseguenza, spingono verso l'impiego di uno scambiatore rigenerativo o l'utilizzazione di qualche tecnologia che consenta un ulteriore sfruttamento dei fumi all'uscita della turbina. L'analisi energetica, però, non mette in evidenza le perdite termodinamiche durante la combustione e non tiene conto delle irreversibilità nelle fasi di compressione ed espansione.

## 11.5 CICLI DEI MOTORI A COMBUSTIONE INTERNA

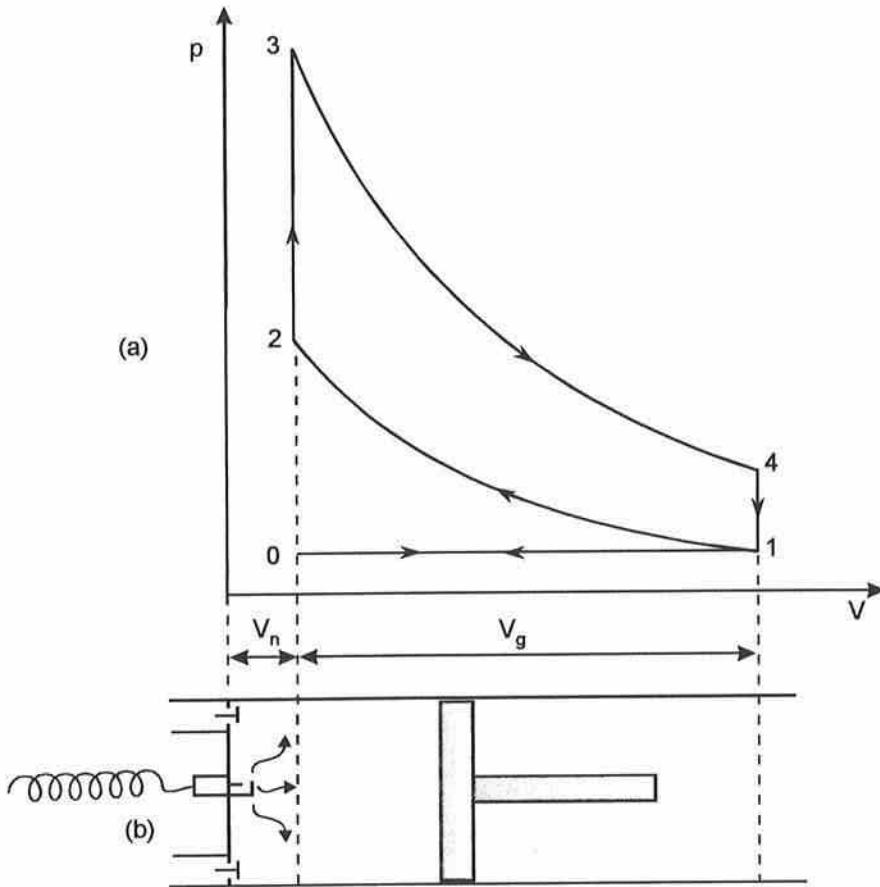
E' ben noto che i cicli ad aria standard schematizzano abbastanza realisticamente il comportamento termodinamico degli impianti con turbina a gas. Al contrario, è opportuno rilevare subito che gli scostamenti tra i cicli reali dei motori a combustione interna ed i corrispondenti cicli ad aria standard sono numerosi. Essi sono dovuti, essenzialmente, alle alte temperature raggiunte durante combustioni con coefficienti di eccesso d'aria prossimi a zero, nel caso dei motori ad accensione per scintilla, o con coefficienti di eccesso d'aria relativamente bassi ma rapporti di compressione molto elevati, nel caso dei motori ad accensione per compressione. Tra gli scostamenti si possono citare, in ordine d'importanza:

- fenomeni di dissociazione e riassociazione dei gas combusti,
- variazioni dei calori specifici con la temperatura,
- scambi termici con l'esterno ed irreversibilità interne durante le fasi di compressione ed espansione.

L'analisi termodinamica dei motori a combustione interna è quindi molto complessa e richiede sempre una verifica sperimentale. Se invece, come nei corsi di base, si trascurano completamente le irreversibilità, si raggiungono risultati solo qualitativi che, di solito, sono utilizzati unicamente per valutare gli effetti del rapporto di compressione sul rendimento di conversione e sul lavoro netto. In tale contesto, non hanno grande rilevanza pratica le analisi di secondo principio che, tuttavia, sono possibili e concettualmente interessanti.

### 11.5.1 Ciclo Otto

Il ciclo Otto costituisce il riferimento termodinamico per lo studio dei motori a combustione interna ad accensione per scintilla. Nel caso dei motori alternativi, la rappresentazione del ciclo reale può essere ottenuta riportando in un diagramma "indicatore", come in Fig. 11.14 (a), i punti corrispondenti ai valori di pressione e volume misurati durante il funzionamento. In questo modo, per un motore a quattro tempi del tipo schematizzato in Fig. 11.14 (b), si arriva ad un diagramma che presenta le fasi di:



**Figura 11.14** Motore a combustione interna alternativo ad accensione per scintilla: (a) diagramma indicatore e (b) schema funzionale.

- aspirazione ( $\overline{01}$ ), durante la quale lo stantuffo si muove dal punto morto superiore al punto morto inferiore, generando un volume  $V_g$  pari alla cilindrata ed introducendo la miscela d'aria e benzina nel cilindro;
- compressione ( $\overline{12}$ ), durante la quale si riduce adiabaticamente il volume occupato dalla miscela, secondo il rapporto volumetrico di compressione  $r_v = V_1 / V_2 (= 1 + V_g / V_n) = v_1 / v_2$ ;
- combustione a volume costante ( $\overline{23}$ ), innescata da una scintilla emessa dalla candela;
- espansione adiabatica ( $\overline{34}$ ), durante la quale lo stantuffo si muove dal punto morto superiore al punto morto inferiore;
- scarico a volume costante ( $\overline{41}$ ), durante il quale i prodotti della combustione iniziano ad uscire dal cilindro, riportando la pressione al valore d'equilibrio con l'esterno;
- espulsione ( $\overline{10}$ ), durante la quale lo stantuffo si muove dal punto morto inferiore al punto morto superiore, completando l'evacuazione dei fumi.

Come indicato in Fig. 11.15, il ciclo Otto ad aria standard comprende le trasformazioni:

- compressione isoentropica ( $\overline{12}$ ),
- fornitura di calore a volume costante  $Q_{23}^+$  internamente reversibile,
- espansione isoentropica ( $\overline{34}$ ) e
- cessione di calore a volume costante  $Q_{41}^-$  internamente reversibile.

Il ciclo Otto differisce dal ciclo Joule soltanto per le fasi di scambio termico, che hanno luogo a volume costante anziché a pressione costante. Di conseguenza, l'analisi termodinamica è molto simile all'analisi corrispondente già condotta per il ciclo Joule. Il rendimento di primo principio è ancora espresso dalla relazione generale (11.1), qui ripetuta per comodità

$$\eta = \frac{L_n}{Q_{23}^+} = \frac{Q_{23}^+ + Q_{41}^-}{Q_{23}^+} = 1 + \frac{Q_{41}^-}{Q_{23}^+}$$

Assumendo che i calori specifici non dipendano dalla temperatura, si ha

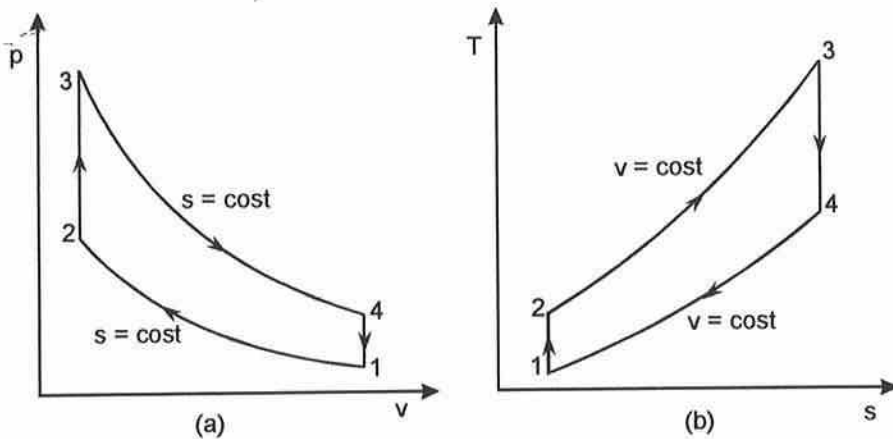
$$Q_{23}^+ = u_3 - u_2 = c_v(T_3 - T_2) \quad (11.30)$$

e

$$Q_{41}^- = u_1 - u_4 = c_v(T_1 - T_4) \quad (11.31)$$

in quanto le trasformazioni  $\overline{41}$  e  $\overline{23}$  avvengono in un sistema chiuso, dove il volume resta costante. Sostituendo le relazioni (11.30) ed (11.31) nella (11.1), si ottiene

$$\eta = 1 + \frac{u_1 - u_4}{u_3 - u_2} = 1 - \frac{c_v(T_4 - T_1)}{c_v(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} \quad (11.32)$$



**Figura 11.15** Ciclo Otto ideale ad aria standard rappresentato: (a) sul diagramma ( $p, v$ ) e (b) sul diagramma ( $T, s$ ).

Nel ciclo Otto ideale, i processi di compressione ed espansione sono isoentropici, per cui si ha

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{k-1} = r_v^{k-1} = \left(\frac{v_4}{v_3}\right)^{k-1} = \frac{T_3}{T_4} = r_T \quad (11.33)$$

dove

$$r_v = \frac{v_1}{v_2} = \frac{v_4}{v_3} \quad (11.34)$$

è il rapporto volumetrico di compressione ed  $r_T$  è il valore comune dei rapporti tra le temperature nelle trasformazioni isoentropiche. La (11.33), come la (11.6), implica la (11.8)

$$\frac{T_3}{T_2} = \frac{T_4}{T_1}$$

qui ripetuta per comodità. Di conseguenza, l'espressione del rendimento (11.32) può essere trasformata sino ad arrivare all'espressione classica per i cicli ideali

$$\begin{aligned} \eta &= 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \frac{T_4 / T_1 - 1}{T_3 / T_2 - 1} \\ &= 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{T_4}{T_3} = 1 - \frac{1}{r_T} = 1 - \frac{1}{r_v^{k-1}} \end{aligned} \quad (11.35)$$

Come si può notare, il rendimento del ciclo Otto ideale è pari al rendimento di un ciclo di Carnot che si svolge tra le temperature d'inizio compressione  $T_1$  e fine compressione  $T_2$  o, se si vuole, tra le temperature di fine espansione  $T_4$  ed inizio espansione  $T_3$ . Esso aumenta asintoticamente, all'aumentare di  $r_v$ , fino a raggiungere un valore unitario per un rapporto volumetrico di compressione infinito.

Nei motori reali, tuttavia, la temperatura minima  $T_1$  è prossima alla temperatura ambiente  $T_a$ , mentre la temperatura massima  $T_3$  non può superare la temperatura adiabatica di combustione. Di conseguenza, una volta fissato  $T_3 / T_1$ , il rapporto di compressione volumetrico può variare dall'unità fino ad un valore massimo teorico pari a

$$(r_v)_{\max} = \left( \frac{T_3}{T_1} \right)^{1/(k-1)} \quad (11.36)$$

come evidenziato nella Fig. 11.16.

Se, all'aumentare di  $r_v$  si mantiene costante  $T_3 / T_1$ , il ciclo Otto ideale tende a trasformarsi in un particolare ciclo di Carnot ad area nulla, nel quale il rendimento raggiunge il massimo mentre il lavoro netto si annulla.

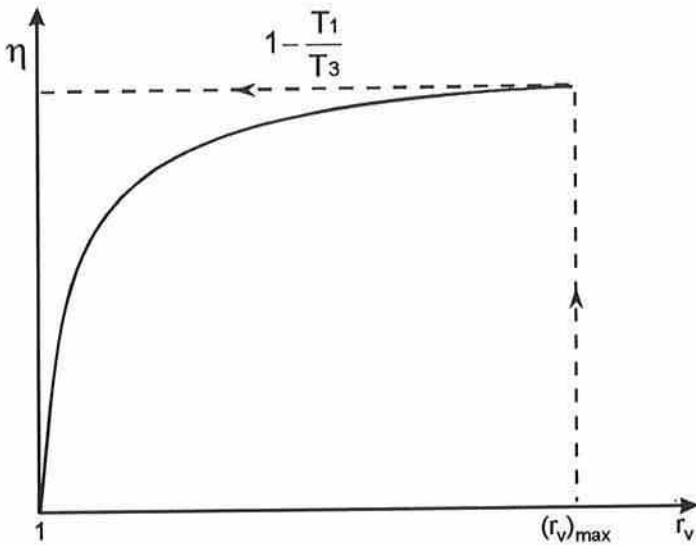


Figura 11.16 Rendimento di un ciclo Otto ideale.

Tuttavia, valori troppo elevati del rapporto di compressione, oltre a non avere interesse pratico, non sarebbero nemmeno realizzabili nei motori reali. Infatti, il rischio d'autoaccensione della miscela aria-benzina limita la temperatura di fine compressione  $T_2$  e, di conseguenza, il massimo valore di  $r_v$  utilizzabile. Pertanto i motori reali sono ottimizzati tenendo conto anche del massimo lavoro specifico, come illustrato nell'esempio numerico.

### Esempio 11.6

Per un ciclo Otto ideale ad aria standard ( $k = 1,4$ ), nell'ipotesi che si abbia  $T_3 / T_1 = 6$ , si determini il rapporto volumetrico di compressione ottimale ed, in corrispondenza ad esso, si calcolino

- il lavoro netto massimo adimensionale ed
- il rendimento del ciclo.

*Soluzione*

Nelle ipotesi in cui ci si pone, con un valore prefissato del rapporto  $T_3/T_1$ , il lavoro specifico in un ciclo Otto può essere espresso convenientemente dalla relazione

$$\begin{aligned} L_n &= Q_{23}^+ + Q_{41}^- = c_v [(T_3 - T_2) + (T_1 - T_4)] \\ &= c_v [(T_3 - T_4) + (T_1 - T_2)] = c_v T_1 \left[ \frac{T_3}{T_1} \left( 1 - \frac{T_4}{T_3} \right) + \left( 1 - \frac{T_2}{T_1} \right) \right] \end{aligned}$$

Pertanto, il lavoro adimensionale può essere espresso come

$$L_n^* = \frac{L_n}{c_v T_1} = \frac{T_3}{T_1} \left( 1 - \frac{1}{r_v^{k-1}} \right) + (1 - r_v^{k-1}) = \frac{T_3}{T_1} \left( 1 - \frac{1}{r_T} \right) + (1 - r_T)$$

dove

$$r_T = r_v^{k-1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4}$$

è il valore comune dei rapporti tra le temperature nelle trasformazioni isentropiche. Derivando due volte, rispetto ad  $r_T$ , l'espressione del lavoro, e verificando che il valore per cui si annulla la derivata prima sia un massimo, si trova

$$(r_T)_{opt} = (r_v)_{opt}^{k-1} = \sqrt{\frac{T_3}{T_1}} = (r_v)_{max}^{(k-1)/2}$$

Pertanto, il rapporto volumetrico di compressione ottimale

$$(r_v)_{opt} = \sqrt{(r_v)_{max}} = \left( \frac{T_3}{T_1} \right)^{1/[2(k-1)]}$$



è pari alla radice quadrata del rapporto di compressione massimo. Inoltre, in corrispondenza al rapporto di compressione ottimale, le temperature di fine compressione e fine espansione sono uguali e pari a

$$T_2 = T_4 = \sqrt{T_1 T_3}$$

È appena il caso di far notare che, nelle vicinanze del rapporto di compressione volumetrico ottimale, i motori producono la potenza voluta elaborando la portata minima di fluido. Ciò consente di ridurre ingombri, pesi e costi di costruzione.

Nella situazione ipotizzata nell'esempio, si ha

$$(r_v)_{out} = \left(\frac{T_3}{T_1}\right)^{1/[2(k-1)]} = 6^{1/[2(1,4-1)]} = 9,39$$

ovvero un valore vicino a quello reale per un motore a ciclo Otto. In corrispondenza a tale rapporto di compressione, il rendimento vale

$$\eta = 1 - \frac{1}{(r_v)_{out}^{k-1}} = 1 - \frac{1}{(r_T)_{out}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{6}} = 0,592$$

Si noti che il rapporto di compressione volumetrico massimo, in corrispondenza al quale si raggiunge il rendimento di Carnot

$$\eta = \eta_{Carnot} = 1 - \frac{T_1}{T_3} = 1 - \frac{1}{6} = 0,83$$

è pari a

$$(r_v)_{max} = \left(\frac{T_3}{T_1}\right)^{1/(k-1)} = 6^{1/(1,4-1)} = 88,18 \quad (= 9,39^2)$$

ed è quindi incompatibile con qualunque realizzazione motoristica.

**Esempio 11.7**

Con riferimento al ciclo ideale rappresentato in Fig. 11.15, si mettano in relazione tra loro i rendimenti di primo e di secondo principio di un impianto motore a ciclo Otto ideale assumendo

- masse uguali, e pari ad  $m_a$ , per l'aria ed i fumi,
- potere calorifico inferiore uguale al potere exergetico del combustibile,
- combustione adiabatica e
- condizioni ambiente rappresentate dal punto 1.

*Soluzione*

Il ciclo Otto è costituito da una successione di 4 fasi che si svolgono in un sistema chiuso. Da qui l'interesse concettuale dell'esempio che consente di applicare le metodologie d'analisi exergetica dei sistemi chiusi. L'exergia ottenuta, sia dal ciclo sia dall'impianto, è pari al lavoro specifico netto

$$L_n = Q_{23}^+ + Q_{41}^- = (u_3 - u_2) - (u_4 - u_1)$$

Poiché la combustione ha luogo a volume costante, l'exergia specifica fornita al ciclo durante tale fase è pari a

$$a_3 - a_2 = (u_3 - u_2) - T_a(s_3 - s_2) + p_a(v_3 - v_2) = (u_3 - u_2) - T_a(s_3 - s_2)$$

ed è diversa dall'exergia specifica fornita all'impianto che, nell'ipotesi di combustione adiabatica, è pari a

$$\frac{m_c e_c}{m_a} \cong \frac{m_c H_i}{m_a} = u_3 - u_2$$

Nell'ipotesi di combustione adiabatica, l'energia fornita al ciclo è pari a

$$Q_{23}^+ = u_3 - u_2$$

e coincide con l'energia fornita all'impianto.

Poiché la compressione e l'espansione sono isoentropiche, nel ciclo si hanno perdite exergetiche soltanto allo scarico, dove è dispersa all'esterno tutta l'exergia ancora contenuta nei fumi. Dal momento che lo scarico ha luogo a volume costante, tali perdite sono pari a

$$a_4 - a_1 = (u_4 - u_1) - T_a(s_4 - s_1) + p_a(v_4 - v_1) = (u_4 - u_1) - T_a(s_4 - s_1)$$

e coincidono con l'intera perdita exergetica del ciclo, essendo

$$\begin{aligned} & \text{exergia fornita al ciclo} - \text{exergia ottenuta dal ciclo} = \\ & = [(u_3 - u_2) - T_a(s_3 - s_2)] - [(u_3 - u_2) - (u_4 - u_1)] \\ & = (u_4 - u_1) - T_a(s_3 - s_2) = (u_4 - u_1) - T_a(s_4 - s_1) \end{aligned}$$

Nell'impianto si hanno, in aggiunta, le perdite exergetiche in camera di combustione

$$\frac{m_c}{m_a} e_c - (a_3 - a_2) = (u_3 - u_2) - [(u_3 - u_2) - T_a(s_3 - s_2)] = T_a(s_3 - s_2)$$

Nel ciclo e nell'impianto si hanno le stesse perdite energetiche e tali perdite, pari a

$$|Q_{41}^-| = u_4 - u_1$$

sono localizzate allo scarico, dove viene dispersa all'esterno tutta l'energia ancora contenuta nei fumi.

I rendimenti d'impianto di primo e di secondo principio sono uguali, in quanto si ha

$$(\eta_{II})_{imp} = \frac{L_n}{m_c e_c / m_a} = \frac{(u_3 - u_2) - (u_4 - u_1)}{u_3 - u_2} = \frac{L_n}{m_c H_i / m_a} = \eta_{imp}$$

Al contrario, il rendimento di secondo principio del ciclo è superiore al rendimento di conversione del ciclo, in quanto si ha

$$\eta_{II} = \frac{L_n}{a_3 - a_2} = \frac{(u_3 - u_2) - (u_4 - u_1)}{(u_3 - u_2) - T_a(s_3 - s_2)} > \frac{(u_3 - u_2) - (u_4 - u_1)}{(u_3 - u_2)} = \eta$$

poiché al denominatore dell'espressione del rendimento di secondo principio compare il valore exergetico della quantità di calore fornita, e non l'intera quantità di calore.

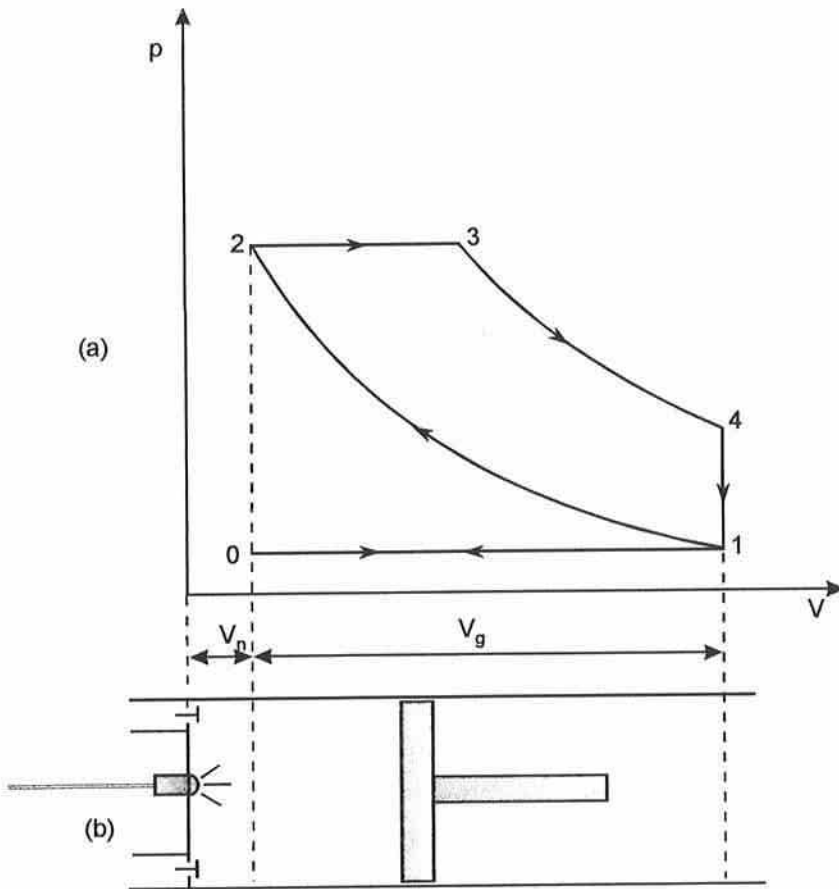
### 11.5.2 Ciclo Diesel

Il ciclo Diesel costituisce il riferimento termodinamico per lo studio dei motori a combustione interna ad accensione per compressione. Il ciclo reale può essere rappresentato riportando in un diagramma, come in Fig. 11.17 (a), i punti corrispondenti ai valori di pressione e volume misurati durante il funzionamento. In questo modo per un motore lento a quattro tempi, del tipo schematizzato in Fig. 11.17 (b), si arriva ad un diagramma che presenta le fasi di:

- aspirazione ( $\overline{01}$ ), durante la quale lo stantuffo si muove dal punto morto superiore al punto morto inferiore, generando un volume  $V_g$  pari alla cilindrata ed introducendo la sola aria nel cilindro;
- compressione ( $\overline{12}$ ), durante la quale si riduce adiabaticamente il volume occupato dall'aria, secondo il rapporto volumetrico di compressione  $r_v = V_1 / V_2 (= 1 + V_g / V_n) = v_1 / v_2$ ;
- combustione a pressione costante ( $\overline{23}$ ), caratterizzata dal rapporto volumetrico di combustione  $r_c = V_3 / V_2 = v_3 / v_2$ , durante la quale la pressione si mantiene costante mentre è progressivamente bruciato il com-

bustibile iniettato nel cilindro;

- espansione adiabatica ( $\overline{34}$ ), durante la quale lo stantuffo raggiunge il punto morto inferiore;
- scarico a volume costante ( $\overline{41}$ ), durante il quale i prodotti della combustione iniziano ad uscire dal cilindro, riportando la pressione al valore d'equilibrio con l'esterno;
- espulsione ( $\overline{10}$ ), durante la quale lo stantuffo si muove dal punto morto inferiore al punto morto superiore, completando l'evacuazione dei fumi.

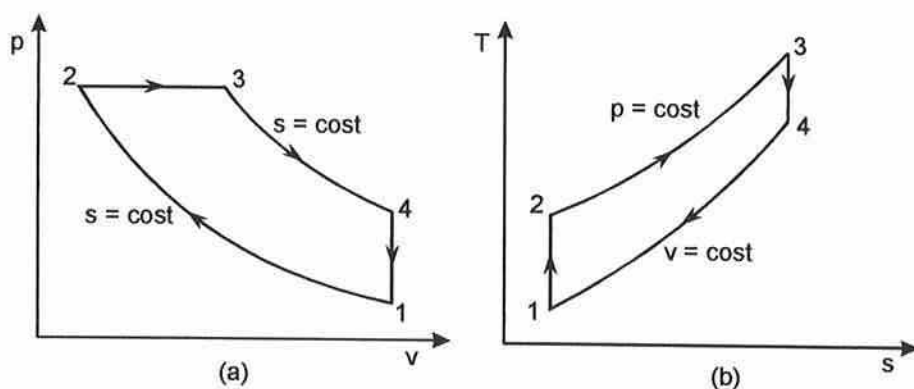


**Figura 11.17** Motore a combustione interna alternativo lento, ad accensione per compressione: (a) diagramma indicatore e (b) schema funzionale.

Rispetto ai motori ad accensione per scintilla, le differenze più importanti riguardano le fasi d'aspirazione e compressione, durante le quali si opera con la sola aria e non con una miscela d'aria e combustibile. Nei motori a ciclo Diesel non vi sono quindi limiti al rapporto di compressione derivanti dalla necessità di evitare accensioni premature del combustibile ma, all'opposto, una temperatura elevata di fine compressione facilita l'autoaccensione del combustibile e quindi favorisce il funzionamento.

Come indicato in Fig. 11.18, il ciclo Diesel ideale ad aria standard comprende le trasformazioni:

- compressione isoentropica ( $\overline{12}$ ),
- fornitura di calore a pressione costante  $Q_{23}^+$  internamente reversibile,
- espansione isoentropica ( $\overline{34}$ ) e
- cessione di calore a volume costante  $Q_{41}^-$  internamente reversibile.



**Figura 11.18** Ciclo Diesel ideale ad aria standard rappresentato: (a) sul diagramma ( $p, v$ ) e (b) sul diagramma ( $T, s$ ).

Procedendo come nel caso del ciclo Otto, il rendimento di primo principio di un ciclo Diesel può essere definito mediante l'espressione generale (11.1), ripetuta per comodità

$$\eta = \frac{L_n}{Q_{23}^+} = \frac{Q_{23}^+ + Q_{41}^-}{Q_{23}^+} = 1 + \frac{Q_{41}^-}{Q_{23}^+}$$

Assumendo che i calori specifici non dipendano dalla temperatura, il calore ceduto a volume costante è dato ancora da

$$Q_{41}^- = u_1 - u_4 = c_v(T_1 - T_4)$$

mentre il calore fornito a pressione costante è pari a

$$\begin{aligned} Q_{23}^+ &= u_3 - u_2 + L_{23} = c_v(T_3 - T_2) + p(v_3 - v_2) \\ &= c_v(T_3 - T_2) + R(T_3 - T_2) = c_p(T_3 - T_2) \end{aligned} \quad (11.37)$$

Sostituendo le relazioni precedenti nell'espressione del rendimento, si ottiene

$$\eta = 1 - \frac{c_v(T_4 - T_1)}{c_p(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{k(T_3 - T_2)} \quad (11.38)$$

Per il processo isoentropico di compressione vale ancora la relazione (11.33), scritta nella forma

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{k-1} = r_v^{k-1}$$

mentre si può definire un rapporto volumetrico di combustione a pressione costante, come

$$\frac{v_3}{v_2} = \frac{T_3}{T_2} = r_c \quad (11.39)$$

Infine, con riferimento al processo isoentropico d'espansione, si ha

$$\frac{T_4}{T_2} = \frac{T_3}{T_2} \frac{T_4}{T_3} = r_c \left(\frac{v_3}{v_4}\right)^{k-1} = r_c \left(\frac{v_3 v_2}{v_2 v_4}\right)^{k-1} = r_c r_c^{k-1} \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{k-1} = \frac{r_c^k}{r_v^{k-1}} \quad (11.40)$$

Di conseguenza, l'espressione (11.38) del rendimento può essere tra-

sformata sino ad arrivare all'espressione classica per i cicli ideali

$$\begin{aligned}\eta &= 1 - \frac{T_4 - T_1}{k(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_2(T_4/T_2 - T_1/T_2)}{k T_2(T_3/T_2 - 1)} \\ &= 1 - \frac{T_4/T_2 - T_1/T_2}{k(T_3/T_2 - 1)} = 1 - \frac{1}{r_v^{k-1}} \left[ \frac{r_c^k - 1}{k(r_c - 1)} \right]\end{aligned}\quad (11.41)$$

Nella (11.41) il termine entro parentesi quadre è sempre maggiore di 1, poiché il rapporto volumetrico di combustione  $r_c$  è maggiore di 1, ma tende ad 1 quando  $r_c$  tende ad 1. Dal punto di vista matematico, tale comportamento può essere facilmente evidenziato derivando numeratore e denominatore del termine entro parentesi e ponendo  $r_c = 1$  nell'espressione risultante. Invece dal punto di vista fisico si può osservare che, per  $r_c = 1$ , non vi è fornitura di calore ed il ciclo Diesel degenera in un ciclo Otto ad area nulla, di nessun interesse pratico.

Dalla rappresentazione della (11.41), riportata nella Fig. 11.19, si nota che, a parità di rapporto volumetrico di compressione, il rendimento del ciclo Diesel ideale è sempre minore del rendimento del ciclo Otto ideale avente lo stesso rapporto volumetrico di compressione. I motori a ciclo Diesel, tuttavia, possono operare con rapporti di compressione molto più elevati rispetto ai motori a ciclo Otto e quindi, generalmente, sono caratterizzati da rendimenti più elevati. Inoltre, come si vede anche dalla figura, esistono valori limite inferiori  $r_v = r_c$  per il rapporto volumetrico di compressione dei cicli Diesel. In corrispondenza a tali valori si ha  $v_4 (= v_1) = v_3$  e l'espansione  $\overline{34}$  si riduce ad un solo punto.

A conclusione del paragrafo si vuol far notare che, una volta fissato il rapporto  $T_3/T_1$ , i valori assunti da  $r_v$  ed  $r_c$  non sono più indipendenti ma sono legati dalla relazione

$$\frac{T_3}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} \frac{T_2}{T_1} = r_c r_v^{k-1}\quad (11.42)$$



Dal punto di vista fisico ciò significa che, all'aumentare del rapporto di compressione volumetrico, il rapporto delle temperature resta costante solo se diminuisce il rapporto volumetrico di combustione, ovvero la fornitura di calore.

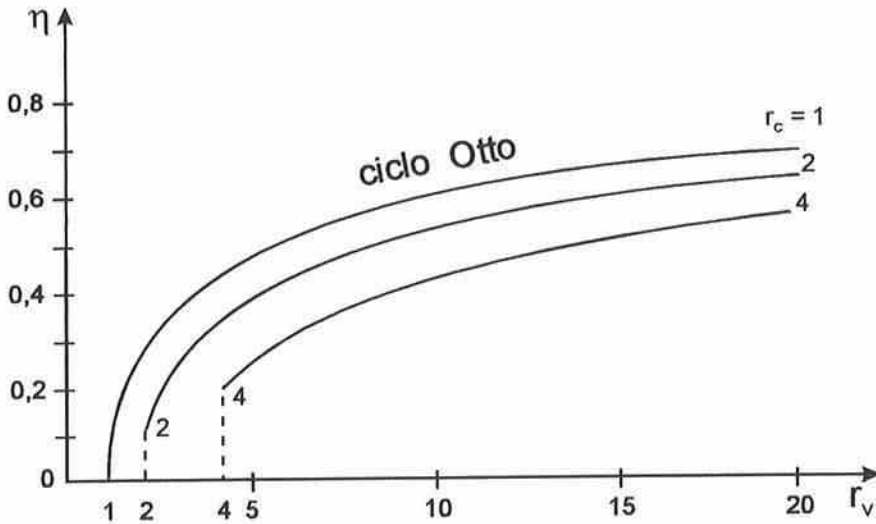


Figura 11.19 Rendimenti del ciclo Diesel ideale ad aria standard.

### Esempio 11.8

Per un ciclo Diesel ideale ad aria standard ( $k = 1,4$ ), nell'ipotesi che si abbia  $T_3 / T_1 = 5$ , si determini il rapporto volumetrico di compressione ottimale ed, in corrispondenza ad esso, si calcolino

- il lavoro netto massimo adimensionale ed
- il rendimento del ciclo.

### Soluzione

Nelle ipotesi in cui ci si pone, con un valore prefissato del rapporto  $T_3 / T_1$ , il lavoro specifico in un ciclo Diesel può essere espresso come

$$\begin{aligned}
 L_n &= Q_{23}^+ + Q_{41}^- = c_p(T_3 - T_2) + c_v(T_1 - T_4) \\
 &= c_v T_1 \left[ k \frac{T_3}{T_1} \left( 1 - \frac{T_2}{T_3} \right) + \left( 1 - \frac{T_4}{T_2} \frac{T_2}{T_1} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Pertanto, il lavoro adimensionale può essere espresso come

$$L_n^* = \frac{L_n}{c_v T_1} = k \frac{T_3}{T_1} \left( 1 - \frac{1}{r_c} \right) + \left( 1 - \frac{r_c^k}{r_v^{k-1}} r_v^{k-1} \right) = k \frac{T_3}{T_1} \left( 1 - \frac{1}{r_c} \right) + (1 - r_c^k)$$

Derivando due volte, rispetto ad  $r_c$ , l'espressione del lavoro, e verificando che il valore per cui si annulla la derivata prima sia un massimo, si trova

$$(r_c)_{ott} = \left( \frac{T_3}{T_1} \right)^{1/(k+1)}$$

Tenendo conto della (11.42), si ottiene quindi anche

$$(r_v)_{ott} = \left( \frac{T_3}{T_1} \right)^{k/(k^2-1)}$$

cioè il valore corrispondente del rapporto volumetrico di compressione ottimale.

Nella situazione ipotizzata nell'esempio, si ha

$$(r_c)_{ott} = \left( \frac{T_3}{T_1} \right)^{1/(k+1)} = 5^{1/2,4} = 1,96$$

ed

$$(r_v)_{ott} = \left( \frac{T_3}{T_1} \right)^{k/(k^2-1)} = 5^{1,4/(1,4^2-1)} = 10,46$$

In corrispondenza ai valori ottimali così trovati, il rendimento vale

$$\eta = 1 - \frac{1}{(r_v)_{ott}^{k-1}} \left\{ \frac{(r_c)_{ott}^{k-1}}{k[(r_c)_{ott} - 1]} \right\}$$

$$= 1 - \frac{1}{10,46^{0,4}} \left[ \frac{1,96^{1,4} - 1}{1,4(1,96 - 1)} \right] = 1 - 0,39 \cdot 1,16 = 0,55$$

mentre il rendimento del ciclo Otto, con lo stesso rapporto di compressione volumetrico, è pari a 0,61 ( $= 1 - 0,39$ ) ed il rendimento di Carnot, per il rapporto di temperature prefissato, vale

$$\eta = \eta_{Carnot} = 1 - \frac{T_1}{T_3} = 1 - \frac{1}{5} = 0,80$$

Non va dimenticato, tuttavia, che nei motori a ciclo Diesel è consentito operare con rapporti volumetrici di compressione che arrivano a circa il doppio del valore ottimale qui trovato. Se, ad esempio, si avesse avuto  $r_v = 20$ , con  $T_3 / T_1 = 5$  si sarebbe ottenuto

$$r_c = \left( \frac{T_3}{T_1} \right) r_v^{1-k} = 5 \cdot 20^{-0,4} = 1,51$$

e dalla (11.41) sarebbe seguito che

$$\eta = 1 - \frac{1}{20^{0,4}} \left[ \frac{1,51^{1,4} - 1}{1,4(1,51 - 1)} \right] = 1 - 0,30 \cdot 1,09 = 0,67$$

ovvero un valore più alto di quello del ciclo Otto considerato nell'Esempio 11.5, nonostante il valore più basso del rapporto delle temperature.

**Esempio 11.9**

Con riferimento al ciclo ideale rappresentato in Fig. 11.18, si mettano in relazione tra loro i rendimenti di primo e di secondo principio di un impianto motore a ciclo Diesel ideale assumendo

- masse uguali, e pari ad  $m_a$ , per l'aria ed i fumi,
- potere calorifico inferiore uguale al potere exergetico del combustibile,
- combustione adiabatica e
- condizioni ambiente rappresentate dal punto 1.

*Soluzione*

Il ciclo Diesel è costituito da una successione di 4 fasi che si svolgono in un sistema chiuso. Da qui l'interesse concettuale dell'esempio che consente di applicare le metodologie d'analisi exergetica dei sistemi chiusi. L'exergia ottenuta, sia dal ciclo sia dall'impianto, è pari al lavoro specifico netto

$$L_n = Q_{23}^+ + Q_{41}^- = (h_3 - h_2) - (u_4 - u_1)$$

Poiché la combustione ha luogo a pressione costante e con variazione di volume, l'exergia specifica fornita al ciclo durante tale fase è valutabile come

$$\begin{aligned} (a_3 - a_2) + L'_{23} &= [(u_3 - u_2) - T_a(s_3 - s_2) + p_a(v_3 - v_2)] \\ &+ (p_3 - p_a)(v_3 - v_2) = (h_3 - h_2) - T_a(s_3 - s_2) \end{aligned}$$

ed è diversa dall'exergia specifica fornita all'impianto che, nell'ipotesi di combustione adiabatica, è pari a

$$\frac{m_c e_c}{m_a} \cong \frac{m_c H_i}{m_a} = h_3 - h_2$$

Nell'ipotesi di combustione adiabatica, l'energia fornita al ciclo è pari

a

$$Q_{23}^+ = h_3 - h_2$$

e coincide con l'energia fornita all'impianto.

Poiché la compressione e l'espansione sono isoentropiche, nel ciclo si hanno perdite exergetiche soltanto allo scarico, dove viene dispersa all'esterno tutta l'exergia ancora contenuta nei fumi. Dal momento che lo scarico ha luogo a volume costante, tali perdite sono pari a

$$a_4 - a_1 = (u_4 - u_1) - T_a(s_4 - s_1) + p_a(v_4 - v_1) = (u_4 - u_1) - T_a(s_4 - s_1)$$

e coincidono con l'intera perdita exergetica del ciclo, essendo

$$\begin{aligned} & \text{exergia fornita al ciclo} - \text{exergia ottenuta dal ciclo} = \\ & = [(h_3 - h_2) - T_a(s_3 - s_2)] - [(h_3 - h_2) - (u_4 - u_1)] \\ & = (u_4 - u_1) - T_a(s_3 - s_2) = (u_4 - u_1) - T_a(s_4 - s_1) \end{aligned}$$

Nell'impianto si hanno, in aggiunta, le perdite exergetiche in camera di combustione

$$\frac{m_c}{m_a} e_c - [(h_3 - h_2) - T_a(s_3 - s_2)] = T_a(s_3 - s_2)$$

Nel ciclo e nell'impianto si hanno le stesse perdite energetiche e tali perdite, pari a

$$|Q_{41}^-| = u_4 - u_1$$

sono localizzate allo scarico, dove viene dispersa all'esterno tutta l'energia ancora contenuta nei fumi.

I rendimenti d'impianto di primo e di secondo principio sono uguali,

in quanto si ha

$$(\eta_{II})_{imp} = \frac{L_n}{m_c e_c / m_a} = \frac{(h_3 - h_2) - (u_4 - u_1)}{h_3 - h_2} = \frac{L_n}{m_c H_i / m_a} = \eta_{imp}$$

Al contrario, il rendimento di secondo principio del ciclo è superiore al rendimento di conversione del ciclo, in quanto si ha

$$\eta_{II} = \frac{L_n}{(a_3 - a_2) + L'_{23}} = \frac{(h_3 - h_2) - (u_4 - u_1)}{(h_3 - h_2) - T_a(s_3 - s_2)} > \frac{(h_3 - h_2) - (u_4 - u_1)}{(h_3 - h_2)} = \eta$$

poiché al denominatore dell'espressione del rendimento di secondo principio compare il valore exergetico della quantità di calore fornita, e non l'intera quantità di calore.

### 11.5.3 Ciclo Misto

Generalmente, i cicli reali dei motori a combustione interna alternativi non sono schematizzabili mediante il ciclo Otto od il ciclo Diesel. Infatti, nei motori ad accensione per scintilla la combustione non ha luogo a volume costante mentre, nei motori veloci ad accensione per compressione, la combustione non ha luogo a pressione costante. Pertanto nella maggior parte dei casi pratici, una schematizzazione più realistica può essere ottenuta ipotizzando un ciclo misto, del tipo rappresentato in Fig. 11.20, nel quale la combustione abbia luogo, in parte, a volume costante ed, in parte, a pressione costante.

Procedendo come nei casi precedenti, il rendimento di primo principio di un ciclo misto può essere espresso come

$$\eta = \frac{L_n}{Q_{23}^+ + Q_{34}^+} = \frac{Q_{23}^+ + Q_{34}^+ + Q_{51}^-}{Q_{23}^+ + Q_{34}^+} = 1 + \frac{Q_{51}^-}{Q_{23}^+ + Q_{34}^+} \quad (11.43)$$

Assumendo che i calori specifici non dipendano dalla temperatura, si ha

$$Q_{23}^+ = u_3 - u_2 = c_v(T_3 - T_2) \quad (11.44)$$

$$Q_{51}^- = u_1 - u_5 = c_v(T_1 - T_5) \quad (11.45)$$

e

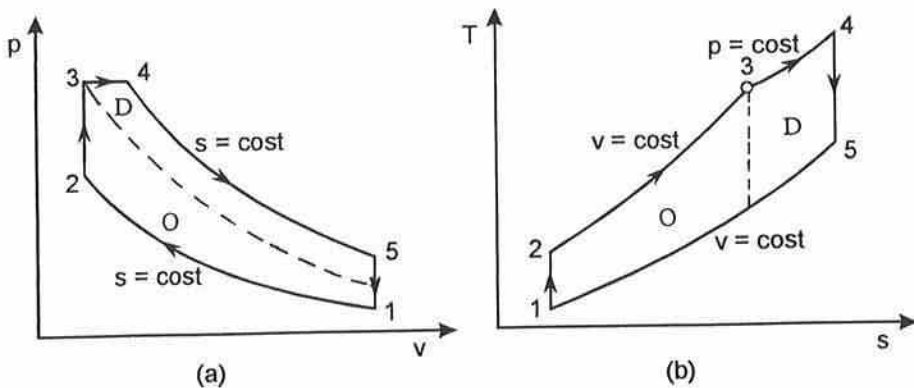
$$\begin{aligned} Q_{34}^+ &= u_4 - u_3 + L_{34} = c_v(T_4 - T_3) + p(v_4 - v_3) \\ &= c_v(T_4 - T_3) + R(T_4 - T_3) = c_p(T_4 - T_3) \end{aligned} \quad (11.46)$$

Sostituendo le (11.44) - (11.46) nella (11.43), si ottiene

$$\eta = 1 - \frac{c_v(T_5 - T_1)}{c_v(T_3 - T_2) + c_p(T_4 - T_3)} = 1 - \frac{T_5 - T_1}{(T_3 - T_2) + k(T_4 - T_3)} \quad (11.47)$$

La (11.47), a sua volta, può essere scritta nella stessa forma dei rendimenti dei cicli Otto e Diesel, purché si definisca un ulteriore parametro, detto rapporto delle pressioni

$$\bar{r}_p = \frac{p_3}{p_2} \quad (11.48)$$



**Figura 11.20** Ciclo misto ad aria standard rappresentato: (a) sul diagramma  $(p, v)$  e (b) sul diagramma  $(T, s)$ . Si noti la suddivisione ideale nelle due zone Otto (O) e Diesel (D).

Mediante alcuni passaggi algebrici, non riportati per brevità, dalle relazioni precedenti si può ricavare l'espressione

$$\eta = 1 - \frac{1}{r_v^{k-1}} \left[ \frac{\tilde{r}_p r_c^k - 1}{(\tilde{r}_p - 1) + k \tilde{r}_p (r_c - 1)} \right] \quad (11.49)$$

che, per  $r_c = 1$ , fornisce il rendimento del ciclo Otto mentre, per  $\tilde{r}_p = 1$ , fornisce il rendimento del ciclo Diesel.

## 11.6 CICLI BITERMICI REVERSIBILI

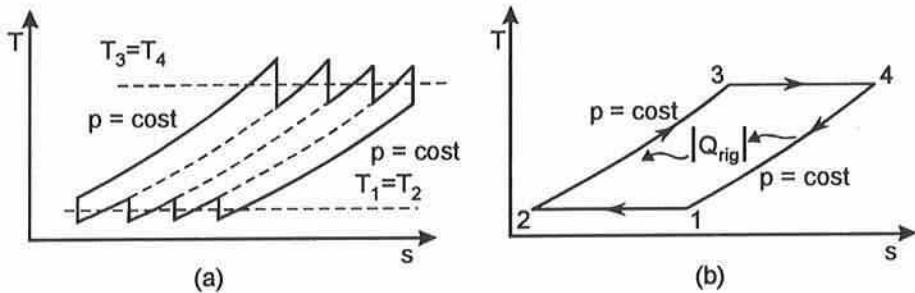
Nelle normali condizioni operative, e per lo stesso rapporto tra le temperature massima e minima, i cicli a gas esaminati finora hanno rendimenti inferiori al rendimento del ciclo di Carnot. D'altra parte il ciclo di Carnot, oltre a non essere di facile realizzazione pratica, è caratterizzato da valori molto bassi del lavoro specifico netto adimensionale  $L_n / (c_v T_{max})$ . Per convincersene, basta osservare la rappresentazione di Fig. 5.5 dove è evidente che la forma sottile ed allungata implica valori molto bassi dell'area. D'altra parte, come anticipato nel Paragrafo 4.4, esistono altri cicli bitermici reversibili che non soffrono di limitazioni inerenti il lavoro netto e sono suscettibili di realizzazione pratica in forma più o meno approssimata.

### 11.6.1 Ciclo Ericsson

Da un punto di vista teorico, il ciclo Ericsson può essere concepito come un ciclo Joule rigenerativo nel quale la compressione abbia luogo in un numero molto grande di stadi, ciascuno con refrigerazione intermedia ed, analogamente, l'espansione sia frazionata in un numero molto grande di stadi, ciascuno con post-combustione intermedia. Tale possibilità è evidenziata nella Fig. 11.21 dove si mostra, appunto, il passaggio dal ciclo Joule rigenerativo



pluristadio al ciclo Ericsson. Nel ciclo Ericsson, gli unici scambi termici con l'esterno sono isotermi ed hanno luogo alle temperature delle sorgenti, mentre i passaggi dalla temperatura massima a quella minima, e viceversa, sono di tipo rigenerativo ed hanno luogo a pressione costante. Di conseguenza, il ciclo Ericsson è caratterizzato dallo stesso rendimento di un ciclo di Carnot, operante tra le stesse temperature massima e minima.



**Figura 11.21** Rappresentazione, sul diagramma  $(T, s)$ , del ciclo Ericsson: (a) approssimato e (b) ideale.

### Esempio 11.10

Si dimostri che, per lo stesso valore del rapporto tra le temperature massima e minima, il rendimento del ciclo Ericsson è pari al rendimento del ciclo di Carnot.

#### Soluzione

Il rendimento di conversione di un ciclo Ericsson può essere espresso come

$$\eta = \frac{L_n}{Q_{34}^+} = \frac{Q_{34}^+ + Q_{12}^-}{Q_{34}^+} = 1 + \frac{Q_{12}^-}{Q_{34}^+}$$

dove, naturalmente, compaiono solo le quantità di calore scambiate con l'esterno. Il calore fornito a temperatura costante è dato da

$$Q_{34}^+ = T_{\max}(= T_3 = T_4) \cdot (s_4 - s_3)$$

mentre il calore ceduto a temperatura costante è dato da

$$Q_{12}^- = T_{\min} (= T_1 = T_2) \cdot (s_2 - s_1)$$

Sostituendo tali relazioni nell'espressione del rendimento, si ottiene

$$\eta = 1 - \frac{T_{\min}(s_1 - s_2)}{T_{\max}(s_4 - s_3)} = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}}$$

in quanto, sul diagramma  $(T, s)$ , le isobare sono curve parallele.

### 11.6.2 Ciclo Stirling

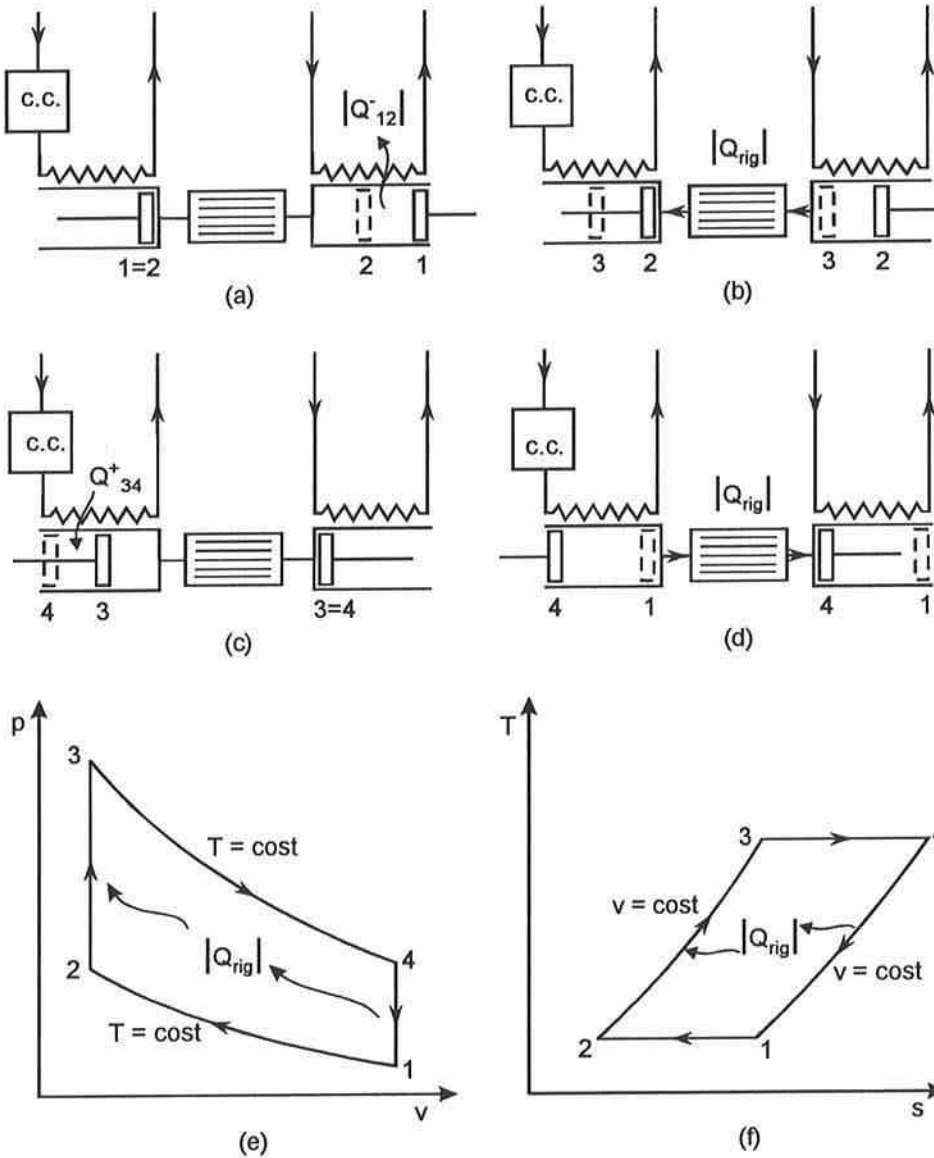
Il ciclo Stirling è un ciclo bitermico avente valori del rendimento uguali a quelli di un ciclo di Carnot, caratterizzato dalle stesse temperature massima e minima. Esso costituisce il riferimento termodinamico per gli omonimi motori alternativi a combustione esterna ed a circuito (interno) chiuso. I motori Stirling sono molto interessanti in quanto, oltre a fornire alti valori del rendimento, sono meno inquinanti dei normali motori alternativi, nei quali la combustione avviene all'interno del cilindro.

Nel ciclo Stirling gli unici scambi termici con l'esterno sono isotermi ed hanno luogo alle temperature delle sorgenti, mentre i passaggi dalla temperatura massima a quella minima, e viceversa, sono di tipo rigenerativo ed hanno luogo a volume costante. Infatti, durante la fase di raffreddamento, il fluido cede calore ad una matrice solida porosa e tale calore è poi restituito dalla matrice al fluido stesso durante la fase di riscaldamento. Il funzionamento di un motore Stirling, ed il ciclo termodinamico di riferimento, sono schematizzati in Fig. 11.22 dove, tuttavia, non ci si occupa del particolare cinematismo che regola il movimento dei due stantuffi. Come si vede, il motore Stirling presenta quattro fasi, durante le quali:

(a) il fluido è compresso a temperatura costante nel cilindro freddo, cedendo

all'esterno la quantità di calore  $Q_{12}^-$ ;

(b) il fluido è trasferito a volume specifico costante dal cilindro freddo al cilindro caldo, assorbendo dal rigeneratore la quantità di calore  $|Q_{rig}|$ ;



**Figura 11.22** Ciclo Stirling: schema funzionale (a) - (b) - (c) - (d) e rappresentazione su: (e) diagramma  $(p, v)$  ed (f) diagramma  $(T, s)$ .

- (c) il fluido è espanso a temperatura costante nel cilindro caldo, assorbendo dall'esterno la quantità di calore  $Q_{34}^+$ ;
- (d) il fluido è trasferito a volume specifico costante dal cilindro caldo al cilindro freddo, cedendo al rigeneratore la quantità di calore  $|Q_{rig}|$ .

Il ciclo Stirling ideale comprende le trasformazioni:

- compressione isoterma con cessione di calore  $Q_{12}^-$ ,
- assorbimento del calore di rigenerazione a volume costante ( $\overline{23}$ ),
- espansione isoterma con assorbimento di calore  $Q_{34}^+$  e
- cessione del calore di rigenerazione a volume costante ( $\overline{41}$ ).

Poiché, come si è detto, gli unici scambi termici con l'esterno sono isotermi ed hanno luogo alla temperatura delle sorgenti, anche il ciclo Stirling è caratterizzato dallo stesso rendimento di un ciclo di Carnot operante tra le stesse temperature massima e minima.

### Esempio 11.11

Si dimostri che, per lo stesso valore del rapporto tra le temperature massima e minima, il rendimento del ciclo Stirling è pari al rendimento del ciclo di Carnot.

#### Soluzione

Procedendo come nell'esempio precedente, il rendimento di conversione di un ciclo Stirling può essere scritto nella forma

$$\eta = \frac{L_n}{Q_{34}^+} = \frac{Q_{34}^+ + Q_{12}^-}{Q_{34}^+} = 1 + \frac{Q_{12}^-}{Q_{34}^+}$$

dove, naturalmente, compaiono solo le quantità di calore scambiate con l'esterno. Il calore fornito a temperatura costante è dato da

$$Q_{34}^+ = T_{\max} (= T_3 = T_4) \cdot (s_4 - s_3)$$

mentre il calore ceduto a temperatura costante è dato da

$$Q_{12}^- = T_{\min} (= T_1 = T_2) \cdot (s_2 - s_1)$$

Sostituendo tali relazioni nell'espressione del rendimento, si ottiene

$$\eta = 1 - \frac{T_{\min}(s_1 - s_2)}{T_{\max}(s_4 - s_3)} = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}}$$

in quanto, sul diagramma  $(T, s)$ , le isocore sono curve parallele.

## 11.7 CONCLUSIONI

In questo capitolo ci si è occupati, essenzialmente, dei cicli diretti a gas schematizzati come cicli ad aria standard. Si è così giunti a valutare i rendimenti di primo principio dei cicli di riferimento per turbomotori e motori a combustione interna. Oltre ai cicli più frequentemente impiegati in pratica, si sono presi in esame il ciclo Ericsson ed il ciclo Stirling, quali esempi di cicli bitermici aventi lo stesso rendimento di un ciclo di Carnot che si svolga tra le stesse temperature massima e minima.

---

# CAPITOLO 12

## CICLI DIRETTI A VAPORE

---

### 12.1 GENERALITÀ

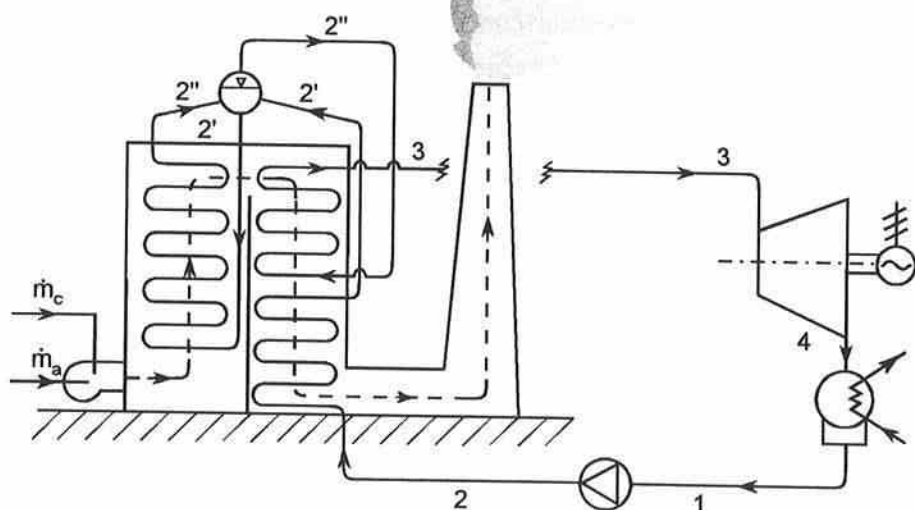
I cicli diretti a vapore costituiscono il riferimento termodinamico per la schematizzazione dei grandi impianti di produzione dell'energia elettrica. Come suggerito dal nome, nei cicli a vapore hanno luogo evaporazioni e condensazioni durante le quali il fluido di lavoro cambia fase. Il fluido di lavoro più utilizzato è l'acqua, date le favorevoli proprietà termodinamiche, il basso costo e la grande disponibilità, ma non mancano applicazioni particolari nelle quali sono impiegati altri fluidi.

Dal punto di vista termodinamico, la principale differenza tra i cicli diretti a vapore ed i cicli diretti a gas è costituita dalle modalità di compressione. La possibilità di comprimere un liquido, al posto di un gas, consente un notevole risparmio nel lavoro speso per unità di massa. Di conseguenza, nei cicli a vapore il lavoro speso durante la compressione è sempre molto minore del lavoro ottenuto durante l'espansione. Pertanto i cicli con turbine a vapore, a differenza di quelli con turbine a gas, praticamente non risentono delle irreversibilità nella fase di compressione. Per contro, gli impianti a vapore sono molto ingombranti per la presenza di componenti quali il generatore di vapore ed il condensatore e, di conseguenza, sono impiegati, prevalentemente, nella produzione d'energia elettrica su larga scala.

### 12.2 CICLO RANKINE

Per facilitare l'analisi termodinamica, un impianto atto a realizzare un ciclo

Rankine, a vapore saturo o surriscaldato, può essere schematizzato come in Fig. 12.1.



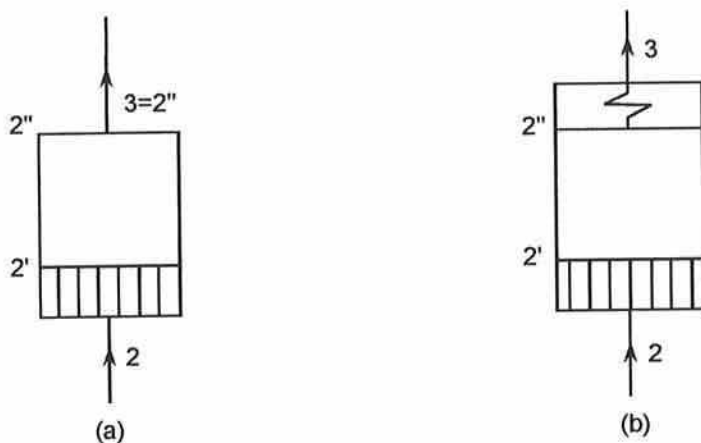
**Figura 12.1** Componenti di un impianto atto a realizzare un ciclo Rankine a vapore surriscaldato.

I simboli utilizzati per turbina ( $\overline{34}$ ), condensatore ( $\overline{41}$ ) e pompa ( $\overline{12}$ ) non danno luogo a particolari complicazioni grafiche. Per evitare anche le difficoltà di rappresentazione del generatore di vapore, è possibile impiegare i simboli illustrati in Fig. 12.2, dove si distingue tra

- economizzatore ( $\overline{22'}$ ), indicato con una serie di linee verticali, corrispondenti alla zona dove il liquido è portato alla temperatura d'evaporazione;

- evaporatore ( $\overline{2'2''}$ ), indicato con un rettangolo privo di tratteggi, corrispondente alla zona dove ha luogo l'evaporazione;
- eventuale surriscaldatore ( $\overline{2''3}$ ), indicato con un serpentino, corrispondente alla zona dove viene surriscaldato il vapore.

Si noti che, in assenza di surriscaldatore, il generatore produce vapore saturo e quindi il punto di uscita 3 coincide con il punto 2''. Inoltre, si può osservare che, nelle schematizzazioni di Fig. 12.1 e Fig. 12.2, si è fatto riferimento, implicitamente, a centrali termoelettriche tradizionali, nelle quali i generatori di vapore sono alimentati con combustibili fossili. Esistono, infatti, altre possibilità e, ad esempio, nelle centrali elettronucleari il calore è fornito da reattori a fissione, mentre nelle centrali eliotermiche il calore è fornito da un sistema di captazione che concentra le radiazioni solari sulla caldaia.

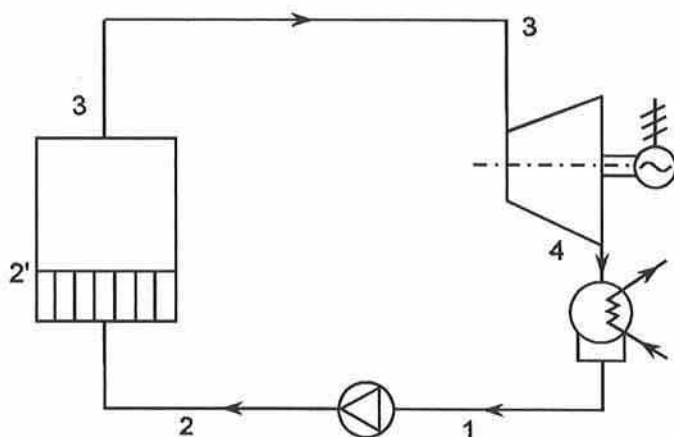


**Figura 12.2** Rappresentazioni simboliche di generatori di vapore: (a) senza surriscaldatore e (b) con surriscaldatore.

### 12.2.1 Ciclo Rankine a Vapore Saturo

Un impianto atto a realizzare un ciclo Rankine a vapore saturo può essere schematizzato come in Fig. 12.3.





**Figura 12.3** Schema funzionale di un impianto atto a realizzare un ciclo Rankine a vapore saturo.

Il ciclo Rankine ideale a vapore saturo, illustrato nella Fig. 12.4 con riferimento al fluido di lavoro acqua, comprende le trasformazioni:

- compressione isoentropica ( $\overline{12}$ ) nella pompa;
- fornitura di calore a pressione costante internamente reversibile  $Q_{23}^+$  nel generatore di vapore, con riscaldamento del liquido fino alla temperatura d'evaporazione ( $\overline{22'}$ ) e cambiamento di fase liquido-vapore ( $\overline{2'3}$ );
- espansione isoentropica ( $\overline{34}$ ) nella turbina;
- cessione di calore a pressione costante internamente reversibile  $Q_{41}^-$  nel condensatore, con cambiamento di fase vapore-liquido.

Il rendimento di conversione, o di primo principio, di un ciclo diretto è definito come rapporto tra il lavoro netto ottenuto e la quantità di calore fornita. A sua volta, il lavoro netto è valutabile come differenza tra il calore fornito ed il calore ceduto e quindi, nel caso del ciclo Rankine, il rendimento può essere scritto nella forma

$$\eta = \frac{L_n}{Q_{23}^+} = \frac{Q_{23}^+ + Q_{41}^-}{Q_{23}^+} = 1 + \frac{Q_{41}^-}{Q_{23}^+} \quad (12.1)$$

Se, come accade quasi sempre, è possibile trascurare le variazioni d'energia cinetica e potenziale, il primo principio della termodinamica, riferito a sistemi monodimensionali stazionari, porge

$$Q_{23}^+ = h_3 - h_2 \quad (12.2)$$

e

$$Q_{41}^- = h_1 - h_4 \quad (12.3)$$

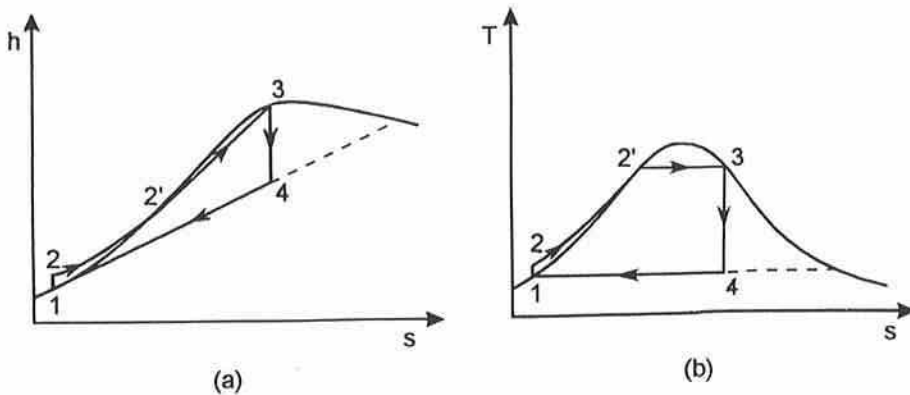
Sostituendo le relazioni (12.2) e (12.3) nella (12.1), si ottiene

$$\eta = 1 - \frac{h_4 - h_1}{h_3 - h_2} = \frac{(h_3 - h_4) - (h_2 - h_1)}{h_3 - h_2} \quad (12.4)$$

Si osservi che, nelle ipotesi in cui ci si pone, il lavoro netto poteva essere scritto anche come somma algebrica del lavoro  $L_e^+$ , ottenuto nella turbina, e del lavoro  $L_c^-$ , speso nella pompa

$$L_n = L_e^+ + L_c^- = (h_3 - h_4) + (h_1 - h_2) \quad (12.5)$$

giungendo così, per altra via, al numeratore della (12.4).



**Figura 12.4** Ciclo Rankine ideale, a vapore d'acqua saturo, rappresentato: (a) sul diagramma  $(h,s)$  e (b) sul diagramma  $(T,s)$ .

Fino a questo punto, non si è utilizzata alcuna ipotesi sulla reversibilità interna delle trasformazioni e, quindi, le (12.1) - (12.5) valgono per tutti i cicli Rankine. Se però si tiene conto del fatto che la compressione  $\overline{12}$  ha luogo isoentropicamente e con variazioni trascurabili d'energia cinetica e potenziale, si ottiene

$$|L_c^-| = h_2 - h_1 = \int_{p_1}^{p_2} v \, dp = v_\ell (p_2 - p_1) \quad (12.6)$$

dove il lavoro è proporzionale al volume specifico  $v_\ell$  dell'acqua allo stato liquido. Analogamente, se si tiene conto del fatto che l'espansione  $\overline{34}$  è isoentropica, per variazioni trascurabili d'energia cinetica e potenziale si ottiene

$$L_e^+ = h_3 - h_4 = - \int_{p_3}^{p_4} v \, dp = \int_{p_1}^{p_2} v \, dp = \bar{v}_v (p_2 - p_1) \quad (12.7)$$

dove il lavoro è proporzionale al volume specifico medio  $\bar{v}_v$  del vapore durante l'espansione dalla pressione massima alla pressione minima del ciclo. Poiché  $\bar{v}_v$  è molto più grande di  $v_\ell$ , nei cicli Rankine si può porre con buona approssimazione

$$L_n = L_e^+ \left( 1 - \frac{|L_c^-|}{L_e^+} \right) = L_e^+ \left( 1 - \frac{v_\ell}{\bar{v}_v} \right) \cong L_e^+ = (h_3 - h_4) \quad (12.8)$$

ottenendo così una relazione che si intuisce valida nella maggior parte delle situazioni di interesse pratico (anche se la dimostrazione rigorosa è possibile solo per trasformazioni isoentropiche). In base alle relazioni (12.5) e (12.8), l'espressione (12.4) si trova, talvolta, scritta nella forma semplificata

$$\eta \cong \frac{h_3 - h_4}{h_3 - h_1} \quad (12.9)$$

dove è implicita l'approssimazione

$$h_1 \cong h_2 \quad (12.10)$$

La relazione (12.9) è di più rapido impiego rispetto alla (12.4) in quanto, non richiedendo il calcolo delle condizioni dell'acqua all'uscita della pompa, è interamente basata su valori delle entalpie ricavati direttamente da tabelle o dal diagramma  $(h, s)$ .

### 12.2.2 Influenza delle Irreversibilità Interne

Nelle installazioni reali, espansioni e compressioni possono ancora essere considerate adiabatiche, ma non sono più isoentropiche. Di conseguenza, le irreversibilità interne implicano che il lavoro speso nella pompa sia maggiore, in modulo, del lavoro ideale e che il lavoro ottenuto nella turbina sia minore del lavoro ideale. Inoltre, le irreversibilità nel deflusso attraverso il generatore ed il condensatore causano perdite di carico che fanno diminuire il salto di pressione tra ingresso ed uscita della turbina, riducendo così anche il salto entalpico disponibile per l'espansione. Si può, tuttavia, osservare che le irreversibilità in fase di compressione influiscono poco sul rendimento globale di un ciclo a vapore in quanto, come si è detto, il lavoro della pompa è trascurabile rispetto al lavoro della turbina. Analogamente si può affermare che, in gran parte delle situazioni d'interesse pratico, le perdite di carico nel generatore e nel condensatore sono abbastanza piccole rispetto alla differenza tra le pressioni massima e minima di lavoro. Pertanto, in una stima di prima approssimazione del rendimento di un ciclo reale a vapore, è sufficiente prendere in considerazione la non isoentropicità dell'espansione in turbina, come indicato in Fig. 12.5.

Il rendimento di un ciclo Rankine reale è sempre definito mediante l'espressione (12.1) ricavabile, senza ipotesi restrittive, dal primo principio della termodinamica. Analogamente, restano valide anche per i cicli reali

l'espressione (12.4) e l'espressione semplificata (12.9) mentre, nell'ipotesi di non isoentropicità dell'espansione in turbina, l'unica difficoltà aggiuntiva è costituita dalla determinazione del punto di fine trasformazione. Se però è noto il rendimento isoentropico

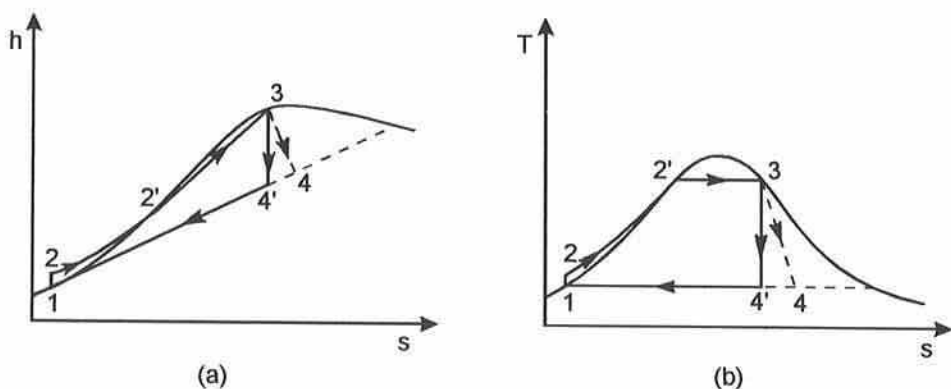
$$\eta_{ie} = \frac{h_3 - h_4}{h_3 - h_{4'}} \quad (12.11)$$

l'entalpia di fine espansione  $h_4$ , può essere ricavata facilmente dalla conoscenza di  $h_3$  ed  $h_{4'}$ .

La definizione (12.11) consente anche di riscrivere l'espressione approssimata del rendimento del ciclo, ponendo

$$\eta \cong \frac{h_3 - h_4}{h_3 - h_1} \cong \frac{h_3 - h_4}{h_3 - h_{4'}} \frac{h_3 - h_{4'}}{h_3 - h_1} = \eta_{ie} \eta_{rev} \quad (12.12)$$

e dimostrando quindi che il rendimento complessivo di un ciclo Rankine reale varia, pressoché linearmente, con il rendimento isoentropico della turbina.



**Figura 12.5** Ciclo Rankine reale, a vapore d'acqua saturo, rappresentato: (a) sul diagramma  $(h,s)$  e (b) sul diagramma  $(T,s)$ .

### 12.2.3 Miglioramenti del Ciclo a Vapore Saturo

Se la rappresentazione del ciclo di Rankine sul diagramma  $(h, s)$  consente una facile lettura delle entalpie, la rappresentazione sul diagramma  $(T, s)$  fornisce importanti indicazioni sui possibili miglioramenti termodinamici. Ad esempio, con riferimento alle rappresentazioni di Fig. 12.4 (b) e 12.5 (b) si può scrivere

$$Q_{23}^+ = \int_{s_2}^{s_3} T ds = \bar{T}_{23}(s_3 - s_2) \quad (12.13)$$

dove la temperatura media della trasformazione  $\bar{23}$  è l'ordinata di compenso. Infatti, la quantità di calore fornita durante la trasformazione reversibile  $\bar{23}$ , corrisponde all'area delimitata superiormente dalla  $\bar{23}$  stessa ed inferiormente dall'isoterma  $T = 0$  K. Analogamente, la quantità di calore ceduta durante la trasformazione reversibile  $\bar{41}$ , corrisponde all'area del rettangolo avente altezza pari a  $T_{41} = T_1 = T_4$  e base uguale alla differenza d'entropie tra i punti finale ed iniziale. Si ha quindi

$$|Q_{41}^-| = T_{41}(s_4 - s_1) = T_{41}(s_3 - s_2) \quad (12.14)$$

Pertanto, dalla definizione di rendimento (12.1) e dalle relazioni (12.13) e (12.14), risulta anche

$$\eta = 1 + \frac{Q_{41}^-}{Q_{23}^+} = 1 - \frac{T_{41}(s_3 - s_2)}{\bar{T}_{23}(s_3 - s_2)} = 1 - \frac{T_{41}}{\bar{T}_{23}} \quad (12.15)$$

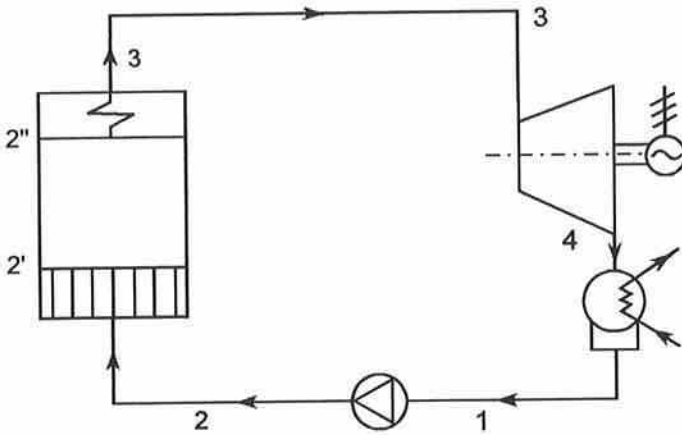
La (12.15) implica che, per aumentare il rendimento, si può diminuire la temperatura di condensazione  $T_{41}$  mantenendo costante la temperatura media di fornitura calore  $\bar{T}_{23}$ , ovvero aumentare la temperatura media di fornitura del calore  $\bar{T}_{23}$  mantenendo costante la temperatura di condensazione  $T_{41}$ .

Per diminuire la temperatura di condensazione, occorre utilizzare un condensatore efficiente, capace di condensare a temperature prossime a quella dell'ambiente. Dati i flussi termici in gioco, ciò richiede l'impiego di notevoli portate di fluido refrigerante, in genere acqua superficiale. Pertanto le centrali termoelettriche sono, quasi sempre, ubicate nelle vicinanze del mare, di laghi o di fiumi non soggetti a magre eccessive. L'impiego del condensatore consente di evitare lo scarico diretto in atmosfera che avrebbe luogo, obbligatoriamente, ad una temperatura del vapore di 100 °C circa, corrispondente alla temperatura di saturazione dell'acqua alla pressione atmosferica. Per contro, l'abbassamento della pressione di scarico a 3 - 8 kPa, intervallo caratteristico di un normale condensatore, costringe ad impiegare estrattori d'aria capaci di mantenere il "vuoto" nel condensatore stesso. Va però rilevato che, scaricando nell'atmosfera, si andrebbe incontro anche ad elevati costi per il trattamento chimico dell'acqua d'alimentazione. Infatti, nelle installazioni moderne, l'acqua d'alimentazione deve essere sempre demineralizzata e degassata per prevenire depositi incrostanti e fenomeni di corrosione.

Per aumentare la temperatura media di fornitura calore, occorre aumentare la pressione massima di funzionamento che, nei cicli a vapor saturo, è strettamente correlata alla temperatura massima. L'aumento di temperatura e pressione, tuttavia, causa una progressiva diminuzione del titolo durante l'espansione. È ben noto che titoli troppo bassi ostacolano il buon funzionamento termofluidodinamico della turbina e comportano anche il rischio d'avere fenomeni di erosione nelle palettature. Pertanto, normalmente, si prescrive che il vapore, a fine espansione, abbia titolo non inferiore a 0,88. I limiti sulla temperatura massima e sul titolo, fanno sì che le realizzazioni pratiche di cicli Rankine a vapor saturo non siano numerose e riguardino, essenzialmente, impianti speciali come le centrali elettronucleari a fissione dove, peraltro, sono utilizzati uno o più separatori di liquido tra i diversi stadi della turbina, al fine d'aumentare il titolo a fine espansione.

### 12.2.4 Ciclo Rankine a Vapore Surriscaldato

Le considerazioni svolte nel paragrafo precedente giustificano il fatto che, nella maggior parte degli impianti a ciclo Rankine, sia previsto il surriscaldamento del vapore. Un impianto atto a realizzare un ciclo Rankine a vapore surriscaldato può essere schematizzato come in Fig. 12.6.



**Figura 12.6** Schema funzionale di un impianto atto a realizzare un ciclo Rankine a vapore surriscaldato.

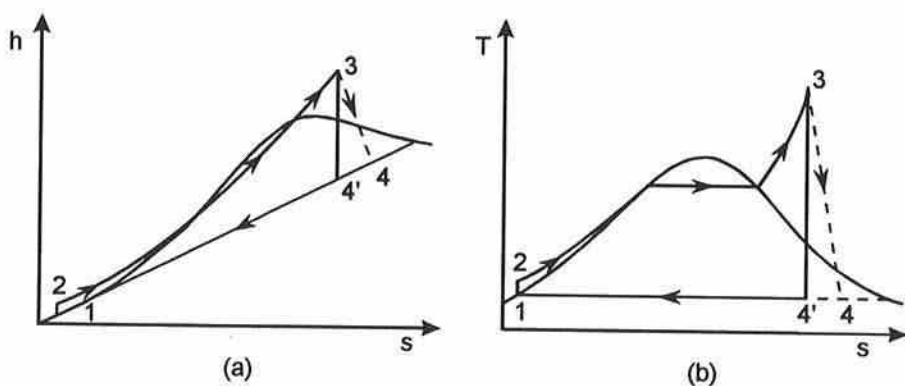
Il ciclo Rankine a vapore surriscaldato, associato allo schema di Fig. 12.6, è rappresentato in Fig. 12.7 dove si fa riferimento all'acqua come fluido di lavoro. Il rendimento di tale ciclo può ancora essere determinato mediante l'espressione generale (12.1), ricavata dal primo principio. Analogamente restano valide le relazioni (12.2) e (12.3), riguardanti le quantità di calore scambiate, l'espressione (12.5) del lavoro netto adiabatico e la definizione (12.11) del rendimento isoentropico d'espansione. Di conseguenza sono ancora applicabili l'espressioni del rendimento (12.4), (12.9) e (12.12).

#### Esempio 12.1

Con riferimento alla Fig. 12.7, si consideri un ciclo Rankine a vapore d'ac-



qua surriscaldato nel quale è prodotta una potenza netta di 10 MW. Il vapore entra in turbina alla pressione di 9,0 MPa ed alla temperatura di 823 K e si espande adiabaticamente fino alla pressione di 3,5 kPa. La pompa aspira il liquido saturo all'uscita dal condensatore e lo comprime isoentropicamente fino alla pressione del generatore. Nell'ipotesi di poter trascurare le perdite di carico nel generatore e le variazioni d'energia cinetica e potenziale in tutte le trasformazioni, si valutino il rendimento del ciclo e la portata massica di fluido in circolo nei due casi d'espansione in turbina: isoentropica e con rendimento isoentropico pari a 0,85.



**Figura 12.7** Ciclo Rankine, a vapore d'acqua surriscaldato, rappresentato: (a) sul diagramma  $(h,s)$  e (b) sul diagramma  $(T,s)$ .

### Soluzione

Le informazioni fornite nel testo sono sufficienti a determinare le proprietà termodinamiche nei punti 1, 3 e 4'. Poi si può tenere conto del fatto che il punto 2 ha la stessa entropia del punto 1 mentre, nell'ipotesi di variazioni trascurabili di energia cinetica e potenziale, la sua entalpia differisce da quella di 1 della quantità

$$h_2 - h_1 = |L'_{12}| = v(p_2 - p_1) = 0,001(9000 - 3,5) = 9,0 \text{ kJ / kg}$$

Infine, il punto 4 si trova sull'isobara-isoterma di condensazione ed è ca-

ratterizzato da un valore dell'entalpia ricavabile in base alla definizione di rendimento isoentropico. Si ha, infatti

$$h_4 = h_3 - \eta_{ie}(h_3 - h_{4'})$$

$$= 3510,7 - 0,85(3510,7 - 2039,0) = 2259,7 \text{ kJ/kg}$$

a cui corrisponde un titolo del vapore scaricato dalla turbina pari a 0,88.

**Tabella 12.1** Proprietà termodinamiche dei capisaldi del ciclo a vapore surriscaldato di cui all'Esempio 12.1.

PUNTO	$T$ [K]	$p$ [MPa]	$h$ [kJ/kg]	$s$ [kJ/(kg K)]
1	300	0,0035	112,6	0,3932
2	300,2	9,0	121,6	0,3932
3	823	9,0	3510,7	6,8137
4'	300	0,0035	2039,0	6,8137
4	300	0,0035	2259,7	7,5494

Una volta determinati i valori delle proprietà termodinamiche dei capisaldi, riportate in Tabella 12.1, si può rispondere ai quesiti. Dalla definizione di rendimento si ha

$$\eta_{rev} = \frac{(h_3 - h_{4'}) - (h_2 - h_1)}{h_3 - h_2}$$

$$= \frac{(3510,7 - 2039,0) - 9,0}{3510,7 - 121,6} = \frac{1471,7 - 9,0}{3389,1} = 0,432$$

per il ciclo ideale, ed

$$\eta = \frac{(h_3 - h_4) - (h_2 - h_1)}{h_3 - h_2}$$

$$= \frac{(3510,7 - 2259,7) - 9,0}{3389,1} = \frac{1251,0 - 9,0}{3389,1} = 0,366$$

per il ciclo reale. L'uso dell'espressione approssimata (12.12) per il calcolo del rendimento avrebbe fornito

$$\eta \cong \eta_{ie} \eta_{rev} = 0,85 \cdot 0,432 = 0,367$$

con un'accuratezza più che sufficiente ai fini pratici.

Si noti che, nel caso in esame, risulta

$$\frac{|L_c^-|}{L_e^+} = \frac{h_2 - h_1}{h_3 - h_4} = \frac{9,0}{1251,0} = 0,007$$

e, di conseguenza, non si commettono errori significativi trascurando il lavoro della pompa rispetto a quello della turbina.

La portata massica di fluido può essere ricavata dall'espressione della potenza netta

$$P_n = \dot{m} (L_e^+ - |L_c^-|)$$

Si ottiene così

$$\dot{m} = \frac{P_n}{(h_3 - h_{4'}) - (h_2 - h_1)} = \frac{10000}{1471,7 - 9,0} = 6,84 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

per il ciclo ideale, ed

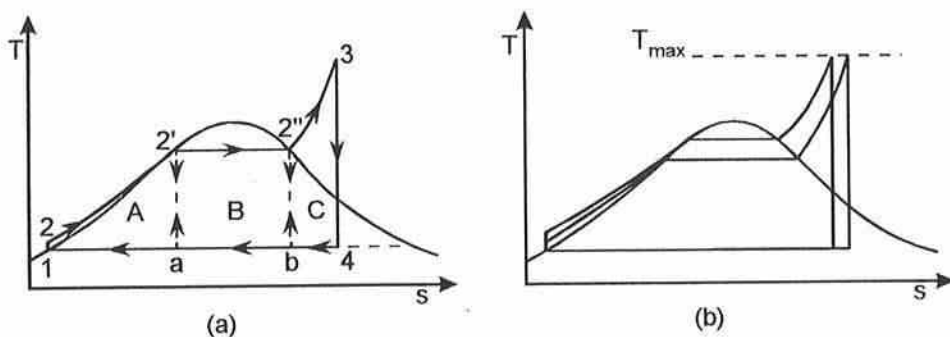
$$\dot{m} = \frac{P_n}{(h_3 - h_4) - (h_2 - h_1)} = \frac{10000}{1251,0 - 9,0} = 8,05 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

per il ciclo reale.

### 12.2.5 Miglioramenti del Ciclo a Vapore Surriscaldato

Per avere indicazioni sui possibili miglioramenti termodinamici da introdurre nel ciclo Rankine a vapore surriscaldato, si può procedere come in Fig. 12.8 (a), dividendo un ciclo ideale in tre cicli ideali corrispondenti alle fasi di riscaldamento, o desottoraffreddamento (A), evaporazione (B) e surriscaldamento (C). Considerazioni simili a quelle svolte nel paragrafo precedente, e l'applicazione ripetuta della relazione (12.15), consentono di affermare che

$$\eta_A = 1 - \frac{T_{41}}{\bar{T}_{22'}} < \eta_B = 1 - \frac{T_{41}}{T_{2'2''}} < \eta_C = 1 - \frac{T_{41}}{\bar{T}_{2''3}} \quad (12.16)$$



**Figura 12.8** Ciclo Rankine ideale a vapore d'acqua surriscaldato: (a) suddivisione in tre cicli ideali e (b) aumento di pressione con temperatura massima costante.

Pertanto, la zona di ciclo caratterizzata dal rendimento parziale più basso è quella in cui ha luogo il riscaldamento dell'acqua, mentre quella caratterizzata dal rendimento più alto è quella in cui avviene il surriscaldamento del vapore. Inoltre, dalla (12.16) si vede come il rendimento  $\eta_C$  aumenti all'aumentare della temperatura massima di ciclo in quanto, con tale temperatura, aumenta  $\bar{T}_{2''3}$ . Poiché nelle centrali termoelettriche tradizionali il calore è fornito da un processo di combustione, non sarebbe difficile, dal punto di vista dello scambio termico, arrivare a temperature massime del

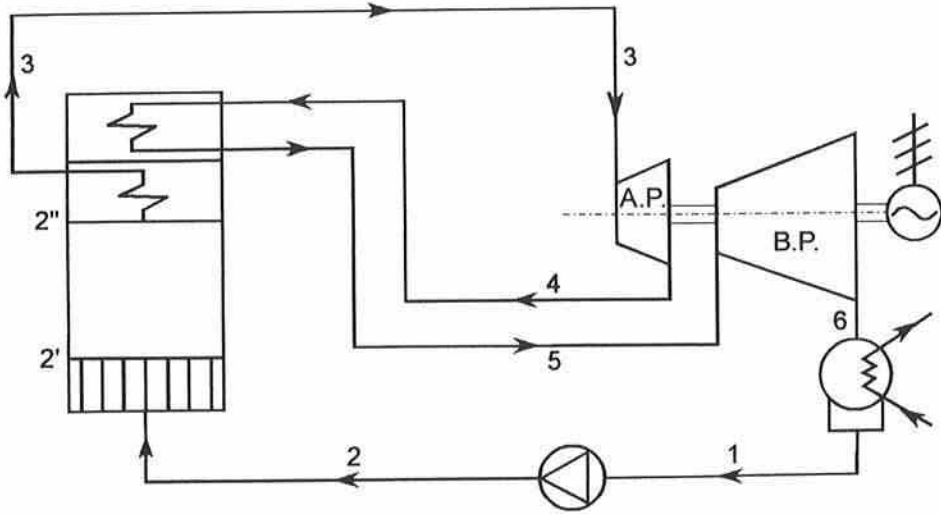
vapore molto elevate. In realtà, la temperatura massima del vapore surriscaldato è condizionata dai limiti metallurgici degli acciai impiegati nella costruzione. Tali limiti, attualmente, impediscono il superamento dei 600 °C, mentre la temperatura massima comunemente adottata è dell'ordine dei 540 °C.

Il vincolo sulla temperatura massima di surriscaldamento, a sua volta, impedisce di aumentare la pressione di funzionamento e quindi di far crescere, oltre un certo limite, i rendimenti  $\eta_A$  ed  $\eta_B$ , condizionati dai valori delle rispettive temperature medie di fornitura del calore. Infatti, anche nei cicli a semplice surriscaldamento, l'aumento della pressione porta a diminuzioni eccessive del titolo del vapore negli ultimi stadi della turbina, come evidenziato in Fig. 12.8 (b). Per aumentare la pressione massima, in presenza del limite sulla temperatura massima di ciclo, occorre quindi fare ricorso al processo di risurriscaldamento del vapore, che sarà illustrato nel prossimo paragrafo.

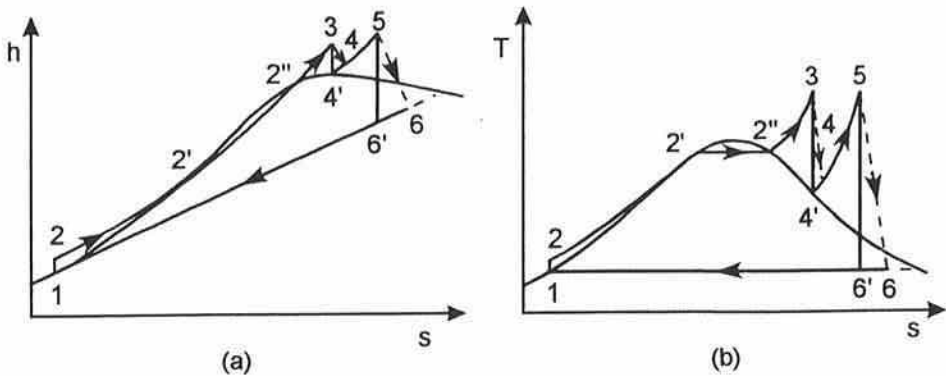
### 12.3 CICLO A RISURRISCALDAMENTO DI VAPORE

Un impianto atto a realizzare un ciclo a risurriscaldamento di vapore può essere schematizzato come in Fig. 12.9. Il vapore surriscaldato, prodotto dal generatore, è espanso adiabaticamente nel corpo d'alta pressione della turbina fino alla pressione operativa intermedia. Successivamente è surriscaldato di nuovo, cioè risurriscaldato, fino alla temperatura massima e quindi di nuovo espanso adiabaticamente, nel corpo di bassa pressione della turbina, fino alla pressione di condensazione.

Il ciclo associato allo schema di Fig. 12.9 è rappresentato in Fig. 12.10, dove si fa riferimento all'acqua come fluido di lavoro e si prendono in considerazione le irreversibilità dell'espansioni in turbina. Come si vede dalla Fig. 12.10, il risurriscaldamento consente di aumentare la temperatura media a cui si fornisce calore senza, nel contempo, far diminuire troppo il titolo del vapore negli ultimi stadi della turbina di bassa pressione.



**Figura 12.9** Schema funzionale di un impianto atto a realizzare un ciclo a risurriscaldamento di vapore.



**Figura 12.10** Ciclo a risurriscaldamento di vapore d'acqua, rappresentato: (a) sul diagramma  $(h, s)$  e (b) sul diagramma  $(T, s)$ .

Con riferimento alle procedure usuali, nell'ipotesi di variazioni trascurabili d'energia cinetica e potenziale, il rendimento di un ciclo reale a risurriscaldamento di vapore può essere espresso mediante la relazione

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{L_n}{Q_{23}^+ + Q_{45}^+} = \frac{(Q_{23}^+ + Q_{45}^+) + Q_{61}^-}{Q_{23}^+ + Q_{45}^+} = 1 + \frac{Q_{61}^-}{Q_{23}^+ + Q_{45}^+} \\ &= 1 - \frac{h_6 - h_1}{(h_3 - h_2) + (h_5 - h_4)} = \frac{[(h_3 - h_4) + (h_5 - h_6)] + (h_1 - h_2)}{(h_3 - h_2) + (h_5 - h_4)} \quad (12.17) \end{aligned}$$

Si osservi che, nelle ipotesi poste, il lavoro netto può essere calcolato anche come somma algebrica dei lavori  $L_{eA}^+$  ed  $L_{eB}^+$  ottenuti, rispettivamente, nei corpi di alta e bassa pressione della turbina, e del lavoro  $L_c^-$ , speso nella pompa

$$L_n = (L_{eA}^+ + L_{eB}^+) + L_c^- = [(h_3 - h_4) + (h_5 - h_6)] + (h_1 - h_2) \quad (12.18)$$

giungendo così, per altra via, al numeratore della (12.17). Infine, nella determinazione dei valori delle entalpie che compaiono nelle (12.17) e (12.18), può essere fatta l'ipotesi che sia  $h_2 \cong h_1$ , mentre  $h_4$  ed  $h_6$  possono essere ricavate dalla conoscenza dei rendimenti isoentropici d'espansione in turbina, una volta note  $h_{4'}$  ed  $h_{6'}$ .

### Esempio 12.2

Con riferimento alla Fig. 12.10, si consideri un ciclo a vapore d'acqua con risurriscaldamento, nel quale il vapore entra nella turbina di alta pressione a 16,0 MPa ed a 773 K e si espande adiabaticamente fino alla pressione di 3,0 MPa. Il vapore torna poi al generatore dove è risurriscaldato fino alla temperatura di 773 K e, successivamente, entra nella turbina di bassa pressione dove è di nuovo espanso adiabaticamente fino alla pressione di 6,0 kPa. La pompa aspira il liquido saturo all'uscita dal condensatore e lo comprime isoentropicamente fino alla pressione del generatore. Nell'ipotesi di poter trascurare le perdite di carico nel generatore e nel condensatore e le variazioni d'energia cinetica e potenziale in tutte le trasformazioni, si valuti il rendimento del ciclo, assumendo che i rendimenti isoentropici d'espansione in

turbina siano pari a 0,86 nello stadio di alta pressione e 0,84 nello stadio di bassa pressione.

### Soluzione

Le informazioni fornite nel testo sono sufficienti a determinare le proprietà termodinamiche nei punti 1, 3, 4', 5 e 6'. Poi, si può tenere conto del fatto che il punto 2 ha la stessa entropia del punto 1 mentre, nell'ipotesi di variazioni trascurabili d'energia cinetica e potenziale, la sua entalpia differisce da quella di 1 della quantità

$$h_2 - h_1 = |L'_{12}| = v(p_2 - p_1) = 0,001(16000 - 6,0) = 16,0 \text{ kJ / kg}$$

Infine, procedendo come nell'Esempio 12.1, si ricava

$$\begin{aligned} h_4 &= h_3 - \eta_{ie}(h_3 - h_{4'}) \\ &= 3294,4 - 0,86(3294,4 - 2862,5) = 2923,0 \text{ kJ / kg} \end{aligned}$$

ed

$$\begin{aligned} h_6 &= h_5 - \eta_{ie}(h_5 - h_{6'}) \\ &= 3456,1 - 0,84(3456,1 - 2228,0) = 2424,5 \text{ kJ / kg} \end{aligned}$$

a cui corrisponde un titolo del vapore scaricato dalla turbina di bassa pressione pari a 0,94.

Una volta determinati i valori delle proprietà termodinamiche dei capisaldi, riportate in Tabella 12.2, si può rispondere al quesito. Dalla definizione di rendimento si ha, infatti

$$\begin{aligned} \eta &= 1 - \frac{h_6 - h_1}{(h_3 - h_2) + (h_5 - h_4)} \\ &= 1 - \frac{2424,5 - 151,5}{(3294,4 - 167,5) + (3456,1 - 2923,0)} = 0,379 \end{aligned}$$



Dal confronto con il ciclo a semplice surriscaldamento, illustrato nell'Esempio 12.1, emerge che, pur operando con una temperatura massima di ciclo più bassa, il rendimento è aumentato dell'1%, mentre il titolo del vapore scaricato dalla turbina è passato da 0,88 a 0,94.

**Tabella 12.2** Proprietà termodinamiche dei capisaldi del ciclo a vapore risurriscaldato di cui all'Esempio 12.2.

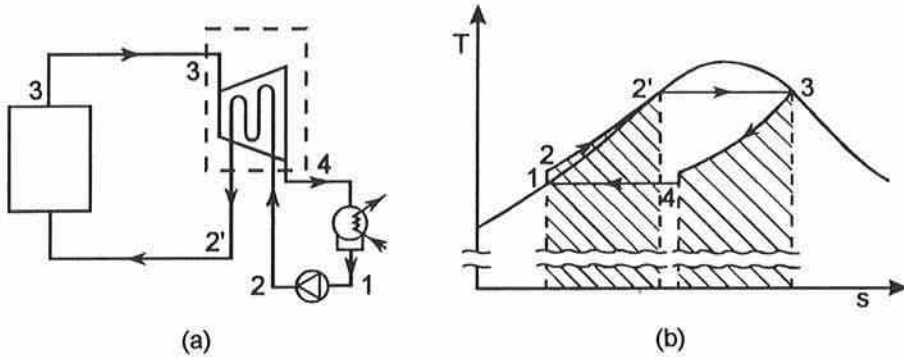
PUNTO	$T$ [K]	$p$ [MPa]	$h$ [kJ/kg]	$s$ [kJ/(kg K)]
1	309,3	0,006	151,5	0,5209
2	309,7	16,0	167,5	0,5209
3	773	16,0	3294,4	6,3001
4'	525,4	3,0	2862,5	6,3001
4	546,4	3,0	2923,0	6,4129
5	773	3,0	3456,1	7,2333
6'	309,3	0,006	2223,0	7,2333
6	309,3	0,006	2424,5	7,8685

## 12.4 CICLI RIGENERATIVI A VAPORE

Fino a questo punto ci si è occupati, essenzialmente, delle fasi di vaporizzazione e surriscaldamento mentre, secondo la relazione (12.16), il rendimento più basso è quello della fase di riscaldamento dell'acqua. È quindi evidente che l'eliminazione della fornitura di calore dall'esterno, durante il riscaldamento dell'acqua, può contribuire in modo molto significativo a migliorare il rendimento globale. A tal fine, la fornitura di calore dall'esterno può essere sostituita con una fornitura equivalente di calore dall'interno del ciclo, cioè da una rigenerazione, effettuata con scambiatori che, per questo motivo, sono detti rigenerativi.

Da un punto di vista concettuale, un impianto a rigenerazione può essere schematizzato come in Fig. 12.11 (a) dove, per semplicità, si fa ri-

ferimento ad un ciclo reversibile a vapore saturo. Se lo scambio termico in controcorrente, tra il liquido compresso ed il vapore che si espande in turbina, fosse realizzabile come ipotizzato in Fig. 12.11 (a), s'arriverebbe al ciclo ideale illustrato in Fig. 12.11 (b).



**Figura 12.11** Ciclo rigenerativo ideale a vapore: (a) schema funzionale e (b) rappresentazione sul diagramma  $(T,s)$ .

In tale ciclo l'espansione in turbina è reversibile, ma non adiabatica, mentre il volume di controllo che racchiude la turbina e lo scambiatore è adiabatico verso l'esterno. Di conseguenza, le curve di riscaldamento  $\overline{22'}$  ed espansione  $\overline{34}$  sono, necessariamente, parallele mentre le aree sottostanti ad esse sono uguali. Gli unici scambi termici con l'esterno hanno luogo alla temperatura minima  $T_{41}$  ed alla temperatura massima  $T_{2'3}$ . Atteso il parallelismo delle curve di riscaldamento e d'espansione, si ha

$$s_4 - s_1 = s_3 - s_2' \quad (12.19)$$

ed il rendimento del ciclo rigenerativo

$$\eta = 1 + \frac{Q_{41}^-}{Q_{2'3}^+} = 1 - \frac{T_{41}(s_4 - s_1)}{T_{2'3}(s_3 - s_2')} = 1 - \frac{T_{41}}{T_{2'3}} \quad (12.20)$$

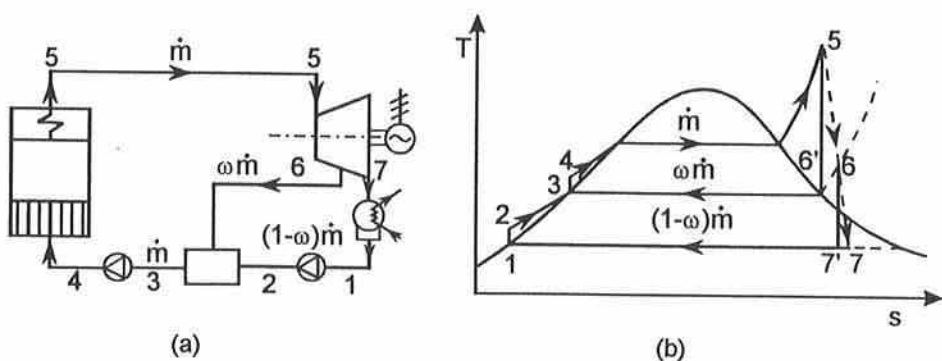
risulta pari al rendimento di un ciclo di Carnot che si svolge tra le stesse

temperature massima e minima.

Purtroppo, vi sono diversi motivi di carattere tecnologico che impediscono la realizzazione di un ciclo rigenerativo come quello rappresentato in Fig. 12.11. In primo luogo sarebbe molto difficile effettuare uno scambio termico tra il vapore che si espande in turbina ed il liquido che circolasse, ad esempio, in un'intercapedine ricavata nella cassa di contenimento della turbina stessa. Inoltre, un'espansione come quella ipotizzata in Fig. 12.11 (b) porterebbe a valori del titolo di vapore troppo bassi, impedendo un decorso reversibile della trasformazione in turbina. Per questi motivi, come si vedrà nei prossimi paragrafi, la rigenerazione non è realizzata in pratica portando l'acqua d'alimentazione a contatto con la turbina, ma impiegando scambiatori di calore, a miscela od a superficie, alimentati con il vapore estratto dalla turbina stessa.

#### 12.4.1 Scambiatori Rigenerativi a Miscela

Il funzionamento degli scambiatori rigenerativi a miscela è facilmente comprensibile se si considerano l'impianto, schematizzato nella Fig. 12.12 (a) ed il ciclo corrispondente, riferito al vapor d'acqua, rappresentato in Fig. 12.12 (b).



**Figura 12.12** Ciclo con uno scambiatore rigenerativo a miscela: (a) schema funzionale e (b) rappresentazione sul diagramma  $(T,s)$ .

Come si vede dallo schema, la frazione  $\omega$  della portata di massa totale di vapore è estratta dalla turbina nelle condizioni 6 e poi, all'uscita dalla prima pompa, è mescolata con la frazione liquida  $(1-\omega)$  che si trova nelle condizioni 2. Nei calcoli, si considera lo scambiatore adiabatico verso l'esterno e si fa l'ipotesi d'ottenere in 3 una miscela nelle condizioni di liquido saturo. Poiché deve essere verificato il bilancio entalpico

$$\omega \dot{m} h_6 + (1-\omega) \dot{m} h_2 = \dot{m} h_3 \quad (12.21)$$

è necessario estrarre la frazione di vapore

$$\omega = \frac{h_3 - h_2}{h_6 - h_2} \quad (12.22)$$

Come si vedrà nell'esempio numerico, il rendimento del ciclo

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{L_n}{Q_{45}^+} = \frac{Q_{45}^+ + (1-\omega)Q_{71}^-}{Q_{45}^+} \\ &= 1 + (1-\omega) \frac{Q_{71}^-}{Q_{45}^+} = 1 - (1-\omega) \frac{h_7 - h_1}{h_5 - h_4} \end{aligned} \quad (12.23)$$

risente in modo favorevole dell'eliminazione della fornitura  $Q_{23}^+$  di calore dall'esterno, anche se ciò comporta una riduzione del lavoro ottenuto negli ultimi stadi della turbina.

### Esempio 12.3

Con riferimento alla Fig. 12.12, si consideri un ciclo a vapore d'acqua surriscaldato, provvisto di un rigeneratore a miscela, nel quale è prodotta una potenza netta di 10 MW. Il vapore entra in turbina alla pressione di 4,5 MPa ed alla temperatura di 723 K e s'espande adiabaticamente nel primo stadio della turbina fino alla pressione di 0,4759 MPa. Qui una frazione della por-

tata massica di vapore è prelevata ed inviata allo scambiatore a miscela, mentre la rimanente frazione s'espande adiabaticamente nello stadio di bassa pressione della turbina fino alla pressione di condensazione di 8 kPa. Il rendimento isoentropico d'espansione è pari a 0,85 in entrambi gli stadi. La pompa d'estrazione aspira il liquido saturo all'uscita dal condensatore e lo comprime isoentropicamente fino alla pressione dello scambiatore. La pompa di alimento aspira liquido saturo a 0,4759 MPa all'uscita dallo scambiatore e lo comprime isoentropicamente fino alla pressione di 4,5 MPa del generatore di vapore. Nell'ipotesi di poter trascurare le perdite di carico nel generatore di vapore e nel condensatore, e le variazioni d'energia cinetica e potenziale in tutte le trasformazioni, si valutino il rendimento del ciclo e la portata massica di vapore entrante in turbina.

### *Soluzione*

Le informazioni fornite nel testo sono sufficienti a determinare le proprietà termodinamiche nei punti 1, 3, 5 e 6'. Poi si può tenere conto del fatto che il punto 2 ha la stessa entropia del punto 1 mentre, nell'ipotesi di variazioni trascurabili di energia cinetica e potenziale, la sua entalpia differisce da quella di 1 della quantità

$$h_2 - h_1 = |L'_{12}| = v(p_2 - p_1) = 0,001(475,9 - 8,0) = 0,5 \text{ kJ / kg}$$

Analogamente, il punto 4 ha la stessa entropia del punto 3 mentre, nell'ipotesi di variazioni trascurabili d'energia cinetica e potenziale, la sua entalpia differisce da quella di 3 della quantità

$$h_4 - h_3 = |L'_{34}| = v(p_4 - p_3) = 0,0011(4500 - 475,9) = 4,4 \text{ kJ / kg}$$

(Si noti che, nei calcoli, si è considerato l'aumento del volume specifico del liquido con la temperatura). Infine, procedendo come negli esempi precedenti, si ricava

$$\begin{aligned}
 h_6 &= h_5 - \eta_{ie}(h_5 - h_{6'}) \\
 &= 3323,2 - 0,85(3323,2 - 2762,1) = 2846,3 \text{ kJ / kg}
 \end{aligned}$$

e tenendo conto del fatto che il punto 7 ha la stessa entropia di 6, si ha

$$\begin{aligned}
 h_7 &= h_6 - \eta_{ie}(h_6 - h_{7'}) \\
 &= 2846,3 - 0,85(2846,3 - 2209,9) = 2305,3 \text{ kJ / kg}
 \end{aligned}$$

a cui corrisponde un titolo del vapore, scaricato dalla turbina, pari a 0,89.

Una volta determinati i valori delle proprietà termodinamiche dei capisaldi, riportate in Tabella 12.3, si può trovare la frazione di portata massica estratta e quindi rispondere ai quesiti. Infatti, dalla (12.22) si ha

$$\omega = \frac{h_3 - h_2}{h_6 - h_2} = \frac{632,2 - 174,3}{2846,3 - 174,3} = 0,171$$

mentre, dalla definizione di rendimento, si ottiene

$$\eta = 1 - (1 - \omega) \frac{h_7 - h_1}{h_5 - h_4} = 1 - (1 - 0,171) \frac{2305,3 - 173,8}{3323,2 - 636,6} = 0,342$$

La portata massica di vapore all'entrata della turbina può essere ricavata dall'espressione della potenza netta

$$P_n = \dot{m} L_{56}^+ + (1 - \omega) \dot{m} L_{67}^+ - (1 - \omega) \dot{m} |L_{12}^-| - \dot{m} |L_{34}^-|$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned}
 \dot{m} &= \frac{P_n}{(h_5 - h_6) + (1 - \omega)(h_6 - h_7) - (1 - \omega)(h_2 - h_1) - (h_4 - h_3)} \\
 &= \frac{10000}{(3323,2 - 2846,3) + 0,829(2846,3 - 2305,3) - 0,829 \cdot 0,5 - 4,4} \\
 &= 10,8 \text{ kg / s}
 \end{aligned}$$

mentre la portata che attraversa lo stadio di bassa pressione della turbina è pari a

$$(1 - \omega)\dot{m} = 0,829 \cdot 10,8 = 9,0 \text{ kg/s}$$

Trascurando il lavoro della pompa, il rendimento dello stesso ciclo senza rigenerazione può essere stimato mediante l'espressione

$$\eta \cong \frac{h_5 - h_7}{h_5 - h_1} = \frac{3323,2 - 2305,3}{3323,2 - 173,8} = 0,323$$

Analogamente, sempre trascurando il lavoro della pompa, la portata massica di vapore può essere stimata mediante l'espressione

$$\dot{m} \cong \frac{P_n}{h_5 - h_7} = \frac{10000}{3323,2 - 2305,3} = 9,8 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

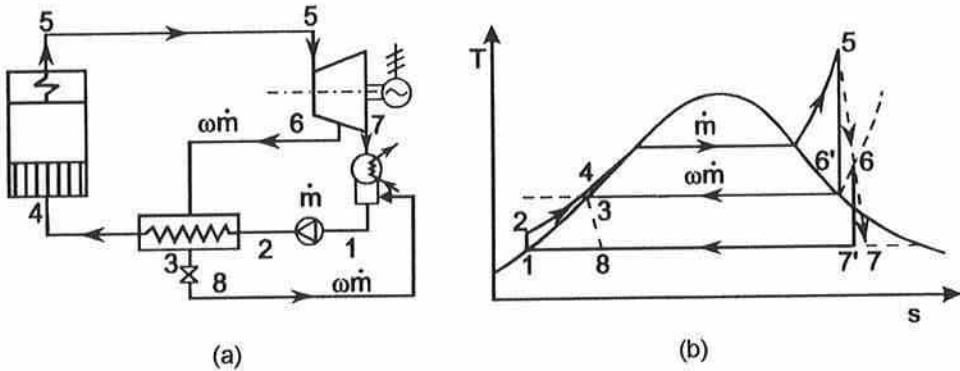
Come si può notare, l'inserimento del rigeneratore fa aumentare il rendimento, ma anche la portata massica di vapore all'ingresso della turbina. Nel ciclo rigenerativo, tuttavia, la portata di vapore che attraversa gli ultimi stadi della turbina è più bassa della portata di vapore nel corrispondente ciclo normale.

**Tabella 12.3** Proprietà termodinamiche dei capisaldi del ciclo a vapore surriscaldato di cui all'Esempio 12.3.

PUNTO	$T$ [K]	$p$ [MPa]	$h$ [kJ/kg]	$s$ [kJ/(kg K)]
1	314,6	0,008	173,8	0,5925
2	314,7	0,4759	174,3	0,5925
3	423,15	0,4759	632,2	1,8417
4	423,6	4,5	636,6	1,8417
5	723,15	4,5	3323,2	6,8745
6'	430,0	0,4759	2762,1	6,8745
6	468,3	0,4759	2846,3	7,0621
7'	314,6	0,008	2209,9	7,0621
7	314,6	0,008	2305,3	7,3655

### 12.4.2 Scambiatori Rigenerativi a Superficie

Il funzionamento degli scambiatori rigenerativi a superficie è facilmente comprensibile, se si fa riferimento all'impianto a rigenerazione schematizzato nella Fig. 12.13 (a) ed al ciclo corrispondente rappresentato in Fig. 12.13 (b).



**Figura 12.13** Ciclo con uno scambiatore rigenerativo a superficie: (a) schema funzionale e (b) rappresentazione sul diagramma  $(T,s)$ .

Come si vede dallo schema, la frazione  $\omega$  della portata di massa totale di vapore, estratta dalla turbina nelle condizioni 6, è fatta condensare sino alle condizioni di liquido saturo 3 nello scambiatore a superficie. Il liquido saturo così ottenuto è laminato, senza variazioni d'entalpia, fino alle condizioni 8 e, successivamente, è scaricato nel pozzo di raccolta del condensatore principale. Nei calcoli, si considera il processo di scambio termico adiabatico verso l'esterno e si fa l'ipotesi di arrivare, con il liquido in 4 all'uscita dallo scambiatore, alla medesima temperatura del punto 3 (in modo da avere  $h_4 \cong h_3$ ). Poiché deve essere verificato il bilancio entalpico

$$\omega \dot{m} (h_6 - h_3) = \dot{m} (h_4 - h_2) \quad (12.24)$$

la frazione di vapore estratta è pari a



$$\omega = \frac{h_4 - h_2}{h_6 - h_3} \quad (12.25)$$

Anche in questo caso, gli esempi numerici mostrano che il rendimento del ciclo

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{L_n}{Q_{45}^+} = \frac{Q_{45}^+ + \omega Q_{81}^- + (1 - \omega) Q_{71}^-}{Q_{45}^+} = 1 + \frac{\omega Q_{81}^- + (1 - \omega) Q_{71}^-}{Q_{45}^+} \\ &= 1 - \frac{\omega(h_8 - h_1) + (1 - \omega)(h_7 - h_1)}{h_5 - h_4} \end{aligned} \quad (12.26)$$

risente in modo favorevole dell'eliminazione della fornitura  $Q_{24}^+$  di calore dall'esterno, nonostante l'impiego dello scambiatore rigenerativo comporti una riduzione del lavoro ottenuto negli ultimi stadi della turbina.

#### Esempio 12.4

Con riferimento alla Fig. 12.13, si consideri un ciclo a vapore d'acqua surriscaldato, provvisto di un rigeneratore a superficie, nel quale è prodotta una potenza netta di 10 MW. Il vapore entra in turbina alla pressione di 4,5 MPa ed alla temperatura di 723 K e s'espande adiabaticamente nel primo stadio della turbina fino alla pressione di 0,4759 MPa. Qui una frazione della portata massica di vapore è inviata allo scambiatore a superficie, dove raggiunge le condizioni di liquido saturo prima di essere laminata ed immessa nel condensatore. La rimanente frazione di vapore s'espande adiabaticamente nello stadio di bassa pressione della turbina fino alla pressione di condensazione di 8 kPa. Il rendimento isoentropico d'espansione è pari a 0,85 in entrambi gli stadi della turbina. La pompa d'estrazione aspira il liquido saturo all'uscita dal condensatore e lo comprime isoentropicamente fino alla pressione di 4,5 MPa del generatore di vapore. Il liquido compresso è preriscaldato nel rigeneratore fino ad una temperatura uguale alla temperatura di saturazione del vapore spillato. Nell'ipotesi di poter trascurare le perdite di ca-

rico nel generatore e nel condensatore, e le variazioni d'energia cinetica e potenziale in tutte le trasformazioni, si valutino il rendimento del ciclo e la portata massica di vapore entrante in turbina.

### Soluzione

In base alle informazioni fornite nel testo si può concludere che le proprietà termodinamiche dei punti 1, 3, 5, 6, 6', 7 e 7' non sono variate rispetto all'Esempio 12.3. Inoltre, il punto 4 ha la stessa entalpia del punto 3 mentre, nell'ipotesi di compressione isoentropica con variazioni trascurabili d'energia cinetica e potenziale, si ha

$$h_2 - h_1 = |L'_{12}| = v(p_2 - p_1) = 0,001(4500 - 8,0) = 4,5 \text{ kJ/kg}$$

Una volta determinati i valori delle proprietà termodinamiche dei capisaldi, si può trovare la frazione di portata massica estratta e quindi rispondere ai quesiti. Infatti, dalla (12.25) si ha

$$\omega = \frac{h_4 - h_2}{h_6 - h_3} = \frac{632,2 - 178,4}{2846,3 - 632,2} = 0,205$$

mentre, dalla definizione di rendimento, si ottiene

$$\begin{aligned} \eta &= 1 - \frac{\omega(h_8 - h_1) + (1 - \omega)(h_7 - h_1)}{h_5 - h_4} \\ &= 1 - \frac{0,205(632,2 - 173,9) + 0,795(2305,3 - 173,9)}{3323,2 - 632,2} = 0,335 \end{aligned}$$

La portata massica di vapore all'entrata della turbina può essere ricavata dall'espressione della potenza netta

$$P_n = \dot{m} L_{56}^+ + (1 - \omega) \dot{m} L_{67}^+ - \dot{m} |L_{12}^-|$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \frac{P_n}{(h_5 - h_6) + (1 - \omega)(h_6 - h_7) - (h_2 - h_1)} \\ &= \frac{10000}{(3323,2 - 2846,3) + 0,795(2846,3 - 2305,3) - 4,5} = 11,1 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \end{aligned}$$

mentre la portata che attraversa lo stadio di bassa pressione della turbina è pari a

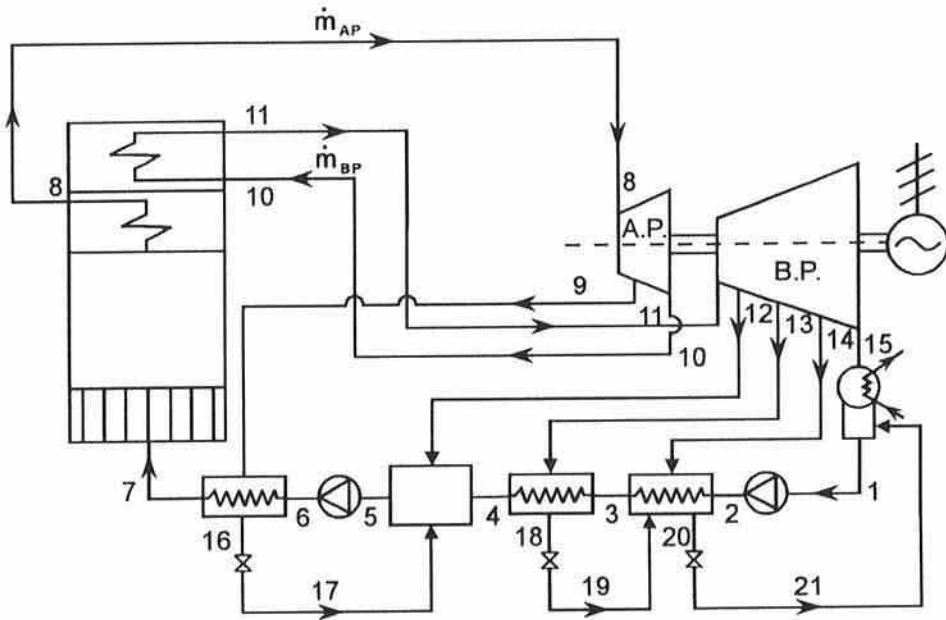
$$(1 - \omega)\dot{m} = 0,795 \cdot 11,1 = 8,8 \text{ kg/s}$$

Dal confronto con i risultati dell'Esempio 12.3, si può notare che lo scambiatore rigenerativo a miscela conduce a prestazioni termodinamiche lievemente superiori. Tuttavia, l'utilizzo di un rigeneratore a superficie consente di risparmiare una pompa. Infatti, quando s'impiega uno scambiatore rigenerativo a superficie, la portata di fluido prelevata dalla turbina è laminata e rimandata al condensatore dopo lo scambio termico.

### 12.4.3 Cicli Rigenerativi Pratici

Nelle grandi centrali termoelettriche, si usa un numero di scambiatori rigenerativi a superficie compreso, generalmente, tra sei ed otto. Oltre agli scambiatori a superficie è sempre utilizzato uno scambiatore rigenerativo a miscela, che opera a pressioni superiori alla pressione atmosferica e svolge quindi anche le funzioni di degassatore. Il processo di degassazione ad alta temperatura consente, infatti, di scaricare all'esterno l'ossigeno ed i gas disciolti nell'acqua, riducendo così i processi di corrosione nei componenti dell'impianto.

A titolo d'esempio, nella Fig. 12.14 è riportato lo schema funzionale semplificato di un impianto a vapore per una centrale termoelettrica, con tre scambiatori a superficie ed uno scambiatore a miscela.



**Figura 12.14** Schema funzionale di un impianto a vapore a ciclo rigenerativo.

Le analogie con gli schemi funzionali illustrati in precedenza sono evidenti e le trasformazioni che hanno luogo nei diversi componenti possono essere così descritte:

- compressione ( $\overline{12}$ ) nella pompa nella pompa d'estrazione del condensato;
- riscaldamento ( $\overline{23}$ ) nello scambiatore a superficie, sfruttando l'estrazione di vapore da 14 ed il raffreddamento ( $\overline{19-20}$ ) del fluido proveniente dallo scambiatore a monte;
- riscaldamento ( $\overline{34}$ ) nello scambiatore a superficie sfruttando l'estrazione di vapore da 13;
- riscaldamento ( $\overline{45}$ ) nello scambiatore a miscela sfruttando l'estrazione di vapore da 12 ed il contenuto energetico del fluido caldo in 17 proveniente dallo scambiatore a monte;
- compressione ( $\overline{56}$ ) nella pompa nella pompa d'alimentazione;

- riscaldamento ( $\overline{67}$ ) nello scambiatore a superficie sfruttando l'estrazione di vapore da 9;
- riscaldamento finale, evaporazione e surriscaldamento nel generatore di vapore ( $\overline{78}$ );
- espansione ( $\overline{8-10}$ ) nella turbina d'alta pressione;
- risurriscaldamento ( $\overline{10-11}$ ) nel generatore di vapore;
- espansione ( $\overline{11-15}$ ) nella turbina di bassa pressione;
- condensazione ( $\overline{15-1}$ ) nel condensatore.

Come si vede, lo scambiatore a miscela ha bisogno di una pompa supplementare, mentre gli scambiatori a superficie operano in cascata riversando sempre il condensato, dopo una laminazione, in un componente che si trova ad una pressione inferiore.

Nell'analisi termodinamica di un ciclo rigenerativo reale, sono applicate le metodologie descritte nei due paragrafi precedenti assumendo, in particolare, che le temperature dei fluidi all'uscita dei rigeneratori siano pari alla temperatura di saturazione corrispondente alla pressione di spillamento. Così, ad esempio, nello scambiatore ( $\overline{23}$ ) le temperature in 3 ed in 20 coincidono con la temperatura di saturazione corrispondente alla pressione in 14, mentre nello scambiatore ( $\overline{45}$ ) la temperatura in 5 coincide con la temperatura di saturazione corrispondente alla pressione in 12. Ovviamente le laminazioni ( $\overline{20-21}$ ), ( $\overline{18-19}$ ) e ( $\overline{16-17}$ ) hanno luogo senza variazioni d'entalpia e consentono d'arrivare alla pressione di saturazione caratteristica del componente in cui si riversa il condensato. Nella scrittura dei bilanci entalpici relativi agli scambiatori, tuttavia, occorre partire sempre dallo scambiatore a temperatura più alta, ( $\overline{67}$ ) in questo caso, determinando per prima la corrispondente frazione di vapore, in questo caso estratta da 9. Successivamente, può essere preso in considerazione lo scambiatore a temperatura immediatamente più bassa ( $\overline{45}$ ), al fine di trovare la corrispondente frazione di vapore estratta da 12. Infatti, solo procedendo in successione inversa possono essere determinati i valori di tutte le frazioni estratte risolvendo, ogni volta, un problema con una sola incognita.

## 12.5 IMPIANTI A VAPORE

Le analisi energetiche riportate nei paragrafi precedenti, sono basate sulla quantità di calore fornita al fluido di lavoro, e non sulla quantità d'energia primaria fornita all'impianto. In questo paragrafo, invece, si parte dall'energia primaria anche se, per semplicità, ci si limita a considerare la situazione più comune rappresentata dalle centrali termoelettriche che utilizzano combustibili fossili. Pertanto, si tiene conto della fornitura di calore mediante un processo di combustione nel generatore di vapore.

In base a questo punto di vista, già illustrato nel Paragrafo 11.4, la produzione d'energia elettrica può essere schematizzata come una serie di trasformazioni che agiscono, in sequenza, su:

- il flusso d'energia primaria associato al combustibile,
- il flusso termico utile fornito al fluido operativo,
- la potenza resa disponibile dal ciclo termodinamico,
- la potenza meccanica netta ottenuta,
- la potenza elettrica generata dall'alternatore,
- la potenza immessa nella rete elettrica.

Nella conversione dei flussi energetici da una forma all'altra, occorre tenere conto dei rendimenti od, in alternativa, delle perdite. Così, nel passaggio da flusso d'energia primaria a flusso termico utile, interviene il rendimento del generatore di vapore, in armonia con quanto visto nel Paragrafo 10.7. Analogamente, nella trasformazione da flusso termico utile a potenza resa disponibile dal ciclo, interviene il rendimento termodinamico, in armonia con quanto visto nei paragrafi precedenti. Infine, procedendo in sequenza, s'incontrano il rendimento meccanico della turbina, il rendimento elettrico dell'alternatore e la perdita rappresentata dai consumi, quasi esclusivamente elettrici, degli ausiliari. (Gli ausiliari, in questo caso, comprendono tutte le apparecchiature necessarie al funzionamento di una centrale termoelettrica come, ad esempio: ventilatori per l'aria comburente, impianti di trattamento dell'acqua di alimentazione e del combustibile, impianti d'illuminazione

degli uffici). Tuttavia, se si limita l'analisi alla sfera strettamente termodinamica, in armonia con quanto visto nel Paragrafo 10.9, il rendimento d'impianto può essere stimato mediante l'espressione

$$\eta_{imp} = \frac{P_n}{\dot{m}_c H_i} = \eta_g \eta \quad (12.27)$$

dove  $P_n$  è la potenza netta resa disponibile dal ciclo termodinamico,  $\dot{m}_c H_i$  è il flusso di energia primaria associato alla portata di combustibile,  $\eta_g$  è il rendimento del generatore di vapore ed  $\eta$  è il rendimento termodinamico del ciclo definito nei paragrafi precedenti.

Si noti che, secondo il punto di vista qui illustrato, l'espressione (10.51) del rendimento di primo principio del generatore va riscritta nella forma

$$\eta_g = \frac{|q_u^-|}{\dot{m}_c H_i} \quad (12.28)$$

dove non compare la potenza elettrica fornita al ventilatore, in quanto già contabilizzata tra i consumi degli ausiliari.

### Esempio 12.5

Si stimino il rendimento di conversione globale, corrispondente al rendimento di produzione dell'energia elettrica, ed il rendimento d'impianto (12.27) per una centrale termoelettrica a vapore nella quale si abbia

- rendimento del generatore di vapore  $\eta_g = 92\%$ ,
- rendimento del ciclo termodinamico  $\eta = 48\%$ ,
- rendimento meccanico della turbina  $\eta_m = 99\%$ ,
- rendimento elettrico dell'alternatore  $\eta_{elt} = 98\%$  e
- perdita imputabile ai consumi degli ausiliari  $\pi_a = 4\%$ .

#### Soluzione

Procedendo come nella definizione del rendimento (12.27), il rendimento

globale della centrale termoelettrica a vapore può essere stimato mediante una relazione del tipo

$$\eta_{globale} = \frac{P_{elt}}{\dot{m}_c H_i} = \eta_g \eta \eta_m \eta_{elt} (1 - \pi_a)$$

dove  $P_{elt}$  è la potenza immessa nella rete elettrica,  $\dot{m}_c H_i$  è il flusso di energia primaria associato alla portata di combustibile,  $\eta_g$  è il rendimento del generatore di vapore,  $\eta$  è il rendimento termodinamico del ciclo,  $\eta_m$  è il rendimento meccanico della turbina,  $\eta_{elt}$  è il rendimento elettrico dell'alternatore e  $\pi_a$  è la perdita imputabile ai consumi degli ausiliari. Nella fattispecie, il rendimento di produzione dell'energia elettrica risulta pari a

$$\eta_{globale} = \eta_g \eta \eta_m \eta_{elt} (1 - \pi_a) = 0,92 \cdot 0,48 \cdot 0,99 \cdot 0,98 \cdot (1 - 0,04) = 0,41$$

È interessante notare come, a causa dell'incidenza dei rendimenti termici, meccanici ed elettrici, oltre che dei consumi degli ausiliari, il rendimento termodinamico del ciclo, pari al 48%, sia notevolmente superiore al rendimento globale di produzione dell'energia elettrica, pari al 41%.

Il rendimento d'impianto, definito dalla (10.27), è invece pari a

$$\eta_{imp} = \eta_g \eta = 0,92 \cdot 0,48 = 0,44$$

e quindi intermedio tra il rendimento globale ed il rendimento termodinamico, in quanto risente solo del rendimento di conversione del generatore di vapore.

### 12.5.1 Analisi Exergetica di un Impianto a Vapore

Come si era già notato nel Paragrafo 11.5, una limitazione importante delle analisi energetiche è l'impiego dei soli principi di conservazione che, per loro natura non tengono conto, se non indirettamente, delle irreversibilità.



Così, ad esempio, nella definizione del rendimento di conversione sono state definite “perdite” le quantità di calore scaricate dal condensatore nell’ambiente, prescindendo dal livello termico del calore scaricato. Analogamente, nella definizione di rendimento di primo principio del generatore di vapore, si è tenuto conto delle dispersioni di calore nei fumi e nella caldaia, ma non delle irreversibilità associate agli scambi termici tra prodotti della combustione e fluido di lavoro. Per individuare le “vere” perdite termodinamiche, ed intervenire quindi in maniera corretta sui componenti più critici degli impianti, occorre utilizzare gli strumenti dell’analisi exergetica.

### Esempio 12.6

Con riferimento allo schema d’appoggio, illustrato in Fig. 12.6, ed al ciclo Rankine a vapore d’acqua surriscaldato, rappresentato in Fig. 12.7, si mettano in relazione tra loro i rendimenti di primo e di secondo principio distinguendo tra ciclo ed impianto ed assumendo, al solito, un potere calorifico inferiore uguale al potere exergetico del combustibile.

#### Soluzione

L’exergia ottenuta, sia dal ciclo sia dall’impianto, è pari alla potenza meccanica netta

$$P_n = \dot{m}_v [(h_3 - h_4) - (h_2 - h_1)]$$

L’exergia fornita al ciclo è pari a

$$\dot{m}_a e_Q = \dot{m}_a [(h_3 - h_2) - T_a (s_3 - s_2)]$$

ed è diversa dall’exergia fornita all’impianto, pari a

$$\dot{m}_c e_c \equiv \dot{m}_c H_i = \frac{\dot{m}_v (h_3 - h_2)}{\eta_g}$$

dove  $\eta_g$  è il rendimento di primo principio del generatore di vapore.

Nel ciclo si hanno perdite exergetiche, alla turbina

$$\begin{aligned} & \dot{m}_v(e_3 - e_4) - \dot{m}_v(h_3 - h_4) \\ &= \dot{m}_v \left\{ [(h_3 - h_4) - T_a(s_3 - s_4)] - (h_3 - h_4) \right\} = \dot{m}_v T_a (s_4 - s_3) \end{aligned}$$

ed al condensatore

$$\begin{aligned} & \dot{m}_v(e_4 - e_1) = \dot{m}_v [(h_4 - h_1) - T_a(s_4 - s_1)] \\ & \dot{m}_v \left[ (h_4 - h_1) - \frac{T_a}{T_{41}} (s_4 - s_1) \right] = \dot{m}_v (h_4 - h_1) \left( 1 - \frac{T_a}{T_{41}} \right) \end{aligned}$$

dove viene dispersa all'esterno tutta l'exergia ancora contenuta nel vapore. Tuttavia, come si può vedere, se la temperatura di condensazione  $T_{41}$  è prossima alla temperatura dell'ambiente, le perdite exergetiche al condensatore sono prossime a zero.

Nell'intero impianto si hanno, in aggiunta, le perdite nel generatore

$$\begin{aligned} \dot{m}_c e_c - \dot{m}_v(e_3 - e_2) &= \frac{\dot{m}_v(h_3 - h_2)}{\eta_g} - \dot{m}_v [(h_3 - h_2) - T_a(s_3 - s_2)] \\ &= \dot{m}_v \left[ \frac{1 - \eta_g}{\eta_g} (h_3 - h_2) - T_a(s_3 - s_2) \right] \end{aligned}$$

Le perdite energetiche nel ciclo sono pari a

$$|q_{41}^-| = \dot{m}_a (h_4 - h_1)$$

e sono localizzate al condensatore, dove viene dispersa all'esterno tutta l'energia ancora contenuta nel vapore.

Nell'intero impianto si hanno, in aggiunta, le perdite energetiche nel generatore di vapore

$$\dot{m}_c H_i - \dot{m}_v (h_3 - h_2) = \frac{\dot{m}_v (h_3 - h_2)}{\eta_g} - \dot{m}_v (h_3 - h_2) = \dot{m}_v \frac{1 - \eta_g}{\eta_g} (h_3 - h_2)$$

Nelle ipotesi poste, i rendimenti d'impianto di primo e di secondo principio sono uguali, in quanto si ha

$$(\eta_{II})_{imp} = \frac{P_n}{\dot{m}_c e_c} = \frac{\dot{m}_v [(h_3 - h_4) - (h_2 - h_1)]}{\dot{m}_a (h_3 - h_2) / \eta_g} = \frac{P_n}{\dot{m}_c H_i} = \eta_{imp}$$

Al contrario, il rendimento di secondo principio del ciclo è superiore al rendimento di conversione del ciclo, in quanto si ha

$$\begin{aligned} \eta_{II} &= \frac{P_n}{\dot{m}_v (e_3 - e_2)} = \frac{\dot{m}_v [(h_3 - h_4) - (h_2 - h_1)]}{\dot{m}_v [(h_3 - h_2) - T_a (s_3 - s_2)]} \\ &= \frac{(h_3 - h_4) - (h_2 - h_1)}{(h_3 - h_2) - T_a (s_3 - s_2)} > \frac{(h_3 - h_4) - (h_2 - h_1)}{(h_3 - h_2)} = \eta \end{aligned}$$

poiché al denominatore dell'espressione del rendimento di secondo principio compare il valore exergetico della quantità di calore fornita, e non l'intera quantità di calore.

### Esempio 12.7

Con riferimento alla Fig. 12.12, si esegua l'analisi exergetica dell'impianto a vapore il cui ciclo è già stato illustrato nell'Esempio 12.3. L'impianto utilizza olio combustibile liquido avente potere calorifico inferiore, assunto coincidente con il potere exergetico, pari a 41,1 MJ/kg. Il rapporto stechiometrico di combustione è pari a 13,8 chilogrammi d'aria per chilogrammo di combustibile, il coefficiente d'eccesso d'aria è pari al 7% e, con una tem-

peratura ambiente di 25 °C, i fumi escono dal camino a 170 °C.

Si considerino ancora valide le ipotesi semplificative di cui all'Esempio 12.3 ed, in aggiunta, si assuma che:

- il generatore disperda nell'ambiente, sotto forma di flussi termici radiativi e convettivi, il 2% del flusso energetico fornito dal combustibile;
- il calore specifico dei fumi sia costante e pari a 1,15 kJ/kg K;
- nelle analisi exergetiche, la temperatura ambiente possa essere considerata pari a 298 K.

### Soluzione

In base a quanto visto nel Paragrafo 10.7, il bilancio termico del generatore di vapore può essere scritto nella forma

$$|q_u^-| = \dot{m}_c H_i + |P_v^-| - |q_{fa}^-| - |q_a^-|$$

Esplicitando i diversi termini, e tenendo conto dei dati del problema, s'ottiene

$$\dot{m}_w (h_5 - h_4) = \dot{m}_c H_i + 0 - \dot{m}_{fu} c_{pu} (t_f - t_a) - 0,02 \dot{m}_c H_i$$

Poiché si ha

$$\begin{aligned} m_{fu}^* &= \frac{\dot{m}_{fu}}{\dot{m}_c} = 1 + (1 + \varepsilon) \frac{\dot{m}_{as}}{\dot{m}_c} = 1 + (1 + \varepsilon) m_{as}^* \\ &= 1 + (1 + 0,07) 13,8 = 15,77 \end{aligned}$$

dal bilancio termico s'ottiene

$$\begin{aligned} m_w^* &= \frac{\dot{m}_w}{\dot{m}_c} = \frac{0,98 H_i - m_{fu}^* c_{pu} (t_f - t_a)}{h_5 - h_4} \\ &= \frac{0,98 \cdot 41100 - 15,77 \cdot 1,15(170 - 25)}{3323,2 - 636,6} = 14,0 \end{aligned}$$

per il rapporto tra le portate massiche di vapore e di combustibile.

Il rendimento di primo principio del generatore di vapore, scritto nella forma (12.28), è pari a

$$\begin{aligned}\eta_g &= \frac{|q_u^-|}{\dot{m}_c H_i} = \frac{\dot{m}_w (h_5 - h_4)}{\dot{m}_c H_i} = \frac{m_w^* (h_5 - h_4)}{H_i} \\ &= 14,0 \frac{3323,2 - 636,6}{41100} = 0,915 = 91,5\%\end{aligned}$$

e quindi la perdita termica nel generatore, riferita al flusso energetico fornito con il combustibile, è pari a

$$\pi_g = 1 - \eta_g = 1 - 0,915 = 0,085 = 8,5\%$$

Il rendimento exergetico del generatore è pari a

$$\begin{aligned}(\eta_g)_{II} &= \frac{\dot{m}_w (e_5 - e_4)}{\dot{m}_c e_c} = \frac{m_w^* [(h_5 - h_4) - T_a (s_5 - s_4)]}{e_c} \\ &\cong \frac{m_w^* (h_5 - h_4)}{H_i} - \frac{m_w^* T_a (s_5 - s_4)}{H_i} \\ &= 0,915 - 14,0 \cdot 298 \frac{6,8745 - 1,8417}{41100} = 0,404 = 40,4\%\end{aligned}$$

mentre la perdita exergetica nel generatore, riferita al flusso exergetico fornito con il combustibile, è pari a

$$(\pi_g)_{II} = 1 - (\eta_g)_{II} = 1 - 0,404 = 0,596 = 59,6\%$$

Nello scambiatore a miscela non si hanno perdite termiche verso l'ambiente e quindi il rendimento di primo principio è unitario, mentre il

rendimento exergetico vale

$$\begin{aligned}\eta_{II} &= \frac{(1-\omega)m_w^*(e_3-e_2)}{\omega m_w^*(e_6-e_3)} = \frac{(1-\omega)[(h_3-h_2)-T_a(s_3-s_2)]}{\omega[(h_6-h_3)-T_a(s_6-s_3)]} \\ &= \frac{(1-0,171)[(632,2-174,3)-298(1,8417-0,5925)]}{0,171[(2846,3-632,2)-298(7,0621-1,8417)]} \\ &= \frac{71,0}{112,6} = 0,630 = 63\%\end{aligned}$$

Nell'espressione precedente, il rendimento exergetico e la perdita exergetica adimensionale corrispondente ( $1 - 0,63 = 0,37 = 37\%$ ), sono riferiti al flusso exergetico fornito con il vapore estratto. Invece la perdita adimensionale, riferita al flusso exergetico fornito con il combustibile, è pari a

$$\pi_{II} = (1 - \eta_{II}) \frac{\omega m_w^*(e_6 - e_3)}{e_c} = (1 - 0,63) \frac{14 \cdot 112,6}{41100} = 0,014 = 1,4\%$$

Nella turbina, come nello scambiatore a miscela, non si hanno perdite termiche verso l'ambiente e quindi il rendimento di primo principio è unitario. Per il calcolo del rendimento exergetico, l'espansione in turbina può essere divisa in due fasi: fino all'estrazione e dopo l'estrazione. Si ottiene così

$$\begin{aligned}\eta_{III} &= \frac{m_w^*(h_5-h_6) + (1-\omega)m_w^*(h_6-h_7)}{m_w^*(e_5-e_6) + (1-\omega)m_w^*(e_6-e_7)} \\ &= \frac{(h_5-h_6) + (1-\omega)(h_6-h_7)}{[(h_5-h_6)-T_a(s_5-s_6)] + (1-\omega)[(h_6-h_7)-T_a(s_6-s_7)]} \\ &= \frac{(3323,2-2846,3) + (1-0,171)(2846,3-2305,3)}{[476,9-298(6,8745-7,0621)] + 0,829[541-298(7,0621-7,3655)]} \\ &= \frac{925,4}{1056,2} = 0,876 = 87,6\%\end{aligned}$$

contro un valore del rendimento isoentropico d'espansione che, nell'Esempio 12.3, era stato assunto pari a 0,85 in entrambi gli stadi. Nell'espressione precedente, il rendimento exergetico (87,6%) e le perdite exergetiche adimensionali corrispondenti (12,4%), sono riferiti al flusso exergetico fornito con il vapore. Invece le perdite adimensionali, riferite al flusso exergetico fornito con il combustibile, sono pari a

$$\begin{aligned}\pi_{II} &= \frac{(1 - \eta_{II}) \{ m_w^* [(e_5 - e_6) + (1 - \omega)(e_6 - e_7)] \}}{e_c} \\ &= \frac{(1 - 0,876) \cdot 14 \cdot 1056,2}{41100} = 0,045 = 4,5 \%\end{aligned}$$

Al condensatore si perdono tutta l'energia e tutta l'exergia fornite. Pertanto la perdita energetica adimensionale, riferita al flusso energetico fornito con il combustibile, è pari a

$$\pi_I = \frac{(1 - \omega) m_w^* (h_7 - h_1)}{H_i} = 0,829 \cdot 14 \frac{2305,3 - 173,9}{41100} = 0,602 = 60,2 \%$$

mentre la perdita exergetica adimensionale, riferita al flusso exergetico fornito con il combustibile, è pari a

$$\begin{aligned}\pi_{II} &= \frac{(1 - \omega) m_w^* (e_7 - e_1)}{e_c} = \frac{(1 - \omega) m_w^* [(h_7 - h_1) - T_a (s_7 - s_1)]}{e_c} \\ &= \frac{0,829 \cdot 14 [2131,4 - 298(7,3655 - 0,5925)]}{41100} = 0,032 = 3,2 \%\end{aligned}$$

I pompaggi sono entrambi isoentropici e, di conseguenza, nelle compressioni non si hanno perdite energetiche od exergetiche. Tenuto conto dell'intero ciclo e delle perdite percentuali riferite all'energia/exergia fornite

con il combustibile, s'arriva alla Tabella 12.4.

**Tabella 12.4** Perdite energetiche ed exergetiche nell'impianto a vapore considerato nell'Esempio 12.6.

PERDITE	ENERGETICHE [%]	EXERGETICHE [%]
Generatore	8,5	59,6
Scambiatore	=	1,4
Turbina	=	4,5
Condensatore	60,2	3,2
Pompe	=	=
TOTALE	68,7	68,7

Nell'ipotesi d'uguaglianza del potere calorifico inferiore e del potere exergetico dei combustibili, i rendimenti di primo e di secondo principio coincidono e, in questo caso, valgono

$$\eta_{imp} = (\eta_{II})_{imp} = 1 - \sum \pi = 1 - 0,687 = 0,313$$

D'altronde, pur a parità di risultato globale, le distribuzioni delle perdite individuate negli approcci energetico ed exergetico sono notevolmente diverse. Infatti, l'analisi energetica indica come più significativa la perdita associata al flusso termico scambiato dal condensatore, seguita dalle perdite collegate ai flussi termici dispersi nell'ambiente dal generatore. L'analisi exergetica, invece, indica come più significativa la perdita termodinamica associata alle irreversibilità negli scambi termici tra fumi e vapore, seguita dalla perdita collegata alle irreversibilità che si hanno nell'espansione in turbina. La perdita d'energia utilizzabile, dovuta al flusso termico scambiato dal condensatore, è invece molto modesta, in quanto il condensatore scarica nell'ambiente energia termica ad una temperatura molto vicina a quella dell'ambiente stesso.



## 12.6 CONCLUSIONI

In questo capitolo sono stati illustrati i cicli a vapore d'uso più frequente, partendo dai cicli semplici Rankine a vapore saturo e vapore surriscaldato. Successivamente, sono stati discussi quei miglioramenti termodinamici, come il risurriscaldamento e la rigenerazione, che sono utilizzati nei grandi impianti a vapore. Infine, sono state messe in evidenza le diverse distribuzioni delle perdite individuate dall'analisi energetica, basata unicamente sul primo principio, e dall'analisi exergetica che, più correttamente, tiene conto delle irreversibilità, e quindi della diversa qualità delle energie in gioco.

---

# CAPITOLO 13

## CICLI INVERSI

---

### 13.1 GENERALITÀ

I cicli inversi costituiscono il riferimento termodinamico per la schematizzazione d'impianti frigoriferi ed a pompa di calore. Come si è già osservato nel Capitolo 3, nei cicli frigoriferi l'effetto utile è dato dall'asportazione di calore da un sistema che, generalmente, si trova ad una temperatura inferiore a quella dell'ambiente, mentre nei cicli a pompa di calore l'effetto utile è dato dalla fornitura di calore ad un sistema che, generalmente, si trova ad una temperatura superiore a quella dell'ambiente. Dal punto di vista termodinamico non vi sono differenze tra cicli frigoriferi e cicli a pompa di calore mentre, dal punto di vista delle realizzazioni impiantistiche, le differenze tra macchine frigorifere e pompe di calore sono legate, essenzialmente, alle diverse modalità operative ed ai diversi livelli di temperatura ai quali hanno luogo gli scambi termici.

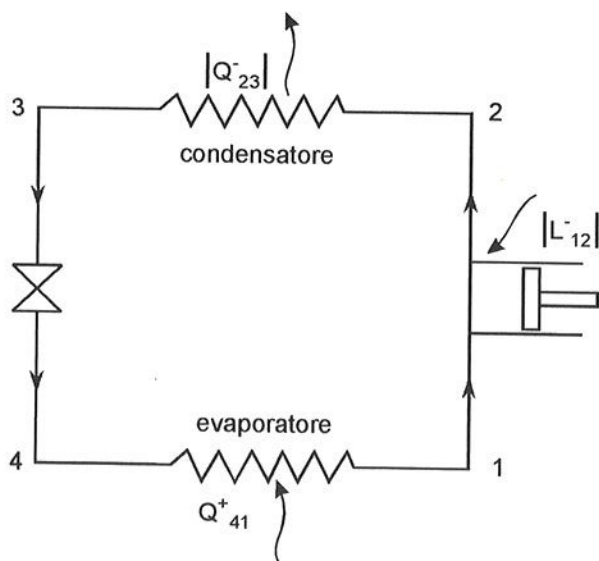
In questo capitolo si prendono in considerazione i cicli inversi a compressione di vapore e ad assorbimento, mentre si rimanda a testi specializzati per la trattazione di cicli destinati ad applicazioni particolari, come i cicli inversi a gas, ad eiezione ed a effetto Peltier.

### 13.2 CICLO INVERSO STANDARD

Con riferimento allo schema impiantistico di Fig. 13.1, le trasformazioni che hanno luogo nei diversi componenti di una macchina che realizza un ci-

clo inverso elementare a compressione di vapore, possono essere così descritte:

- compressione ( $\overline{12}$ ) nel compressore;
- cessione di calore  $Q_{23}^-$  nel condensatore, con raffreddamento fino alla temperatura di condensazione e successivo cambiamento di fase vapore-liquido;
- espansione adiabatica irreversibile ( $\overline{34}$ ) in un organo di laminazione, caratterizzata da un'entalpia finale uguale a quella iniziale;
- assorbimento di calore  $Q_{41}^+$  nell'evaporatore, fino a completare il cambiamento di fase liquido-vapore.



**Figura 13.1** Schema funzionale d'impianto atto a realizzare un ciclo inverso "standard" a semplice compressione di vapore.

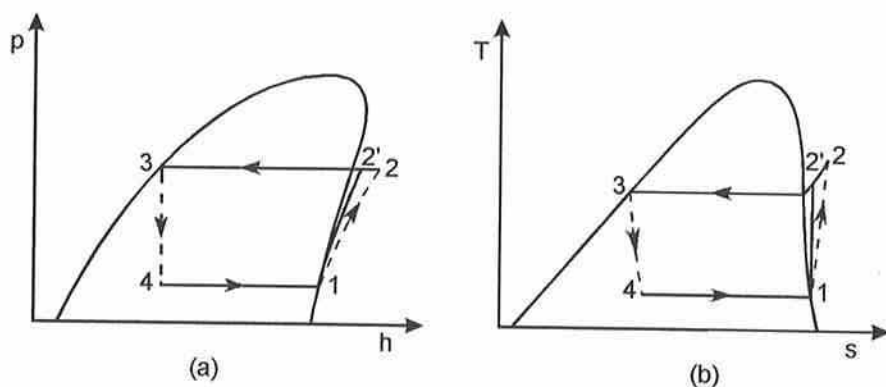
Generalmente, almeno negli impianti piccoli e medi, il compressore è di tipo alternativo. In tale caso è buona "regola dell'arte" avere, all'aspirazione, vapore saturo secco o lievemente surriscaldato. La fase liquida, infatti, è praticamente incomprimibile e tende a raccogliersi nel volume nocivo del compressore, rischiando di compromettere l'integrità meccanica

della testata e delle valvole. Inoltre, anche quando non provoca danni strutturali, il liquido "lava" il velo d'olio lubrificante dalle pareti del cilindro, facendo aumentare gli attriti che si oppongono al movimento dello stantuffo. Infine, il liquido che rimane nel volume nocivo dopo la fase di compressione contribuisce a ridurre il rendimento volumetrico evaporando durante la successiva fase d'aspirazione. Nella schematizzazione usuale, o "standard", dei cicli inversi si assume, per semplicità, che il fluido operativo si trovi nello stato di vapore saturo secco all'uscita dall'evaporatore, e nello stato di liquido saturo all'uscita dal condensatore. Inoltre, si assume che la compressione abbia luogo isoentropicamente nei cicli inversi standard ideali e che, invece, la compressione sia adiabatica, ma non isoentropica, nei cicli inversi standard reali.

Come si evince dallo schema di Fig. 13.1, l'espansione non ha luogo in un organo meccanico capace di scambiare lavoro con l'esterno. Infatti, a causa del ridotto volume specifico medio del fluido durante la trasformazione ( $\bar{v}_4$ ), il lavoro ottenibile nell'espansione sarebbe una piccola frazione di quello speso nella compressione e non giustificerebbe l'impiego di un espansore meccanico, delicato e costoso. La soluzione favorita, quindi, è l'impiego di un organo di laminazione statico che, di solito, è costituito da una valvola o da un tubo di piccolo diametro, detto "capillare". Il funzionamento degli organi di laminazione è stato discusso nel Paragrafo 3.4.3 dimostrando che, nel deflusso irreversibile che li attraversa, l'entalpia uscente è uguale all'entalpia entrante. Quindi, le irreversibilità nell'espansione non possono essere trascurate nemmeno nell'analisi dei cicli inversi standard ideali. Al contrario, nei cicli inversi standard ideali condensazione ed evaporazione sono considerate trasformazioni isobare ed internamente reversibili, trascurando così le perdite di carico nel condensatore e nell'evaporatore. Tale semplificazione è compatibile con un'analisi di prima approssimazione, in quanto le perdite di carico nel condensatore e nell'evaporatore sono, generalmente, piccole rispetto alla differenza tra le pressioni di lavoro massima (condensazione) e minima (evaporazione).

I fluidi di lavoro utilizzati negli impianti frigoriferi ed a pompa di calore, sono detti fluidi frigoriferi o refrigeranti. Essi devono avere caratteristiche tali da renderli idonei alle diverse applicazioni tecnologiche. Pur rimandando una discussione più approfondita al Paragrafo 13.5, si può già anticipare che il fluido identificato con la sigla R134a trova impiego in molti impianti, sia frigoriferi che a pompa di calore, utilizzati nei settori civile, commerciale ed industriale. Pertanto in questo capitolo si farà riferimento, essenzialmente, a tale fluido. Ciò premesso, il ciclo inverso standard a compressione di vapore operante con R134a, associato allo schema di Fig. 13.1, può essere rappresentato come in Fig. 13.2. Infatti, una volta note le condizioni operative, le ipotesi sin qui precisate consentono di determinare le proprietà termodinamiche dei capisaldi, in quanto:

- il punto 1 si trova nello stato di vapore saturo secco alla pressione d'evaporazione,
- il punto 2' si trova alla stessa entropia di 1, ma alla pressione di condensazione,
- il punto 3 si trova nello stato di liquido saturo alla pressione di condensazione, mentre
- il punto 4 si trova alla stessa entalpia di 3, ma alla pressione d'evaporazione.



**Figura 13.2** Ciclo inverso standard a compressione di vapore (R134a), rappresentato: (a) sul diagramma ( $p, h$ ) e (b) sul diagramma ( $T, s$ ).

Infine, nell'ipotesi di compressione irreversibile, la posizione del punto 2 può essere determinata in base alla conoscenza del rendimento isoentropico della trasformazione poiché, note  $h_2'$  ed  $h_1$ , dalla relazione

$$\eta_{ic} = \frac{h_2' - h_1}{h_2 - h_1} \quad (13.1)$$

si ricava facilmente l'entalpia  $h_2$ .

### 13.2.1 Ciclo Frigorifero Standard

Con riferimento alla Fig. 13.1 ed in base alle definizioni del Paragrafo 3.5, il coefficiente d'effetto utile di un ciclo frigorifero può essere espresso mediante la relazione

$$\varepsilon = \frac{Q_{41}^+}{|L_n|} = \frac{Q_{41}^+}{|L_{12}^-|} \quad (13.2)$$

La quantità di calore  $Q_{41}^+$ , asportata da un sistema a temperatura generalmente inferiore a quella ambiente, è definita "effetto frigorifero" e rappresenta l'effetto utile ottenuto a fronte del lavoro specifico  $L_{12}^-$  speso nella compressione. Se, come accade quasi sempre, le variazioni d'energia cinetica e potenziale sono trascurabili, il primo principio della termodinamica, scritto per sistemi monodimensionali stazionari, porge

$$Q_{41}^+ = h_1 - h_4 \quad (13.3)$$

e

$$L_n = L_{12}^- = h_1 - h_2 \quad (13.4)$$

in quanto, durante l'evaporazione, si ha  $L_{41} = 0$  mentre, nella compressione adiabatica, si ha  $Q_{12} = 0$ .

Si osservi che, nelle ipotesi poste, il lavoro di compressione poteva essere scritto come somma algebrica del calore ceduto dal condensatore e del calore assorbito dall'evaporatore

$$L_{12}^- = Q_{23}^- + Q_{41}^+ = (h_3 - h_2) + (h_1 - h_4) = h_1 - h_2 \quad (13.5)$$

giungendo così per altra via, al denominatore della (13.2). Infatti, come si è più volte osservato, nella laminazione non si hanno variazioni d'entalpia e, quindi, risulta  $h_3 = h_4$ . Sostituendo le (13.3) e (13.4) nella (13.2), si ottiene la relazione

$$\varepsilon = \frac{h_1 - h_4}{h_2 - h_1} \quad (13.6)$$

che consente il calcolo del coefficiente d'effetto utile una volta determinate le entalpie dei capisaldi con riferimento, ad esempio, al ciclo inverso standard rappresentato in Fig. 13.2.

### Esempio 13.1

Con riferimento alle Fig. 13.2 e 13.3 (a), si consideri un ciclo frigorifero operante con R134a tra la temperatura di evaporazione di  $-15\text{ }^\circ\text{C}$  e la temperatura di condensazione di  $40\text{ }^\circ\text{C}$ . Nelle ipotesi che:

- all'uscita del condensatore si abbia liquido saturo,
- all'aspirazione del compressore si abbia vapore saturo secco,
- il rendimento isoentropico del compressore sia pari al 70% ed
- il flusso termico asportato dall'evaporatore sia pari a 8 kW

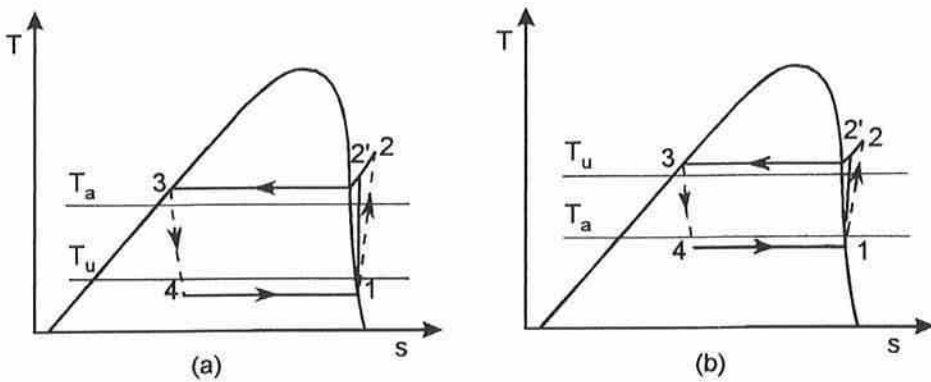
si calcolino

- il coefficiente d'effetto utile del ciclo,
- il flusso termico scambiato al condensatore,
- la potenza meccanica spesa e
- la portata volumetrica all'aspirazione del compressore.

**Soluzione**

Le informazioni fornite nel testo sono sufficienti a determinare le proprietà termodinamiche nei punti 1, 2', 3 e 4, riportati in scala sul diagramma di Fig. 13.3 (a). Poi si può tenere conto del fatto che il punto 2 si trova alla pressione di condensazione ed è caratterizzato da un valore dell'entalpia ricavabile in base alla definizione di rendimento isoentropico. Si ha infatti

$$h_2 = h_1 + \frac{h_{2'} - h_1}{\eta_{ic}} = 389,2 + \frac{427,1 - 389,2}{0,7} = 443,4 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$



**Figura 13.3** Riferimenti esterni per cicli inversi standard a compressione di vapore (R134a): (a) frigorifero e (b) a pompa di calore.

Una volta determinati i valori delle proprietà termodinamiche dei capisaldi, riportate in Tabella 13.1, si può calcolare il coefficiente d'effetto utile

$$\varepsilon = \frac{h_1 - h_4}{h_2 - h_1} = \frac{389,2 - 256,5}{443,4 - 389,2} = \frac{132,7}{54,2} = 2,45$$

Dall'espressione del flusso termico asportato nell'evaporatore

$$q_{41}^+ = \dot{m}(h_1 - h_4)$$

si ricava la portata di vapore



$$\dot{m} = \frac{q_{41}^+}{h_1 - h_4} = \frac{8}{132,7} = 0,06029 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Si ottiene quindi, in sequenza

$$|q_{23}^-| = \dot{m}(h_2 - h_3) = 0,06029(443,4 - 256,5) = 11,27 \text{ kW}$$

$$|P_{12}^-| = \dot{m}(h_2 - h_1) = 0,06029 \cdot 54,2 = 3,27 \text{ kW}$$

e

$$\dot{V}_1 = \dot{m} v_1 = 0,06029 \cdot 0,1201 = 7,241 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 / \text{s}$$

Come si vede, risulta

$$|q_{23}^-| = q_{41}^+ + |P_{12}^-| = 8 + 3,27 = 11,27 \text{ kW}$$

e quindi la somma della potenza spesa e del flusso termico utile asportato dall'evaporatore è pari al flusso termico disperso dal condensatore.

**Tabella 13.1** Proprietà termodinamiche dei capisaldi del ciclo frigorifero standard ad R134a di cui all'Esempio 13.1.

PUNTO	$T$ [K]	$p$ [MPa]	$v$ [m <sup>3</sup> /kg]	$h$ [kJ/kg]	$s$ [kJ/(kg K)]
1	258,15	0,165	0,1201	389,2	1,7354
2'	319,7	1,017	0,0209	427,1	1,7354
2	334,8	1,017	0,0228	443,4	1,7851
3	313,15	1,017	0,0009	256,5	1,1909
4	258,15	0,165	0,0443	256,5	1,2215

### 13.2.2 Ciclo Standard a Pompa di Calore

Come si è già osservato, da un punto di vista termodinamico non vi è differenza tra un ciclo frigorifero a compressione di vapore ed un ciclo omologo

a pompa di calore, anche se sono diverse, ovviamente, le finalità: raffreddare nel caso dei frigoriferi e riscaldare nel caso delle pompe di calore. Pertanto, restano ancora validi i riferimenti generali alla Fig. 13.1 ed, in base alle definizioni date nel Paragrafo 3.5, il coefficiente d'effetto utile del ciclo a pompa di calore può essere determinato mediante la relazione

$$\varepsilon' = \frac{|Q_{23}^-|}{|L_n|} = \frac{|Q_{23}^-|}{|L_{12}^-|} = \frac{Q_{41}^+ + |L_{12}^-|}{|L_{12}^-|} = 1 + \varepsilon \quad (13.7)$$

Nella (13.7),  $\varepsilon$  è il coefficiente d'effetto utile del ciclo frigorifero corrispondente, mentre la quantità di calore  $Q_{23}^-$ , ceduta ad un sistema a temperatura superiore a quella ambiente, rappresenta l'effetto utile ottenuto a fronte del lavoro specifico  $L_{12}^-$  speso nella compressione. Di conseguenza, procedendo come nel caso del ciclo frigorifero, la definizione generale (13.7) può essere trasformata nella relazione omologa alla (13.6)

$$\varepsilon' = \frac{|Q_{23}^-|}{|L_{12}^-|} = \frac{h_2 - h_3}{h_2 - h_1} = \frac{h_2 - h_4}{h_2 - h_1} = \frac{(h_2 - h_1) + (h_1 - h_4)}{h_2 - h_1} = 1 + \varepsilon \quad (13.8)$$

nella quale si è tenuto conto dell'uguaglianza  $h_3 = h_4$ . La relazione (13.8) consente il calcolo del coefficiente d'effetto utile una volta determinate le entalpie dei capisaldi con riferimento, ad esempio, al ciclo inverso standard rappresentato in Fig. 13.2.

### Esempio 13.2

Con riferimento alle Fig. 13.2 e 13.3 (b), si consideri un ciclo a pompa di calore operante con R134a tra la temperatura di evaporazione di 0 °C e la temperatura di condensazione di 50 °C. Nelle ipotesi che:

- all'uscita del condensatore si abbia liquido saturo,
- all'aspirazione del compressore si abbia vapore saturo secco,

- il rendimento isoentropico del compressore sia pari al 70% ed
  - il flusso termico fornito dal condensatore sia pari a 10 kW
- si calcolino
- il coefficiente d'effetto utile del ciclo,
  - il flusso termico scambiato asportato dall'evaporatore,
  - la potenza meccanica spesa e
  - la portata volumetrica all'aspirazione del compressore.

### Soluzione

Le informazioni fornite nel testo sono sufficienti a determinare le proprietà termodinamiche nei punti 1, 2', 3 e 4, riportati in scala sul diagramma di Fig. 13.3 (b). Poi si può tenere conto del fatto che il punto 2 si trova alla pressione di condensazione ed è caratterizzato da un valore dell'entalpia ricavabile in base alla definizione di rendimento isoentropico. Si ha, infatti

$$h_2 = h_1 + \frac{h_{2'} - h_1}{\eta_{ic}} = 398,4 + \frac{429,6 - 398,4}{0,7} = 443,0 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Una volta determinati i valori delle proprietà termodinamiche dei capisaldi, riportate in Tabella 13.2, si può calcolare il coefficiente d'effetto utile

$$\varepsilon' = \frac{h_2 - h_3}{h_2 - h_1} = \frac{443,0 - 271,8}{443,0 - 398,4} = \frac{171,2}{44,6} = 3,84$$

Dall'espressione del flusso termico fornito dal condensatore

$$|q_{23}^-| = \dot{m}(h_2 - h_3)$$

si ricava la portata di vapore

$$\dot{m} = \frac{|q_{23}^-|}{h_2 - h_3} = \frac{10}{171,2} = 0,05841 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Si ottiene quindi, in sequenza

$$q_{41}^+ = \dot{m}(h_1 - h_4) = 0,05841(398,4 - 271,8) = 7,39 \text{ kW}$$

$$|P_{12}^-| = \dot{m}(h_2 - h_1) = 0,05841 \cdot 44,6 = 2,61 \text{ kW}$$

e

$$\dot{V}_1 = \dot{m} v_1 = 0,05841 \cdot 0,0692 = 4,042 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 / \text{s}$$

Come si vede, risulta

$$|q_{23}^-| = q_{41}^+ + |P_{12}^-| = 7,39 + 2,61 = 10 \text{ kW}$$

e quindi la somma della potenza spesa e del flusso termico asportato dall'evaporatore è pari al flusso termico utile fornito dal condensatore.

**Tabella 13.2** Proprietà termodinamiche dei capisaldi del ciclo frigorifero standard ad R134a di cui all'Esempio 13.2.

PUNTO	$T$ [K]	$p$ [MPa]	$v$ [m <sup>3</sup> /kg]	$h$ [kJ/kg]	$s$ [kJ/(kg K)]
1	273,15	0,294	0,0692	398,4	1,7262
2'	327,8	1,318	0,0157	429,6	1,7262
2	339,4	1,318	0,0170	443,0	1,7663
3	323,15	1,318	0,0009	271,8	1,2381
4	273,15	0,294	0,0255	271,8	1,2630

### 13.2.3 Influenza delle Irreversibilità Esterne

Fino a questo punto, non si sono prese in considerazione le irreversibilità associate agli scambi termici esterni al ciclo. E' però evidente che, negli impianti frigoriferi ed a pompa di calore, la temperatura d'evaporazione deve essere inferiore alla temperatura del sistema esterno refrigerato, mentre la

temperatura di condensazione deve essere superiore alla temperatura del sistema esterno riscaldato. Pertanto, le temperature interne non coincidono con le temperature esterne, ma possono solo avvicinarsi ad esse tanto più quanto più efficienti sono l'evaporatore ed il condensatore. In molte situazioni d'interesse pratico, ad esempio, trovano applicazione gli schemi di Fig. 13.3, ai quali si farà riferimento nel seguito.

In un impianto frigorifero nella situazione di Fig. 13.3 (a), il flusso termico disperso dal condensatore è scaricato all'esterno utilizzando come mezzo refrigerante l'aria, o l'acqua, che si trovano alla temperatura ambiente  $T_a$ , necessariamente inferiore alla temperatura di condensazione  $T_3$ . Analogamente, per avere scambio termico all'evaporatore, occorre che la temperatura d'evaporazione  $T_{41}$  sia più bassa della temperatura "utile"  $T_u$  alla quale si riesce a mantenere il sistema refrigerato (che, in questo caso, potrebbe essere una cella frigorifera).

In un impianto a pompa di calore nella situazione di Fig. 13.3 (b), occorre tener conto del fatto che l'evaporatore preleva calore gratuito dall'ambiente, mentre il flusso termico utile è fornito dal condensatore. Di conseguenza, il flusso termico scambiato dall'evaporatore è prelevato da aria, acqua o terreno che si trovano alla temperatura ambiente  $T_a$ , necessariamente superiore alla temperatura di evaporazione  $T_{41}$ . Analogamente, per avere scambio termico al condensatore, occorre che la temperatura di condensazione  $T_3$  sia più alta della temperatura "utile"  $T_u$  alla quale si riesce a mantenere il sistema riscaldato che, in questo caso, potrebbe essere un accumulatore termico (in pratica, un serbatoio d'acqua calda di volume adeguato).

### **13.3 ANALISI EXERGETICA DI IMPIANTI A COMPRESSIONE DI VAPORE**

Le analisi che hanno portato alla determinazione dei coefficienti d'effetto utile dei cicli inversi, sono basate sul primo principio della termodinamica e

non tengono conto, se non indirettamente, delle irreversibilità. Pertanto, i coefficienti d'effetto utile vanno considerati come parametri caratteristici validi soltanto nell'ambito di condizioni funzionali ben definite. Per confrontare tra loro impianti che operino in campi di temperatura diversi, o per individuare le vere perdite termodinamiche ed intervenire correttamente sui componenti più critici degli impianti, occorre utilizzare gli strumenti dell'analisi exergetica. Nel Paragrafo 12.5.1, si era già applicata l'analisi exergetica agli impianti a vapore a ciclo diretto; qui si vuole mostrare come la stessa metodologia possa essere utilizzata vantaggiosamente anche nello studio degli impianti a vapore a ciclo inverso.

### Esempio 13.3

Con riferimento allo schema d'appoggio illustrato in Fig. 13.1 ed al ciclo frigorifero rappresentato in Fig. 13.3 (a), si confrontino i rendimenti di secondo principio relativi a ciclo ed impianto.

#### Soluzione

Si indichi con

$$q_{41}^- = \dot{m}(h_4 - h_1) = -q_{ev}^+$$

il flusso termico che l'evaporatore asporta dal sistema refrigerato (pari in modulo al flusso termico "fornito" all'evaporatore). Con tale notazione, l'exergia "ottenuta", cioè fornita dall'impianto al sistema refrigerato, può essere espressa mediante la relazione

$$\dot{m}|e_Q| = q_{41}^- \left(1 - \frac{T_a}{T_u}\right)^- = \dot{m}(h_4 - h_1) \left(1 - \frac{T_a}{T_u}\right)^-$$

L'exergia fornita all'evaporatore dal fluido frigorifero è pari a

$$\begin{aligned}\dot{m}(e_4 - e_1) &= \dot{m}[(h_4 - h_1) - T_a(s_4 - s_1)] \\ &= \dot{m} \left[ (h_4 - h_1) - \frac{T_a}{T_{41}}(h_4 - h_1) \right] = \dot{m} \left( 1 - \frac{T_a}{T_{41}} \right)^-\end{aligned}$$

L'exergia fornita, sia al ciclo sia all'impianto, è pari a

$$|P_{12}^-| = \dot{m}(h_2 - h_1)$$

e coincide, in modulo, con la potenza del compressore.

Nel ciclo e nell'impianto si hanno perdite exergetiche, al compressore

$$\begin{aligned}|P_{12}^-| - \dot{m}(e_2 - e_1) &= \\ \dot{m} \{ (h_2 - h_1) - [(h_2 - h_1) - T_a(s_2 - s_1)] \} &= \dot{m} T_a(s_2 - s_1)\end{aligned}$$

al condensatore

$$\dot{m}(e_2 - e_3) = \dot{m}[(h_2 - h_3) - T_a(s_2 - s_3)]$$

dove, generalmente, viene dispersa all'esterno tutta l'exergia ancora contenuta nel vapore, e nell'organo di laminazione

$$\dot{m}(e_3 - e_4) = \dot{m}[(h_3 - h_4) - T_a(s_3 - s_4)] = \dot{m} T_a(s_4 - s_3)$$

dove l'entalpia all'uscita uguaglia l'entalpia all'entrata.

Nell'intero impianto si hanno, in aggiunta, le perdite exergetiche associate allo scambio termico, all'evaporatore, tra il fluido frigorifero ed il sistema refrigerato. Tali perdite sono pari alla differenza tra l'exergia fornita dal ciclo all'evaporatore e l'exergia ottenuta dall'impianto

$$\begin{aligned} \dot{m}(e_4 - e_1) - \dot{m}|e_Q| &= q_{41}^- \left(1 - \frac{T_a}{T_{41}}\right)^- - q_{41}^- \left(1 - \frac{T_a}{T_u}\right)^- \\ &= q_{41}^- \left[ \left(1 - \frac{T_a}{T_{41}}\right)^- - \left(1 - \frac{T_a}{T_u}\right)^- \right] = q_{41}^- T_a \left( \frac{T_{41} - T_u}{T_{41} T_u} \right)^- \end{aligned}$$

Come si vede, tali perdite tendono ad annullarsi quando la temperatura utile si avvicina alla temperatura d'evaporazione, mentre tendono a crescere al diminuire delle temperature alle quali avviene lo scambio termico.

Il rendimento di secondo principio del ciclo è pari a

$$\begin{aligned} \eta_{II} &= \frac{\dot{m} \left[ (h_4 - h_1) - T_a (s_4 - s_1) \right]}{\dot{m} (h_2 - h_1)} = \frac{q_{41}^- (1 - T_a / T_{41})^-}{|P_{12}^-|} \\ &= \frac{-(1 - T_a / T_{41})^- q_{ev}^+}{|P_{12}^-|} = \frac{\varepsilon}{T_{41} / (T_a - T_{41})} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{Carnot}(T_{41}, T_a)} \end{aligned}$$

mentre il rendimento di secondo principio dell'impianto è pari a

$$(\eta_{II})_{imp} = \frac{q_{41}^- (1 - T_a / T_u)^-}{|P_{12}^-|} = \frac{\varepsilon}{T_u / (T_a - T_u)} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{Carnot}(T_u, T_a)}$$

Il rendimento di secondo principio del ciclo è superiore al rendimento di secondo principio dell'impianto in quanto, a parità di numeratore  $\varepsilon$ , la temperatura di evaporazione  $T_{41}$ , più bassa di  $T_u$ , fa sì che il coefficiente d'effetto utile di Carnot, relativo al ciclo, sia più piccolo del coefficiente d'effetto utile di Carnot relativo all'impianto. Del resto, il rendimento di secondo principio d'impianto è penalizzato, rispetto al rendimento di secondo principio di ciclo, dalla perdita aggiuntiva all'evaporatore.



**Esempio 13.4**

Con riferimento alla Fig. 13.3 (a), si esegua l'analisi exergetica di un impianto frigorifero a compressione di vapore, che opera con il ciclo ad R134a illustrato nell'Esempio 13.1. Nelle ipotesi che:

- la temperatura dell'ambiente sia pari a 35 °C (approssimata nei calcoli a 308 K) e
- la temperatura utile del sistema refrigerato sia pari a - 10 °C

si calcolino le perdite exergetiche nei diversi componenti e si determini il rendimento di secondo principio dell'impianto.

*Soluzione*

L'analisi di primo principio dell'impianto è già stata illustrata nell'Esempio 13.1, mentre le proprietà termodinamiche dei capisaldi sono state riportate nella Tabella 13.1. Per l'analisi exergetica basta quindi esaminare, in sequenza, i diversi componenti dell'impianto.

Al condensatore, tutta l'exergia viene, generalmente, dispersa nell'ambiente. Si ha quindi una perdita pari a

$$\begin{aligned}\dot{m}(e_2 - e_3) &= \dot{m}(h_2 - h_3) - \dot{m} T_a (s_2 - s_3) \\ &= 11,27 - 0,06029 \cdot 308(1,7851 - 1,1909) = 0,24 \text{ kW}\end{aligned}$$

Analogamente, nella valvola di laminazione, la perdita d'exergia è pari all'intera exergia fornita

$$\begin{aligned}\dot{m}(e_3 - e_4) &= \dot{m}(h_3 - h_4) - \dot{m} T_a (s_3 - s_4) = -\dot{m} T_a (s_3 - s_4) \\ &= -0,06029 \cdot 308(1,1909 - 1,2215) = 0,57 \text{ kW}\end{aligned}$$

All'evaporatore, l'effetto utile è costituito dal flusso termico  $\bar{q}_{41}$  asportato dal sistema refrigerato. A questo flusso termico è associata l'exergia ottenuta

$$\dot{m}|e_Q| = q_{41} \left(1 - \frac{T_a}{T_u}\right) = -8 \left(1 - \frac{308}{263,15}\right) = 1,36 \text{ kW}$$

L'exergia fornita all'evaporatore dal fluido frigorifero è pari a

$$\begin{aligned} \dot{m}(e_4 - e_1) &= \dot{m}(h_4 - h_1) - \dot{m} T_a(s_4 - s_1) \\ &= -8 - 0,06029 \cdot 308(1,2215 - 1,7354) = 1,54 \text{ kW} \end{aligned}$$

Pertanto la perdita d'exergia all'evaporatore è data da

$$\dot{m}(e_4 - e_1) - \dot{m}|e_Q| = 1,54 - 1,37 = 0,18 \text{ kW}$$

L'exergia ottenuta dal fluido frigorifero nella compressione è data da

$$\begin{aligned} \dot{m}(e_2 - e_1) &= \dot{m}(h_2 - h_1) - \dot{m} T_a(s_2 - s_1) \\ &= 3,27 - 0,06029 \cdot 308(1,7851 - 1,7354) = 2,35 \text{ kW} \end{aligned}$$

mentre l'exergia fornita nella compressione è pari, in modulo, alla potenza spesa (3,27 kW) calcolata nell'Esempio 13.1. Pertanto, la perdita d'exergia nel compressore è data da

$$\begin{aligned} \dot{m}(h_2 - h_1) - [\dot{m}(h_2 - h_1) - \dot{m} T_a(s_2 - s_1)] &= \dot{m} T_a(s_2 - s_1) \\ &= |P_{12}^-| - \dot{m}(e_2 - e_1) = 3,27 - 2,35 = 0,92 \text{ kW} \end{aligned}$$

Il rendimento exergetico della compressione è quindi pari a

$$\eta_{II} = \frac{\dot{m}(e_2 - e_1)}{|P_{12}^-|} = \frac{2,35}{3,27} = 0,72$$

contro un rendimento isoentropico del 70%, ipotizzato nell'Esempio 3.1.

L'intera analisi è riassunta nella Tabella 13.3, dove le perdite sono riportate in valore assoluto ed in percentuale del flusso exergetico fornito all'impianto sotto forma di potenza di compressione. In base ai risultati di tabella, il rendimento exergetico dell'intero impianto è pari a

$$\begin{aligned} (\eta_{II})_{imp} &= \frac{\text{exergia ottenuta}}{\text{exergia fornita}} = 1 - \frac{\text{perdite exergetiche}}{\text{exergia fornita}} \\ &= \frac{1,36}{3,27} = 1 - \frac{1,91}{3,27} = 0,42 \end{aligned}$$

mentre il rendimento exergetico del ciclo è superiore, e pari a

$$\eta_{II} = 1 - \frac{1,91 - 0,18}{3,27} = 0,47$$

in quanto non è penalizzato dalla perdita exergetica di 0,18 kW nello scambio termico tra evaporatore e ambiente. In questo caso, le perdite d'exergia più elevate si hanno al compressore e quindi, per aumentare i rendimenti di secondo principio, occorre migliorare, prima di tutto, l'efficienza di tale organo. Perdite elevate si hanno anche nella valvola di laminazione ma, come si è detto, la scelta della valvola è imposta da ragioni economiche e tecnologiche.

**Tabella 13.3** Perdite exergetiche nell'impianto frigorifero di cui all'Esempio 13.1, valutate in valore assoluto ed in percentuale del flusso exergetico fornito.

PERDITE EXERGETICHE	[kW]	[%]
Condensatore	0,24	0,07
Valvola di laminazione	0,57	0,17
Evaporatore	0,18	0,05
Compressore	0,92	0,28
TOTALE	1,91	0,58

**Esempio 13.5**

Con riferimento allo schema d'appoggio illustrato in Fig. 13.1 ed al ciclo a pompa di calore rappresentato in Fig. 13.3 (b), si confrontino i rendimenti di secondo principio relativi a ciclo ed impianto.

*Soluzione*

Si indichi con

$$q_{23}^+ = \dot{m}(h_2 - h_3) = -q_{cond}^- = |q_{cond}^-|$$

il flusso termico che il condensatore fornisce al sistema riscaldato (pari, in modulo al flusso termico "ceduto" dal condensatore al sistema riscaldato). Con tale notazione l'exergia "ottenuta", cioè fornita dall'impianto al sistema riscaldato, può essere espressa mediante la relazione

$$\dot{m}|e_Q| = q_{23}^+ \left(1 - \frac{T_a}{T_u}\right)^+ = \dot{m}(h_2 - h_3) \left(1 - \frac{T_a}{T_u}\right)^+$$

L'exergia fornita al condensatore dal fluido frigorifero è pari a

$$\dot{m}(e_2 - e_3) = \dot{m}[(h_2 - h_3) - T_a(s_2 - s_3)]$$

L'exergia fornita, sia al ciclo sia all'impianto, è pari a

$$|P_{12}^-| = \dot{m}(h_2 - h_1)$$

e coincide, in modulo, con la potenza del compressore.

Nel ciclo e nell'impianto si hanno perdite exergetiche, al compressore

$$|P_{12}^-| - \dot{m}(e_2 - e_1) =$$

$$\dot{m}\{(h_2 - h_1) - [(h_2 - h_1) - T_a(s_2 - s_1)]\} = \dot{m}T_a(s_2 - s_1)$$

all'evaporatore

$$\dot{m}(e_4 - e_1) = \dot{m}[(h_4 - h_1) - T_a(s_4 - s_1)] = \dot{m}(h_4 - h_1) \left(1 - \frac{T_a}{T_{41}}\right)^-$$

dove, generalmente, viene dispersa all'esterno tutta l'exergia ancora contenuta nel vapore, e nell'organo di laminazione

$$\dot{m}(e_3 - e_4) = \dot{m}[(h_3 - h_4) - T_a(s_3 - s_4)] = \dot{m}T_a(s_4 - s_3)$$

dove l'entalpia all'uscita uguaglia l'entalpia all'entrata.

Nell'intero impianto si hanno, in aggiunta, le perdite exergetiche associate allo scambio termico al condensatore, tra il fluido frigorifero ed il sistema riscaldato. Tali perdite sono pari alla differenza tra l'exergia fornita dal ciclo al condensatore e l'exergia ottenuta dall'impianto

$$\dot{m}(e_2 - e_3) - \dot{m}|e_Q| = \dot{m}[(h_2 - h_3) - T_a(s_2 - s_3)] - \dot{m}(h_2 - h_3) \left(1 - \frac{T_a}{T_u}\right)^+$$

Il rendimento di secondo principio del ciclo è pari a

$$\eta_{II} = \frac{\dot{m}[(h_2 - h_3) - T_a(s_2 - s_3)]}{\dot{m}(h_2 - h_3)} = \frac{(h_2 - h_3) - T_a(s_2 - s_3)}{\dot{m}(h_2 - h_3)}$$

mentre il rendimento di secondo principio dell'impianto è pari a

$$\begin{aligned} (\eta_{II})_{imp} &= \frac{q_{23}^+(1 - T_a/T_u)^+}{|P_{12}^-|} = \frac{|q_{cond}^-|(1 - T_a/T_u)^+}{|P_{12}^-|} \\ &= \frac{\varepsilon'}{T_u/(T_a - T_u)} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon'_{Carnot}(T_u, T_a)} \end{aligned}$$

Il rendimento di secondo principio del ciclo è superiore al rendimento di se-

condo principio dell'impianto, in quanto il rendimento di impianto è penalizzato dalla perdita aggiuntiva al condensatore.

### Esempio 13.6

Con riferimento alla Fig. 13.3 (b), si esegua l'analisi exergetica di un impianto a pompa di calore a compressione, che opera con il ciclo ad R134a illustrato nell'Esempio 13.2. Nelle ipotesi che:

- la temperatura ambiente sia pari a 5 °C (approssimata nei calcoli a 278 K) e
- la temperatura utile del sistema riscaldato sia pari a 45 °C

si calcolino le perdite exergetiche nei diversi componenti e si determini il rendimento di secondo principio dell'impianto.

### Soluzione

L'analisi di primo principio dell'impianto è già stata illustrata nell'Esempio 13.2, mentre le proprietà termodinamiche dei capisaldi sono state riportate nella Tabella 13.2. Per l'analisi exergetica basta quindi esaminare, in sequenza, i diversi componenti dell'impianto.

Al condensatore, l'effetto utile è dato dal flusso termico fornito al sistema riscaldato. A questo flusso è associato il flusso exergetico

$$\dot{m}|e_Q| = q_{23}^+ \left(1 - \frac{T_a}{T_u}\right)^+ = 10 \left(1 - \frac{278}{318,15}\right) = 1,26 \text{ kW}$$

L'exergia fornita al condensatore dal fluido frigorifero è pari a

$$\begin{aligned} \dot{m}(e_2 - e_3) &= \dot{m}(h_2 - h_3) - \dot{m}T_a(s_2 - s_3) \\ &= 10 - 0,05841 \cdot 278(1,7663 - 1,2381) = 1,42 \text{ kW} \end{aligned}$$

Pertanto la perdita d'exergia al condensatore è data da

$$\dot{m}(e_2 - e_3) - \dot{m}|e_Q| = 1,42 - 1,26 = 0,16 \text{ kW}$$

Nella valvola di laminazione, la perdita d'exergia è pari all'intera exergia fornita

$$\begin{aligned} \dot{m}(e_3 - e_4) &= \dot{m}(h_3 - h_4) - \dot{m}T_a(s_3 - s_4) = -\dot{m}T_a(s_3 - s_4) \\ &= -0,05841 \cdot 278(1,2381 - 1,2630) = 0,41 \text{ kW} \end{aligned}$$

Analogamente, all'evaporatore, tutta l'exergia viene, generalmente, dispersa nell'ambiente. Si ha quindi una perdita pari a

$$\begin{aligned} \dot{m}(e_4 - e_1) &= \dot{m}(h_4 - h_1) - \dot{m}T_a(s_4 - s_1) \\ &= -7,39 - 0,05841 \cdot 278(1,2630 - 1,7262) = 0,13 \text{ kW} \end{aligned}$$

L'exergia ottenuta dal fluido frigorifero nella compressione è data da

$$\begin{aligned} \dot{m}(e_2 - e_1) &= \dot{m}(h_2 - h_1) - \dot{m}T_a(s_2 - s_1) \\ &= 2,61 - 0,05841 \cdot 278(1,7663 - 1,7262) = 1,96 \text{ kW} \end{aligned}$$

mentre l'exergia fornita nella compressione è pari, in modulo, alla potenza spesa (2,61 kW) calcolata nell'Esempio 13.2. Pertanto, la perdita d'exergia nel compressore è data da

$$\begin{aligned} \dot{m}(h_2 - h_1) - [\dot{m}(h_2 - h_1) - \dot{m}T_a(s_2 - s_1)] &= \dot{m}T_a(s_2 - s_1) \\ &= |P_{12}^-| - \dot{m}(e_2 - e_1) = 2,61 - 1,96 = 0,65 \text{ kW} \end{aligned}$$

Il rendimento exergetico della compressione è quindi pari a

$$\eta_{II} = \frac{\dot{m}(e_2 - e_1)}{|P_{12}^-|} = \frac{1,96}{2,61} = 0,75$$

contro un rendimento isoentropico del 70%, ipotizzato nell'Esempio 13.2.

L'intera analisi è riassunta nella Tabella 13.4, dove le perdite sono riportate in valore assoluto ed in percentuale del flusso exergetico fornito all'impianto sotto forma di potenza meccanica. In base ai risultati di tabella, il rendimento exergetico dell'intero impianto è pari a

$$\begin{aligned} (\eta_{II})_{imp} &= \frac{\text{exergia ottenuta}}{\text{exergia fornita}} = 1 - \frac{\text{perdite exergetiche}}{\text{exergia fornita}} \\ &= \frac{1,26}{2,61} = 1 - \frac{1,35}{2,61} = 0,48 \end{aligned}$$

mentre il rendimento exergetico del ciclo è superiore e pari a

$$\eta_{II} = 1 - \frac{1,35 - 0,16}{2,61} = 0,54$$

in quanto non è penalizzato dalla perdita exergetica di 0,16 kW nello scambio termico tra condensatore ed ambiente. Anche in questo caso, come nell'esempio precedente, le perdite d'exergia più elevate si hanno al compressore e quindi, per aumentare i rendimenti di secondo principio occorre migliorare, prima di tutto, l'efficienza di tale organo.

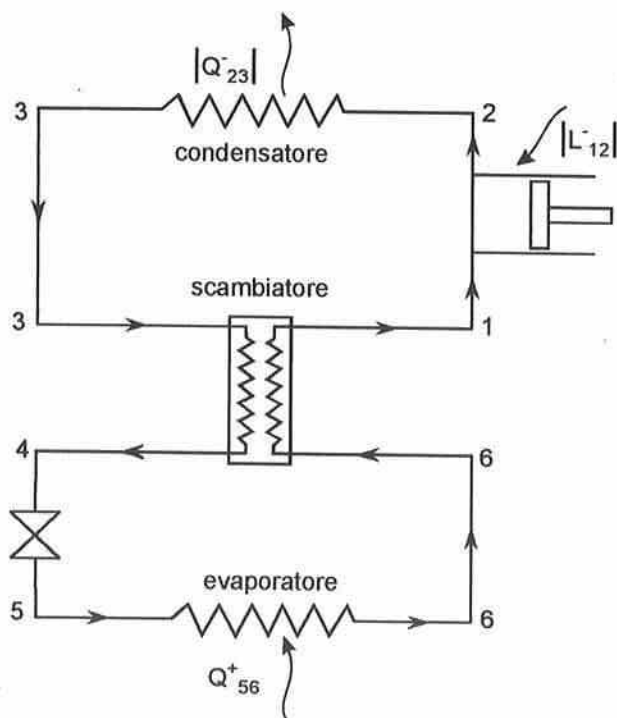
**Tabella 13.4** Perdite exergetiche nell'impianto a pompa di calore di cui all'Esempio 13.2, valutate in valore assoluto ed in percentuale del flusso exergetico fornito.

PERDITE EXERGETICHE	[kW]	[%]
Condensatore	0,16	0,06
Valvola di laminazione	0,41	0,16
Evaporatore	0,13	0,05
Compressore	0,65	0,25
TOTALE	1,35	0,52



### 13.4 CICLO INVERSO CON RIGENERAZIONE

Nella rappresentazione del ciclo inverso standard, si è supposto che il fluido frigorifero si trovasse nello stato di vapore saturo secco all'uscita dall'evaporatore, e nello stato di liquido saturo all'uscita dal condensatore. In realtà, tali condizioni sono difficilmente mantenibili durante il normale funzionamento e quindi ha senso valutare l'influenza d'eventuali spostamenti degli stati iniziali della compressione e della laminazione. A questo proposito si può osservare che, abbastanza spesso, si sceglie di sottoraffreddare il liquido all'uscita del condensatore a spese di un surriscaldamento del vapore all'uscita dell'evaporatore. A tal fine s'inserisce nell'impianto uno scambiatore rigenerativo, come evidenziato in Fig. 13.4.



**Figura 13.4** Schema funzionale di impianto atto a realizzare un ciclo inverso con sottoraffreddamento del liquido e surriscaldamento del vapore.

Il ciclo inverso associato allo schema di Fig. 13.4, è illustrato nella Fig. 13.5. Se lo scambiatore è adiabatico verso l'esterno, risulta

$$h_3 - h_4 = h_1 - h_6 \quad (13.9)$$

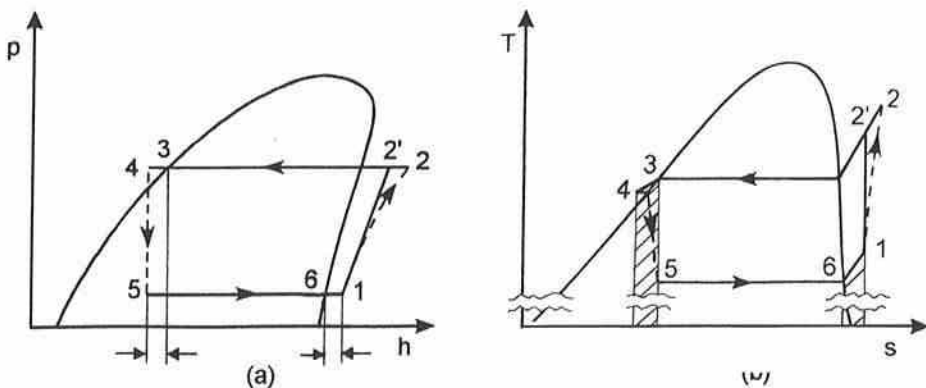
mentre, se le trasformazioni  $\overline{34}$  e  $\overline{61}$  sono internamente reversibili, si ha

$$|Q_{34}^-| = \int_{s_4}^{s_3} T ds = |Q_{61}^+| = \int_{s_6}^{s_1} T ds \quad (13.10)$$

Pertanto, in base alla (13.9), sono uguali le lunghezze dei segmenti  $\overline{43}$  e  $\overline{61}$  misurate sul diagramma  $(p, h)$  mentre, in base alla (13.10), sono uguali, sul diagramma  $(T, s)$ , le aree comprese tra l'isoterma  $T = 0 \text{ K}$  e le curve  $\overline{43}$  e  $\overline{61}$ .

Con riferimento alla Fig. 13.5 ed alle definizioni generali, il coefficiente d'effetto utile di un ciclo frigorifero a compressione, con scambiatore rigenerativo, può essere espresso mediante la relazione

$$\varepsilon = \frac{Q_{56}^+}{|L_n|} = \frac{Q_{56}^+}{|L_{12}^-|} = \frac{h_6 - h_5}{h_2 - h_1} \quad (13.11)$$



**Figura 13.5** Ciclo inverso con sottoraffreddamento del liquido e surriscaldamento del vapore (R134a), rappresentato: (a) sul diagramma  $(p, h)$  e (b) sul diagramma  $(T, s)$ .

Dall'esame comparato delle Fig. 13.2 e 13.5 e dalle espressioni dei coefficienti d'effetto utile, risulta evidente che l'introduzione dello scambiatore rigenerativo fa aumentare la quantità di calore  $Q_{56}^+$ , scambiata nell'evaporatore. Nello stesso tempo, tuttavia, la rigenerazione fa aumentare il lavoro speso  $L_{12}^-$ , in quanto sposta la compressione verso la zona del vapore surriscaldato dove, a parità di rapporto delle pressioni, il volume specifico medio è più elevato. Pertanto, a seguito della rigenerazione, il coefficiente di effetto frigorifero del ciclo può aumentare o diminuire, secondo le condizioni operative ed il tipo di fluido utilizzato. La presenza dello scambiatore rigenerativo rende, comunque, estremamente improbabile l'ingresso di liquido nel compressore ed assicura che, all'ingresso dell'organo di laminazione, non vi siano bolle di vapore che impediscono un deflusso regolare. Quindi, l'utilizzazione dello scambiatore rigenerativo è sempre pienamente giustificata dal punto di vista dell'affidabilità d'impianto.

Con riferimento ancora alla Fig. 13.5 ed alle definizioni generali, il coefficiente d'effetto utile di un ciclo a pompa di calore a compressione con scambiatore rigenerativo, può essere espresso mediante la relazione

$$\varepsilon' = \frac{|Q_{23}^-|}{|L_n|} \left( = \frac{Q_{56}^+ + |L_{12}^-|}{|L_{12}^-|} \right) = \frac{h_2 - h_3}{h_2 - h_1} (= 1 + \varepsilon) \quad (13.12)$$

Anche in questo caso, non è predeterminabile l'influenza della rigenerazione sul coefficiente di effetto utile in quanto, a causa del surriscaldamento del vapore all'aspirazione, aumentano sia la quantità di calore  $|Q_{23}^-|$  scambiata al condensatore sia il lavoro speso nella compressione.

### Esempio 13.7

Con riferimento alla Fig. 13.5, si consideri il ciclo frigorifero con scambiatore rigenerativo, operante con R134a tra la temperatura d'evaporazione di  $-15^\circ\text{C}$  e la temperatura di condensazione di  $40^\circ\text{C}$ . Nelle ipotesi che:

- all'uscita del condensatore si abbia liquido saturo,
- all'uscita dello scambiatore rigenerativo, lato liquido, si abbia un sottraffreddamento di 10 K,
- il rendimento isoentropico del compressore sia pari al 70% e
- il flusso termico asportato dall'evaporatore sia pari a 8 kW

si calcolino

- il coefficiente d'effetto utile del ciclo,
- il flusso termico scambiato al condensatore,
- la potenza meccanica spesa e
- la portata volumetrica all'aspirazione del compressore.

### Soluzione

Le informazioni fornite nel testo sono sufficienti a determinare le proprietà termodinamiche nei punti 3, 4, 5 e 6. Inoltre, la posizione del punto 1 può essere trovata sapendo il punto stesso si trova alla pressione di evaporazione, mentre la sua entalpia può essere calcolata dal bilancio entalpico sullo scambiatore

$$h_1 = h_6 + (h_3 - h_4) = 389,2 + (256,5 - 241,8) = 403,9 \text{ kJ / kg}$$

Il punto 2' ha la stessa entropia del punto 1, ma si trova alla pressione di condensazione. Infine, si può tenere conto del fatto che il punto 2 si trova ancora alla pressione di condensazione ed è caratterizzato da un valore dell'entalpia ricavabile in base alla definizione di rendimento isoentropico. Si ha, infatti

$$h_2 = h_1 + \frac{h_{2'} - h_1}{\eta_{ic}} = 403,9 + \frac{445,3 - 403,9}{0,7} = 463,0 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Una volta determinati i valori delle proprietà termodinamiche dei capisaldi, riportate in Tabella 13.5, si può calcolare il coefficiente d'effetto utile

$$\varepsilon = \frac{h_6 - h_5}{h_2 - h_1} = \frac{389,2 - 241,8}{463,0 - 403,9} = \frac{147,4}{59,1} = 2,49$$

che risulta sostanzialmente invariato rispetto all'Esempio 13.1. Dall'espressione del flusso termico asportato nell'evaporatore

$$q_{56}^+ = \dot{m}(h_6 - h_5)$$

si ricava la portata di vapore

$$\dot{m} = \frac{q_{56}^+}{h_6 - h_5} = \frac{8}{147,4} = 0,05427 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

che è diminuita rispetto all'Esempio 13.1, in quanto l'effetto frigorifero utile è aumentato. Si ottiene quindi, in sequenza

$$|q_{23}^-| = \dot{m}(h_2 - h_3) = 0,05427(463,0 - 256,5) = 11,21 \text{ kW}$$

$$|P_{12}^-| = \dot{m}(h_2 - h_1) = 0,05427 \cdot 59,1 = 3,21 \text{ kW}$$

e

$$\dot{V}_1 = \dot{m} v_1 = 0,05427 \cdot 0,1301 = 7,06 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 / \text{s}$$

**Tabella 13.5** Proprietà termodinamiche dei capisaldi del ciclo frigorifero con rigenerazione ad R134a di cui all'Esempio 13.5.

PUNTO	$T$ [K]	$p$ [MPa]	$v$ [m <sup>3</sup> /kg]	$h$ [kJ/kg]	$s$ [kJ/(kg K)]
1	275,7	0,165	0,1301	403,9	1,7907
2'	336,6	1,017	0,0231	445,3	1,7907
2	353,6	1,017	0,0250	463,0	1,8420
3	313,15	1,017	0,0009	256,5	1,1909
4	303,15	1,017	0,0008	241,8	1,1430
5	258,15	0,165	0,0359	241,8	1,1644
6	258,15	0,165	0,1201	389,2	1,7354

La potenza di compressione e la portata volumetrica non sono variate in modo sostanziale, poiché la diminuzione della portata di massa è stata compensata dagli aumenti intervenuti, rispettivamente, nel salto entalpico e nel volume specifico all'aspirazione. Come al solito, poi, risulta

$$|q_{23}^-| = q_{56}^+ + |P_{12}^-| = 8 + 3,21 = 11,21 \text{ kW}$$

e quindi la somma della potenza spesa e del flusso termico utile asportato dall'evaporatore è pari al flusso termico disperso dal condensatore.

### 13.5 CICLI FRIGORIFERI PER BASSE TEMPERATURE

I limiti di Carnot per l'efficienza dei cicli inversi bitermici, indicano che le differenze tra le temperature di condensazione e d'evaporazione influenzano l'efficienza dei cicli inversi. I risultati teorici trovano conferma nelle analisi dei cicli reali, anche se questi ultimi non sono costituiti da trasformazioni isoterme ed adiabatiche reversibili. In particolare, quando la differenza tra le temperature di condensazione e d'evaporazione supera i 60 - 70 K, le efficienze dei cicli inversi a semplice compressione di vapore scendono a valori ritenuti eccessivamente bassi. Nella produzione di freddo ai nostri climi, le temperatura di progetto per la condensazione sono comprese tra 30 e 45 °C e, di conseguenza, gli impianti frigoriferi a semplice compressione sono utilizzabili fino a temperature d'evaporazione dell'ordine dei -30 °C. Per mantenere un'efficienza accettabile a temperature inferiori occorre impiegare, invece, cicli che diventano più complessi al diminuire della temperatura d'evaporazione. Una situazione concettualmente simile si era riscontrata nei cicli diretti a vapore, dove una maggiore complessità era il prezzo da pagare per avere rendimenti più elevati.

Nei cicli frigoriferi, al diminuire della temperatura d'evaporazione aumenta, a parità di temperatura di condensazione, il rapporto tra le pressio-

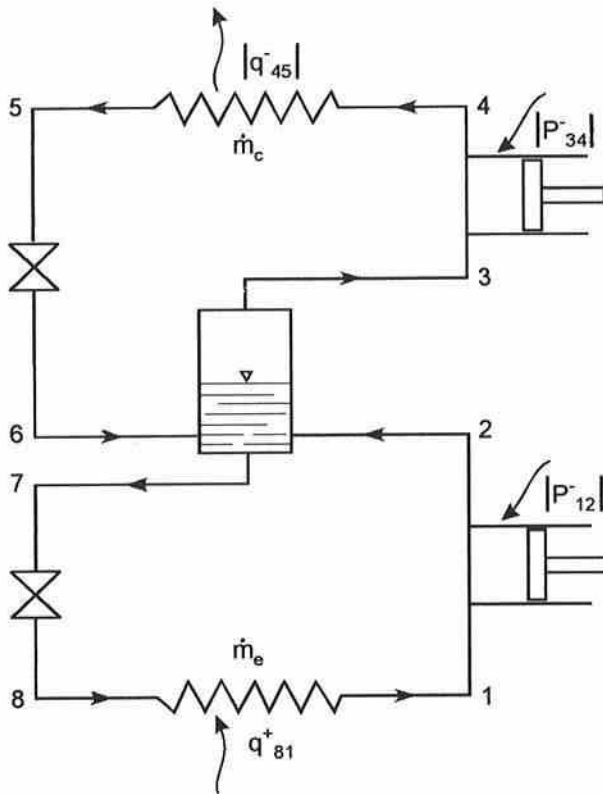
ni di mandata e d'aspirazione del compressore. Nella Sezione 5.6 si è visto che, per rapporti di pressione superiori a 10, è conveniente realizzare la compressione in due stadi con refrigerazione intermedia, al fine di risparmiare lavoro e di mantenere il rendimento volumetrico entro valori accettabili. La sola doppia compressione, tuttavia, non evita di espandere l'intera portata di fluido frigorifero fino alla pressione d'evaporazione raggiungendo, in questo modo, valori abbastanza elevati del titolo finale. Ciò costituisce uno svantaggio evidente dal punto di vista termodinamico in quanto la frazione di vapore, disponibile a bassa temperatura, non contribuisce all'effetto frigorifero, mentre richiede ugualmente una spesa di lavoro per la compressione. Un possibile rimedio, illustrato nel paragrafo che segue, è rappresentato dall'utilizzazione di cicli frigoriferi a doppia compressione e doppia laminazione.

In linea di principio, considerazioni simili potrebbero essere fatte anche per cicli a compressione a pompa di calore, operanti con differenze elevate tra la temperatura di condensazione (dipendente dalle condizioni operative), e la temperatura d'evaporazione (più o meno costante in quanto legata alla temperatura ambiente). In realtà, le pompe di calore sono utilizzate, essenzialmente, negli impianti di riscaldamento, in alternativa alle normali caldaie ad acqua. Di conseguenza, almeno dal punto di vista del risparmio energetico, sono già convenienti le pompe di calore funzionanti con coefficienti d'effetto utile medi annuali dell'ordine di 2,5 - 3. Ai nostri climi, con temperature di progetto per l'evaporazione comprese tra 0 e 10 °C, tali valori si ottengono abbastanza facilmente con temperature di condensazione dell'ordine di 40 - 50 °C, che sono perfettamente compatibili con impianti a semplice compressione.

### **13.5.1 Cicli a Doppia Compressione e Doppia Laminazione**

Lo schema funzionale di un impianto frigorifero con doppia laminazione e doppia compressione è rappresentato nella Fig. 13.6, mentre il ciclo corri-

spondente è illustrato nella Fig. 13.7.



**Figura 13.6** Schema funzionale di impianto frigorifero con doppia laminazione e doppia compressione.

Come si può vedere, il separatore intermedio gioca un ruolo fondamentale in quanto, oltre a separare il vapore dal fluido bifase proveniente dalla prima laminazione, desurriscalda il vapore proveniente dal compressore di bassa pressione. In questo modo si evita di espandere tutto il fluido fino alla pressione d'evaporazione e, di conseguenza, si riduce il lavoro speso nel primo stadio di compressione. Inoltre, come si è già notato nel Paragrafo 5.6, la compressione in due stadi riduce il lavoro di compressione ed aumenta il rendimento volumetrico.



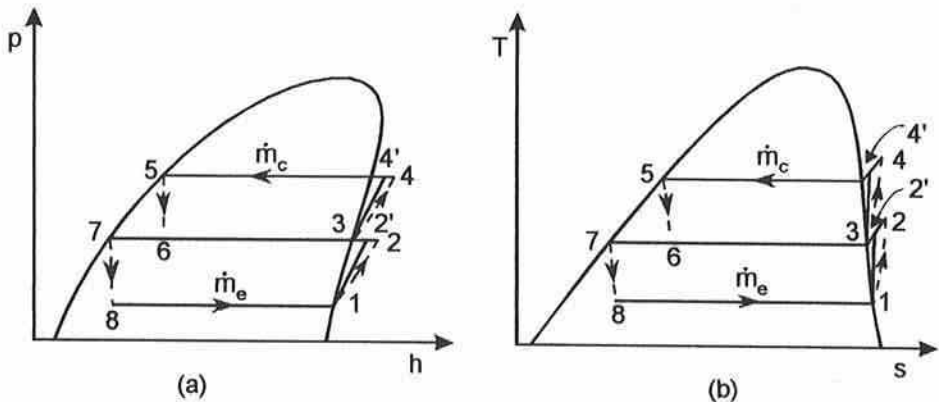
Per determinare il rapporto tra le portate di massa circolanti nell'evaporatore e nel condensatore, si può applicare il primo principio della termodinamica al separatore, supposto adiabatico verso l'esterno. Dal bilancio entalpico

$$\dot{m}_c h_6 + \dot{m}_e h_2 = \dot{m}_c h_3 + \dot{m}_e h_7 \quad (13.13)$$

si ottiene così il valore del rapporto

$$\frac{\dot{m}_c}{\dot{m}_e} = \frac{h_2 - h_7}{h_3 - h_6} \quad (13.14)$$

che, necessariamente, risulta sempre maggiore di uno.



**Figura 13.7** Ciclo frigorifero con doppia laminazione e doppia compressione del vapore (R134a), rappresentato: (a) sul diagramma ( $p, h$ ) e (b) sul diagramma ( $T, s$ ).

Il coefficiente d'effetto utile del ciclo frigorifero, può essere calcolato in base alle portate circolanti ed alle entalpie degli stati caratteristici. Si ha, infatti

$$\varepsilon = \frac{q_{81}^+}{|P_{12}^- + P_{34}^-|} = \frac{\dot{m}_e (h_1 - h_8)}{\dot{m}_e (h_2 - h_1) + \dot{m}_c (h_4 - h_3)} = \frac{h_1 - h_8}{(h_2 - h_1) + (\dot{m}_c / \dot{m}_e) (h_4 - h_3)} \quad (13.15)$$

dove il rapporto delle portate è dato dalla (13.14). Naturalmente, la potenza totale di compressione, che compare al denominatore della (13.15), poteva essere espressa anche sfruttando il bilancio di primo principio e la relazione (13.13). Si ha, infatti

$$\begin{aligned} |P_{12}^- + P_{34}^-| &= |q_{45}^-| - |q_{81}^+| = \dot{m}_c(h_4 - h_5) - \dot{m}_e(h_1 - h_8) \\ &= (\dot{m}_c h_4 - \dot{m}_e h_1) - (\dot{m}_c h_6 - \dot{m}_e h_7) = (\dot{m}_c h_4 - \dot{m}_e h_1) - (\dot{m}_c h_3 - \dot{m}_e h_2) \\ &= \dot{m}_e(h_2 - h_1) + \dot{m}_c(h_4 - h_3) \end{aligned} \quad (13.16)$$

dal momento che le entalpie non variano tra l'entrata ed l'uscita delle due valvole di laminazione.

Con cicli a doppia compressione e doppia laminazione si ottengono miglioramenti dell'efficienza tali da consentire il raggiungimento di temperature di evaporazione dell'ordine dei  $-60\text{ }^\circ\text{C}$ , nell'ambito dei normali valori della temperatura di condensazione. Per scendere ancora con la temperatura d'evaporazione occorre, invece, far ricorso ad altre configurazioni impiantistiche come, ad esempio, due circuiti frigoriferi disposti in cascata, in modo che l'evaporatore dell'impianto operante a temperature più alte possa raffreddare il condensatore dell'impianto operante a temperature più basse.

### Esempio 13.8

Con riferimento alle Fig. 13.6 e 13.7, si consideri un ciclo frigorifero a doppia compressione e doppia laminazione, operante con R134a tra la temperatura d'evaporazione di  $-15\text{ }^\circ\text{C}$  e la temperatura di condensazione di  $40\text{ }^\circ\text{C}$ . Nelle ipotesi che:

- all'uscita del condensatore si abbia liquido saturo,
- all'aspirazione dei compressori si abbia vapore saturo secco,
- la pressione intermedia sia la media geometrica delle pressioni d'evaporazione e condensazione;
- i rendimenti isoentropici dei compressori siano pari al 70% e

- il flusso termico asportato dall'evaporatore sia pari a 8 kW  
si calcolino
- il coefficiente d'effetto utile del ciclo,
- il flusso termico scambiato al condensatore,
- le potenze meccaniche spese e
- le portate volumetriche all'aspirazione dei compressori.

### Soluzione

Le informazioni fornite nel testo sono sufficienti a determinare le proprietà termodinamiche nei punti 1 e 5. Poi si può calcolare la pressione intermedia

$$p_i = \sqrt{p_e p_c} = \sqrt{p_1 p_5} = \sqrt{0,1650 \cdot 1,0171} = 0,41 \text{ MPa}$$

e trovare quindi le proprietà termodinamiche nei punti 2', 3, 4', 6, 7 ed 8. Successivamente, si può tenere conto del fatto che il punto 2 si trova alla pressione intermedia ed è caratterizzato da un valore dell'entalpia ricavabile in base alla definizione di rendimento isoentropico. Si ha, infatti

$$h_2 = h_1 + \frac{h_{2'} - h_1}{\eta_{ic}} = 389,2 + \frac{407,8 - 389,2}{0,7} = 415,8 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Analogamente, il punto 4 si trova alla pressione di condensazione ed è caratterizzato da un valore dell'entalpia ricavabile in base alla definizione di rendimento isoentropico. Si ha, quindi

$$h_4 = h_3 + \frac{h_{4'} - h_3}{\eta_{ic}} = 404,0 + \frac{422,9 - 404,0}{0,7} = 431,0 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

I valori delle proprietà termodinamiche dei capisaldi sono elencati in Tabella 13.6, mentre i punti corrispondenti sono riportati in scala sui diagrammi di Fig. 13.7.

In base ai dati di tabella, si possono calcolare il rapporto delle portate

$$\frac{\dot{m}_c}{\dot{m}_e} = \frac{h_2 - h_7}{h_3 - h_6} = \frac{415,8 - 213,0}{404,0 - 256,5} = 1,375$$

ed il coefficiente d'effetto utile

$$\varepsilon = \frac{h_1 - h_8}{(h_2 - h_1) + (\dot{m}_c / \dot{m}_e)(h_4 - h_3)}$$

$$= \frac{389,2 - 213,0}{(415,8 - 389,2) + 1,375(431,0 - 404,0)} = \frac{176}{26,6 + 1,375 \cdot 27,0} = 2,76$$

Come si vede, il coefficiente d'effetto utile è aumentato del 12,6% rispetto al ciclo frigorifero standard, considerato nell'Esempio 13.1, che operava tra le stesse temperature d'evaporazione e condensazione.

**Tabella 13.6** Proprietà termodinamiche dei capisaldi del ciclo frigorifero ad R134a, a doppia compressione e doppia laminazione, di cui all'Esempio 13.6.

PUNTO	$T$ [K]	$p$ [MPa]	$v$ [m <sup>3</sup> /kg]	$h$ [kJ/kg]	$s$ [kJ/(kg K)]
1	258,15	0,165	0,1201	389,2	1,7354
2'	286,8	0,410	0,0512	407,8	1,7354
2	295,4	0,410	0,0535	415,8	1,7628
3	282,7	0,410	0,0501	404,0	1,7220
4'	315,8	1,017	0,0204	422,9	1,7220
4	323,2	1,017	0,0214	430,9	1,7473
5	313,15	1,017	0,0009	256,5	1,1909
6	282,7	0,410	0,0120	256,5	1,2004
7	282,7	0,165	0,0008	213,0	1,0464
8	258,15	0,165	0,0195	213,0	1,0529

Dall'espressione del flusso termico asportato nell'evaporatore

$$q_{81}^+ = \dot{m}_e (h_1 - h_8)$$

si ricava la portata di vapore

$$\dot{m}_e = \frac{q_{81}^+}{h_1 - h_8} = \frac{8}{176} = 0,04545 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Pertanto, si ottiene in sequenza

$$|q_{45}^-| = \dot{m}_c (h_4 - h_5) = \frac{\dot{m}_c}{\dot{m}_e} \dot{m}_e (h_4 - h_5)$$

$$= 1,375 \cdot 0,04545 (430,9 - 256,5) = 10,90 \text{ kW}$$

$$|P_{12}^-| = \dot{m}_e (h_2 - h_1) = 0,04545 \cdot 26,6 = 1,21 \text{ kW}$$

$$\dot{V}_1 = \dot{m}_e v_1 = 0,04545 \cdot 0,1201 = 5,459 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$|P_{34}^-| = \dot{m}_c (h_4 - h_3) = 1,375 \cdot 0,04545 \cdot 27,0 = 1,69 \text{ kW}$$

e

$$\dot{V}_3 = \dot{m}_c v_3 = 1,375 \cdot 0,04545 \cdot 0,0501 = 3,131 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 / \text{s}$$

Anche in questo caso, ovviamente, si ha

$$|q_{45}^-| = q_{81}^+ + |P_{12}^-| + |P_{34}^-| = 8 + 1,21 + 1,69 = 10,90 \text{ kW}$$

e quindi la somma delle potenze spese e del flusso termico utile asportato dall'evaporatore è pari al flusso termico disperso dal condensatore.

### 13.6 FLUIDI FRIGORIGENI

Come si è detto, sono definiti "frigorigeni" i fluidi utilizzati negli impianti frigoriferi ed a pompa di calore. Un buon fluido frigorigeno non deve, evi-

dentemente, essere pericoloso per le persone o dannoso per l'ambiente, e non deve aggredire chimicamente i componenti dei circuiti. In aggiunta, il fluido deve avere pressione superiore alla pressione atmosferica nell'intero campo di lavoro, al fine di impedire entrate d'aria umida nell'impianto. Il vapor d'acqua, infatti, tende ad ostruire il circuito gelando nei punti freddi mentre l'aria secca, restando allo stato gassoso, ostacola il buon funzionamento del condensatore e dell'evaporatore. È importante inoltre che, nelle normali condizioni operative, il fluido frigorifero presenti un rapporto non troppo elevato tra le pressioni di condensazione e d'evaporazione, per evitare il ricorso sistematico alla doppia compressione. Infine, alla temperatura d'evaporazione, il calore latente di cambiamento di fase deve essere elevato, mentre il volume specifico deve essere basso in modo da ridurre la portata volumetrica (a parità di flusso termico asportato).

Tra i possibili fluidi frigoriferi l'acqua presenta, ovviamente, buone caratteristiche ecologiche e, naturalmente, un basso costo ma non consente di scendere a temperature inferiori a 0 °C. Inoltre, alle basse temperature, l'acqua ha volumi specifici molto elevati e pressioni di saturazione molto ridotte. Nonostante queste difficoltà, nel seguito si vedrà come l'acqua trovi ugualmente impiego in macchine particolari come, ad esempio, alcune macchine frigorifere ad assorbimento utilizzate nel condizionamento ambientale.

Oltre all'acqua, in passato sono stati usati diversi altri fluidi "naturali", come l'anidride carbonica, il propano e l'ammoniaca. Successivamente questi fluidi sono stati abbandonati, più o meno completamente, con la sola eccezione dell'ammoniaca che ha sempre mantenuto una nicchia applicativa nei magazzini frigoriferi gestiti in regime di sorveglianza continua. I motivi dell'abbandono dei fluidi naturali vanno ricercati nelle proprietà termodinamiche sfavorevoli (anidride carbonica), nella caratteristica di formare con l'aria miscele esplosive (propano ed ammoniaca) ma, soprattutto, nell'intervenuta disponibilità dei fluidi frigoriferi alogenati. I fluidi frigoriferi alogenati sono ottenuti dal metano e dall'etano per sostitu-

zione, totale o parziale, degli atomi d'idrogeno con atomi di cloro e fluoro. I fluidi alogenati non sono tossici, infiammabili o corrosivi e, per di più, sono caratterizzati da proprietà termodinamiche favorevoli. Infine, in ogni campo di temperature interessanti la refrigerazione, è possibile trovare uno o più fluidi alogenati che possiedano tutti i requisiti ipotizzabili per un fluido ideale.

I fluidi frigoriferi alogenati sono stati introdotti sul mercato dalla DuPont col nome commerciale di "Freons" ma, alla scadenza del brevetto originario, sono stati messi in produzione da numerose altre industrie. Ora, nella normativa, i fluidi alogenati sono contraddistinti mediante l'iniziale *R* della parola inglese "Refrigerant", cioè fluido frigorifero, seguita da un numero con più cifre scelte in modo tale che, dalla sigla, si possa risalire alla composizione chimica.

Poiché gli atomi di idrogeno del metano e dell'etano possono essere sostituiti solo con cloro o fluoro, la formula chimica dei fluidi frigoriferi alogenati può essere espressa mediante la equazione

$$R m n p \equiv C_{m+1} H_{n-1} Cl_x F_p \quad (13.17)$$

dove l'unica incognita  $x$  è definita dalla relazione

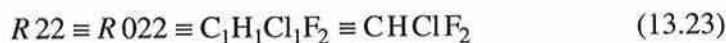
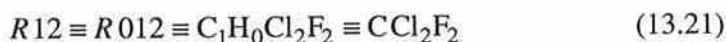
$$x = 4 - (n - 1) - p = 5 - n - p \quad (13.18)$$

se  $m = 0$ , ovvero dalla relazione

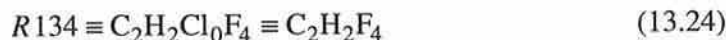
$$x = 6 - (n - 1) - p = 7 - n - p \quad (13.19)$$

se  $m = 1$ . Quando al primo membro della (13.17) si ha  $m = 0$ , si conviene d'omettere la prima cifra di modo che, ad esempio, *R012* si possa scrivere nella forma abbreviata *R12*. Per i derivati alogenati del metano [ $CH_4$ ] si ha, quindi, sempre  $m = 0$  ed una sigla con sole due cifre nella quale si fa riferimento alla (13.18) per determinare il numero d'atomi di cloro. Per i de-

rivati alogenati dell'etano [ $C_2H_6$ ] si ha, invece, sempre  $m = 1$  ed una sigla con tre cifre nella quale si fa riferimento alla (13.19) per determinare il numero d'atomi di cloro. Le equazioni (13.17) - (13.19) conducono, ad esempio, alle seguenti formule chimiche



ed



Talvolta, nella sigla, le cifre sono seguite da una lettera per distinguere tra loro gli isomeri, cioè i fluidi che hanno la stessa composizione chimica ma diversa struttura molecolare. Così, ad esempio, la sigla R134 indica il fluido frigorifero avente composizione chimica data dalla (13.24) e disposizione simmetrica degli atomi d'idrogeno nella molecola. Invece la sigla R134a, indica il fluido con la stessa composizione chimica, ma con disposizione non simmetrica degli atomi d'idrogeno.

Come si può vedere dagli esempi riportati, i fluidi frigoriferi alogenati possono essere raggruppati in quattro categorie principali, secondo la presenza o meno di cloro ed idrogeno nella loro molecola. Si hanno così:

- CFC (Cloro-Fluoro-Carburi), contenenti cloro ma non idrogeno;
- HCFC (Idro-Cloro-Fluoro-Carburi), contenenti sia cloro sia idrogeno;
- HFC (Idro-Fluoro-Carburi), contenenti idrogeno ma non cloro e
- FC (Fluoro-Carburi), non contenenti idrogeno e cloro.

Questa classificazione è diventata molto importante ai fini ecologici da quando, negli ultimi anni, si è scoperto che i CFC e gli HCFC, immessi



accidentalmente nell'atmosfera, possono essere trascinati dalle correnti a grandi altezze dove il cloro può fare da catalizzatore nella trasformazione dell'ozono [ $O_3$ ], instabile, in ossigeno molecolare [ $O_2$ ], stabile. In questo modo, viene a ridursi l'importante azione protettiva che l'ozono stratosferico esercita nei confronti delle pericolose radiazioni solari ultraviolette. Da questo punto di vista, tuttavia, i CFC sono più dannosi degli HCFC, in quanto l'idrogeno atomico  $H^+$ , contenuto negli HCFC, si combina con il radicale  $OH^-$ , presente nell'atmosfera, riducendo la vita media delle molecole. L'immissione sul mercato dei CFC è stata, infatti, proibita a partire dal 1995 e quella degli HCFC a partire dal 2004. Al momento l'impiego degli HFC, puri ed in miscele, non è soggetto a limitazioni poiché questi fluidi non contengono cloro e non costituiscono quindi un pericolo per l'ozono stratosferico. È bene tener presente, tuttavia, che i fluidi alogenati, nessuno escluso, contribuiscono in maniera rilevante anche all'effetto serra, in quanto presentano bande d'assorbimento in corrispondenza alle lunghezze d'onda delle radiazioni infrarosse emesse dalla Terra verso lo spazio. Di conseguenza, da più parti si propone di abbandonare, sin d'ora, l'impiego di tutti i fluidi alogenati a favore di un possibile ritorno ai fluidi naturali (in primo luogo i già menzionati propano, anidride carbonica ed ammoniaca) nonostante le difficoltà tecniche ed economiche che una scelta del genere, indubbiamente, comporta.

### 13.7 MACCHINE AD ASSORBIMENTO

Le macchine ad assorbimento differiscono dalle macchine a compressione di vapore per le modalità con cui operano il trasferimento del fluido frigorifero dalla zona a bassa pressione a quella ad alta pressione. Nelle macchine ad assorbimento, infatti, non si utilizza un compressore meccanico, ma si "assorbe" il fluido frigorifero, proveniente dall'evaporatore, in una soluzione liquida che si trova alla pressione d'evaporazione ed è successivamente pompata alla pressione di condensazione. Grazie al pompaggio in fa-

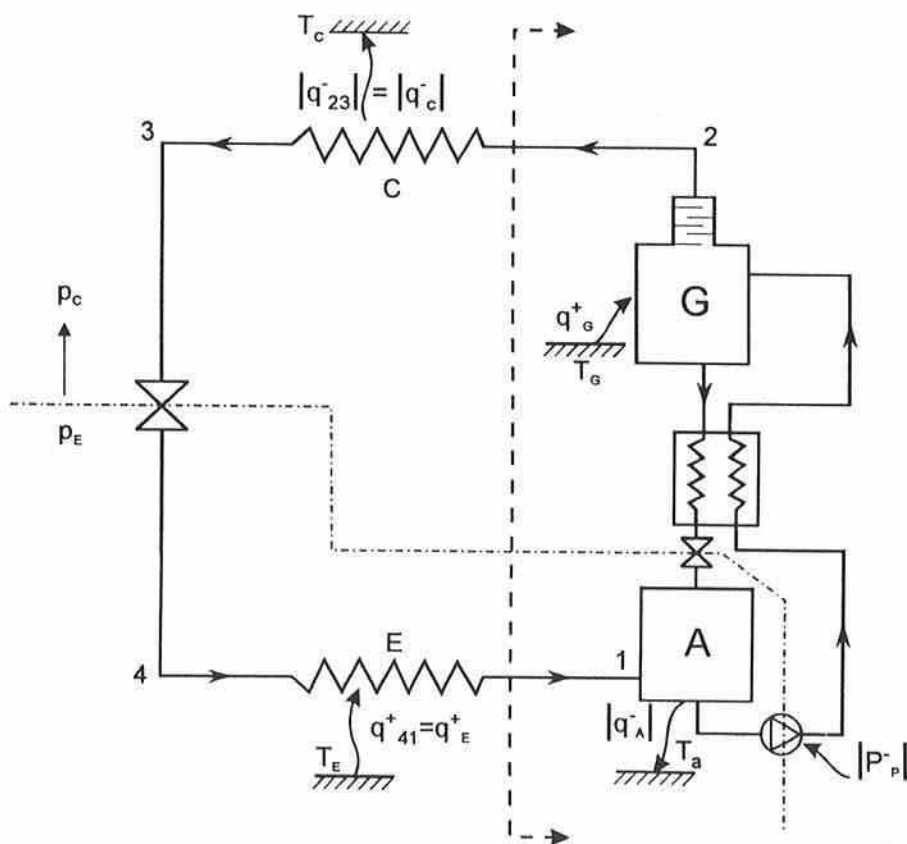
se liquida, si riduce considerevolmente il lavoro di compressione per unità di massa di fluido frigorifero trasferito. Naturalmente, per liberare il vapore dalla soluzione che si trova alla pressione del condensatore è necessario fornire calore in un organo detto "generatore". Tale fornitura, tuttavia, può essere effettuata anche utilizzando una sorgente a temperatura relativamente bassa compresa, di solito, tra i 100 ed i 130 °C.

Le macchine ad assorbimento d'uso corrente utilizzano soluzioni d'acqua ed ammoniacale, o soluzioni d'acqua e bromuro di litio [Li Br]. Nelle soluzioni d'acqua ed ammoniacale, l'ammoniaca presenta la tensione di vapore maggiore, e quindi è impiegata come fluido frigorifero. L'acqua, invece, funge da assorbente, formando con l'ammoniaca soluzioni "ricche", cioè con una maggior concentrazione d'ammoniaca, nell'assorbitore e "povere", cioè con una minor concentrazione d'ammoniaca, nel generatore. Nelle soluzioni d'acqua e bromuro di litio, al contrario, l'acqua è utilizzata come fluido frigorifero, mentre il bromuro di litio, che è un solido, funge da assorbente, formando con l'acqua soluzioni con una minor concentrazione di bromuro di litio nell'assorbitore e con una maggior concentrazione di bromuro di litio nel generatore.

Le macchine ad assorbimento ad acqua e bromuro di litio non possono produrre freddo a temperature inferiori a 0 °C e quindi trovano impiego, essenzialmente, nel condizionamento dell'aria. Le macchine ad acqua ed ammoniacale, invece, non presentano limitazioni operative particolari e, di conseguenza, sono più diffuse, soprattutto nel settore delle grosse potenze frigorifere.

Lo schema funzionale di una macchina ad assorbimento, ad acqua e ammoniacale, è riportato in Fig. 13.8. Come si può osservare, la zona comprendente generatore, assorbitore, pompa e scambiatore, sostituisce funzionalmente il compressore, mentre la zona comprendente condensatore, valvola di laminazione ed evaporatore, opera esattamente come la corrispondente zona di un impianto a compressione di vapore. Oltre a queste due zone funzionali, nella macchina si possono distinguere anche due zone a pres-

sioni diverse: una zona d'alta pressione ( $p = p_C$ ), comprendente condensatore e generatore, ed una zona di bassa pressione ( $p = p_E$ ), comprendente evaporatore ed assorbitore. Il passaggio dalla bassa all'alta pressione ha luogo in fase liquida attraverso la pompa, mentre il passaggio dall'alta alla bassa pressione ha luogo, sia in fase liquida sia in fase vapore, attraverso valvole di laminazione.



**Figura 13.8** Schema funzionale di una macchina ad assorbimento ad acqua ed ammoniaca: A = assorbitore, G = generatore, C = condensatore ed E = evaporatore.

Il funzionamento della macchina ad assorbimento ideale, schematizzata nella Fig. 13.8, può essere descritto nel modo seguente.

- Nel generatore, mediante una sorgente esterna a temperatura uniforme  $T_G$ , si fornisce il flusso termico necessario per far evaporare l'ammoniaca dalla soluzione che, così, s'impoverisce. Grazie all'impiego di una colonna di distillazione, all'uscita dal generatore nello stato 2 si ha vapore d'ammoniaca quasi puro.
- Il vapore nello stato 2 entra nel condensatore, dove cede calore ad un pozzo esterno a temperatura uniforme  $T_C$ , ed esce nello stato 3 di liquido saturo.
- Successivamente, il vapore attraversa la valvola di laminazione passando dallo stato 3 allo stato 4, caratterizzati dalla stessa entalpia.
- Il vapore nello stato 4 entra nell'evaporatore, dove assorbe calore da una sorgente esterna a temperatura uniforme  $T_E$ , ed esce nello stato 1 di vapore saturo secco.
- Il vapore di ammoniaca nello stato 1 entra nell'assorbitore, dove si ha cessione di calore ad un pozzo esterno a temperatura uniforme  $T_A$ , mentre la soluzione s'arricchisce in ammoniaca.
- Per mantenere il regime delle concentrazioni, la soluzione ricca è pompata nel generatore, mentre la soluzione povera è fatta defluire nell'assorbitore. Dal momento che generatore ed assorbitore hanno temperature diverse, è opportuno inserire uno scambiatore rigenerativo che raffreddi la soluzione proveniente dal generatore e, contemporaneamente, riscaldi la soluzione proveniente dall'assorbitore.
- Infine, generalmente, si ha

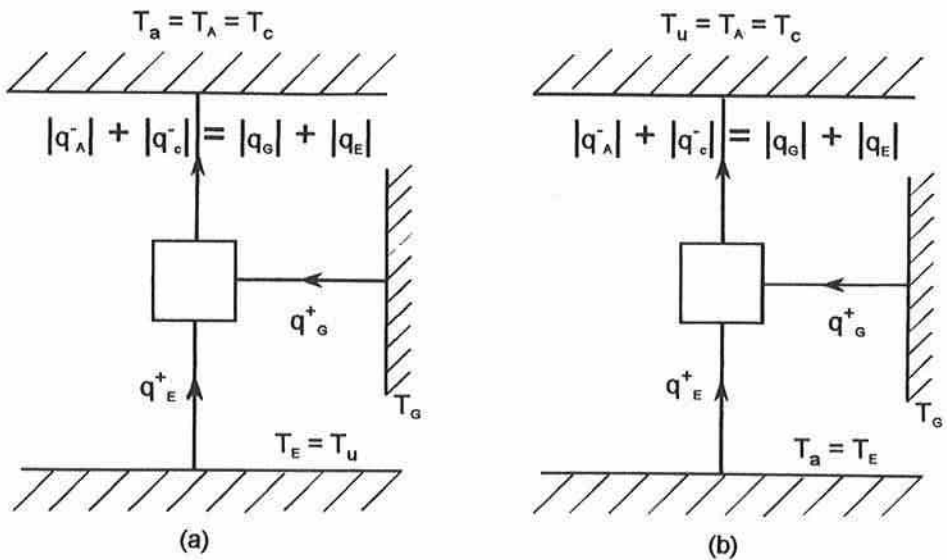
$$T_C = T_A \quad (13.25)$$

in quanto condensatore ed assorbitore utilizzano lo stesso sistema d'asportazione del calore. Di conseguenza, come illustrato in Fig. 13.9, le macchine ad assorbimento operano fra tre temperature:  $T_G$ ,  $T_C = T_A$  e  $T_E$ . L'analogia con le rappresentazioni schematiche dei cicli inversi bitermici è evidente: l'unica differenza è costituita, infatti, dalla sostituzione della fornitura di potenza meccanica con un'omologa fornitura di

flusso termico.

Nelle macchine ad assorbimento, la fornitura principale d'energia dall'esterno è rappresentata dal flusso termico  $q_G^+$ , necessario a liberare il vapore dalla soluzione, mentre la potenza spesa nel pompaggio  $P_p^-$  è, praticamente, trascurabile rispetto a  $q_G^+$ . In queste ipotesi, il bilancio energetico della macchina può essere scritto nella forma

$$q_{41}^+ + q_G^+ + |P_p^-| \cong q_E^+ + q_G^+ = |q_{23}^-| + |q_A^-| = |q_C^-| + |q_A^-| \quad (13.26)$$



**Figura 13.9** Rappresentazione schematica dei cicli inversi tritermici ad assorbimento: (a) ciclo frigorifero e (b) ciclo a pompa di calore.

In armonia con le definizioni generali, ed in base alle considerazioni sin qui svolte, il coefficiente d'effetto utile di una macchina frigorifera ad assorbimento, può essere definito come

$$\varepsilon_T = \frac{q_E^+}{q_G^+ + |P_p^-|} \cong \frac{q_E^+}{q_G^+} \quad (13.27)$$

in quanto la spesa d'energia nel generatore serve a prelevare, ad una temperatura generalmente inferiore a quella dell'ambiente, il flusso termico entrante nell'evaporatore.

In una macchina ad assorbimento a pompa di calore, la spesa d'energia nel generatore serve a rendere disponibili, ad una temperatura generalmente superiore a quella dell'ambiente, i flussi termici uscenti dal condensatore e dall'assorbitore. Pertanto, il coefficiente d'effetto utile di una macchina ad assorbimento a pompa di calore, può essere definito come

$$\varepsilon'_T = \frac{|q_C^-| + |q_A^-|}{q_G^+ + |P_p^-|} \equiv \frac{|q_C^-| + |q_A^-|}{q_G^+} = \frac{q_E^+ + q_G^+}{q_G^+} = 1 + \varepsilon_T \quad (13.28)$$

dove  $\varepsilon_T$  è il coefficiente d'effetto utile della corrispondente macchina frigorifera. Si noti che, nelle (13.26) e (13.28), il pedice  $T$  segnala la fornitura di flusso termico al posto di potenza meccanica.

### 13.7.1 Valori Massimi dei Coefficienti di Effetto Utile

Nell'analisi dei cicli operativi tritermici delle macchine ad assorbimento è importante determinare i valori massimi teorici dei coefficienti d'effetto utile. A tal fine, ci si può riferire a condizioni di reversibilità come quelle illustrate nella Fig. 13.9.

Nella Fig. 13.9 (a), relativa ai cicli frigoriferi, si è assunto

$$T_G > T_a = T_C = T_A > T_E = T_u \quad (13.29)$$

in quanto, usualmente, i flussi termici ceduti al condensatore ed all'assorbitore sono rigettati nell'ambiente esterno ed, in assenza d'irreversibilità, risulta  $T_a = T_C = T_A$ . L'effetto utile si produce alla temperatura  $T_E$  che, in assenza d'irreversibilità, s'identifica con la temperatura utile ( $T_E = T_u$ ).

Nella Fig. 13.9 (b), relativa ai cicli a pompa di calore, s'è assunto

$$T_G > T_C = T_A = T_u > T_a = T_E \quad (13.30)$$

in quanto, usualmente, il flusso termico gratuito fornito all'evaporatore proviene dall'ambiente esterno dove, in assenza di irreversibilità, risulta  $T_a = T_E$ . L'effetto utile si produce alla temperatura  $T_C = T_A$  che, in assenza d'irreversibilità, s'identifica con la temperatura utile ( $T_C = T_A = T_u$ ).

Nell'ipotesi di validità delle (13.29) e (13.30), si può procedere come in Fig. 13.10, dove i cicli originari tritermici, operanti in condizioni di reversibilità, sono sostituiti dalla combinazione di due cicli reversibili bitermici: un ciclo di Carnot diretto ed un ciclo di Carnot inverso, scelti in modo tale da produrre gli stessi effetti esterni.

### Frigorifero

Con riferimento alla Fig. 13.10 (a), si evince che il ciclo diretto di Carnot è caratterizzato dal rendimento

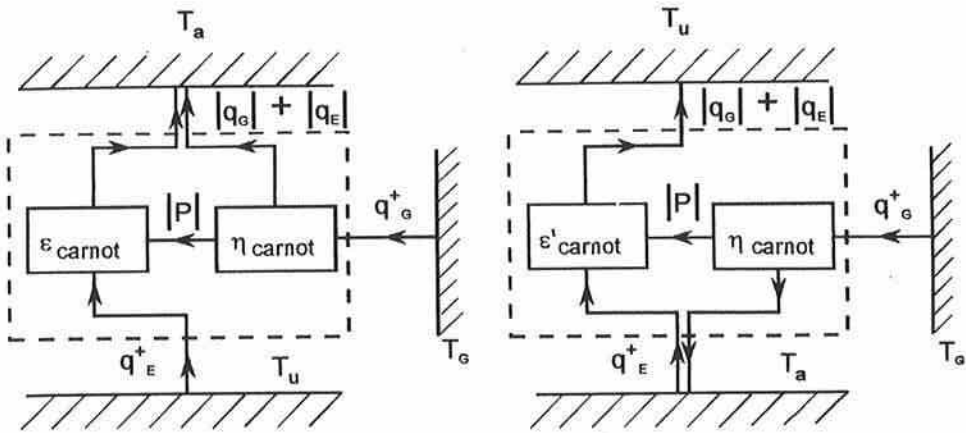
$$\eta_{Carnot} = \frac{P^+}{q_G^+} = \frac{T_G - T_a}{T_G} = 1 - \frac{T_a}{T_G} \quad (13.31)$$

in quanto opera tra la temperatura del generatore e la temperatura di condensazione - assorbimento, supposta uguale alla temperatura ambiente. Il ciclo diretto rende disponibile la potenza meccanica

$$P^+ = q_G^+ \left( 1 - \frac{T_a}{T_G} \right) \quad (13.32)$$

mentre scarica nell'ambiente il flusso termico

$$q_G^+ - P^+ = q_G^+ - q_G^+ \left( 1 - \frac{T_a}{T_G} \right) = q_G^+ \frac{T_a}{T_G} \quad (13.33)$$



**Figura 13.10** Combinazioni di cicli reversibili bitermici equivalenti a cicli reversibili tri-termici ad assorbimento: (a) frigoriferi e (b) a pompa di calore.

La potenza meccanica prodotta è utilizzata nel ciclo frigorifero di Carnot che opera tra la temperatura di condensazione, supposta uguale alla temperatura dell'ambiente, e la temperatura utile  $T_u = T_E$ . Il coefficiente d'effetto utile di tale ciclo è pari a

$$\varepsilon_{Carnot} = \frac{q_E^+}{|P^-|} = \frac{q_E^+}{P^+} = \frac{T_u}{T_a - T_u} \quad (13.34)$$

e, di conseguenza, il ciclo preleva alla temperatura  $T_u = T_E$  il flusso termico utile

$$q_E^+ = P^+ \frac{T_u}{T_a - T_u} = q_G^+ \frac{T_G - T_a}{T_G} \frac{T_u}{T_a - T_u} \quad (13.35)$$

mentre scarica nell'ambiente il flusso termico

$$q_E^+ + P^+ = q_E^+ + q_G^+ \left(1 - \frac{T_a}{T_G}\right) \quad (13.36)$$



Sommando membro a membro la (13.33) e la (13.36), cioè le espressioni dei flussi termici scaricati in ambiente dal ciclo diretto e dal ciclo inverso, si verifica immediatamente che il flusso termico totale scaricato in ambiente è pari a

$$q_E^+ + q_G^+ \left(1 - \frac{T_a}{T_G}\right) + q_G^+ \frac{T_a}{T_G} = q_E^+ + q_G^+ \quad (13.37)$$

come dev'essere in base al bilancio di primo principio. Invece, dalla (13.35) si ricava il limite cercato per il coefficiente d'effetto utile del ciclo frigorifero tritermico ad assorbimento

$$\begin{aligned} (\varepsilon_T)_{\max} &= \left( \frac{q_E^+}{q_G^+} \right)_{\text{rev}} = \frac{T_G - T_a}{T_G} \frac{T_u}{T_a - T_u} \\ &= \eta_{\text{Carnot}}(T_G, T_a) \varepsilon_{\text{Carnot}}(T_u, T_a) \end{aligned} \quad (13.38)$$

### Pompa di calore

Con riferimento alla Fig. 13.10 (b), ed in base a considerazioni del tutto analoghe alle precedenti, si giunge all'espressione del coefficiente di effetto utile massimo del ciclo tritermico ad assorbimento a pompa di calore

$$\begin{aligned} (\varepsilon'_T)_{\max} &= \left( \frac{|q_C^-| + |q_A^-|}{q_G^+} \right)_{\text{rev}} = \frac{T_G - T_a}{T_G} \frac{T_u}{T_u - T_a} \\ &= \eta_{\text{Carnot}}(T_G, T_a) \varepsilon'_{\text{Carnot}}(T_u, T_a) \end{aligned} \quad (13.39)$$

ottenendo una relazione che, evidentemente, richiama la (13.38).

### Esempio 13.9

Si ricavi la relazione (13.39).

#### Soluzione

Come indicato in Fig. 13.10 (b), il ciclo diretto di Carnot opera tra la tempe-

ratura del generatore e la temperatura d'evaporazione, assunta coincidente con la temperatura dell'ambiente. Tale ciclo è quindi caratterizzato dal rendimento

$$\eta_{Carnot} = \frac{P^+}{q_G^+} = \frac{T_G - T_a}{T_G}$$

e rende disponibile la potenza meccanica

$$P^+ = q_G^+ \frac{T_G - T_a}{T_G} = q_G^+ \left( 1 - \frac{T_a}{T_G} \right)$$

mentre scarica in ambiente il flusso termico

$$q_G^+ - P^+ = q_G^+ - q_G^+ \left( 1 - \frac{T_a}{T_G} \right) = q_G^+ \frac{T_a}{T_G}$$

La potenza meccanica prodotta è utilizzata nel ciclo di Carnot a pompa di calore che opera tra la temperatura di condensazione - assorbimento, assunta uguale alla temperatura utile del sistema riscaldato, e la temperatura d'evaporazione, coincidente con la temperatura dell'ambiente. Tale ciclo preleva dall'ambiente il flusso termico

$$q_E^+ + (q_G^+ - P^+) = q_E^+ + q_G^+ \frac{T_a}{T_G}$$

In questo modo il flusso termico netto prelevato, somma algebrica del flusso prelevato dalla pompa di calore e del flusso scaricato dal ciclo termico

$$\left( q_E^+ + q_G^+ \frac{T_a}{T_G} \right) - q_G^+ \frac{T_a}{T_G} = q_E^+$$

coincide con il flusso all'evaporatore del ciclo tritermico di partenza.

Il flusso termico fornito, alla temperatura utile, dal ciclo a pompa di calore ausiliario è pari a

$$\left[ q_E^+ + (q_G^+ - P^+) \right] + |P^-| = q_E^+ + q_G^+$$

in armonia con il primo principio della termodinamica applicato alla combinazione dei due cicli.

Il coefficiente d'effetto utile del ciclo a pompa di calore ausiliario è pari a

$$\varepsilon'_{Carnot} = \frac{q_E^+ + q_G^+}{|P^-|} = \frac{T_u}{T_u - T_a}$$

e, di conseguenza, il flusso termico utile può essere espresso mediante la relazione

$$q_E^+ + q_G^+ = P^+ \frac{T_u}{T_u - T_a} = q_G^+ \frac{T_G - T_a}{T_G} \frac{T_u}{T_u - T_a}$$

Dall'espressione del flusso termico utile, si ricava il limite cercato per il coefficiente d'effetto utile del ciclo tritermico ad assorbimento a pompa di calore

$$\begin{aligned} (\varepsilon'_T)_{\max} &= \left( \frac{q_E^+ + q_G^+}{q_G^+} \right)_{\text{rev}} = \left( \frac{|q_C^-| + |q_A^-|}{q_G^+} \right)_{\text{rev}} = \frac{T_G - T_a}{T_G} \frac{T_u}{T_u - T_a} \\ &= \eta_{Carnot}(T_G, T_a) \varepsilon'_{Carnot}(T_u, T_a) \end{aligned}$$

pensato come combinazione di due cicli reversibili bitermici che producono gli stessi effetti esterni.

### Esempio 13.10

Si determini il valore massimo possibile del coefficiente d'effetto utile di un

impianto frigorifero ad assorbimento che opera tra la temperatura di evaporazione di  $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$ , assunta coincidente con la temperatura utile del sistema refrigerato, la temperatura di condensazione - assorbimento di  $35\text{ }^{\circ}\text{C}$ , assunta coincidente con la temperatura dell'ambiente, e la temperatura del generatore di  $130\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

### Soluzione

Dalla relazione (13.38) si ha

$$\begin{aligned} (\varepsilon_T)_{\max} &= \frac{T_G - T_a}{T_G} \frac{T_u}{T_a - T_u} \\ &= \frac{403,15 - 308,15}{403,15} \frac{263,15}{308,15 - 263,15} = 0,236 \cdot 5,85 = 1,38 \end{aligned}$$

Tale valore è abbastanza più basso di quelli tipici degli impianti frigoriferi a compressione, che operano tra le stesse temperature d'evaporazione e di condensazione. Infatti, il coefficiente d'effetto utile dei cicli tritermici è penalizzato, rispetto al coefficiente di effetto utile dei cicli bitermici, dalla fornitura di flusso termico al posto di potenza meccanica.

## 13.7.2 Analisi Exergetica dei Cicli Inversi Tritermici

In questo paragrafo, le analisi exergetiche dei cicli inversi bitermici, riportate nel Paragrafo 9.6.4, sono estese ai cicli inversi tritermici, con riferimento alle schematizzazioni di Fig. 13.9 ed alle ipotesi (13.29) e (13.30).

### Ciclo frigorifero

Il rendimento di secondo principio di un ciclo frigorifero tritermico ad assorbimento, tiene conto dei valori exergetici dei flussi termici scambiati al generatore ed all'evaporatore. Trascurando la potenza meccanica spesa nella fase di pompaggio della soluzione, tale rendimento può essere espresso mediante la relazione

$$\begin{aligned}\eta_{II} &= \frac{q_E^+ |1 - T_a / T_u|}{q_G^+ (1 - T_a / T_G)} = \frac{\varepsilon_T}{[(T_G - T_a) / T_G] [T_u / (T_a - T_u)]} \\ &= \frac{\varepsilon_T}{\eta_{Carnot}(T_G, T_a) \varepsilon_{Carnot}(T_u, T_a)} = \frac{\varepsilon_T}{(\varepsilon_T)_{\max}}\end{aligned}\quad (13.40)$$

Poiché il rendimento exergetico non può superare l'unità, dall'Eq. (13.40) si può ricavare direttamente la relazione

$$\varepsilon_T \leq \frac{T_G - T_a}{T_G} \frac{T_u}{T_a - T_u} = \eta_{Carnot}(T_G, T_a) \varepsilon_{Carnot}(T_u, T_a) \quad (13.41)$$

del tutto equivalente alla (13.38).

### Pompa di calore

Il rendimento di secondo principio di un ciclo tritermico ad assorbimento a pompa di calore tiene conto dei valori exergetici dei flussi termici scambiati al generatore, all'assorbitore ed al condensatore. Trascurando la potenza meccanica spesa nella fase di pompaggio della soluzione, tale rendimento può essere espresso mediante la relazione

$$\begin{aligned}\eta_{II} &= \frac{(|q_C^-| + |q_A^-|)(1 - T_a / T_u)}{q_G^+ (1 - T_a / T_G)} = \frac{\varepsilon'_T}{[(T_G - T_a) / T_G] [T_u / (T_u - T_a)]} \\ &= \frac{\varepsilon'_T}{\eta_{Carnot}(T_G, T_a) \varepsilon'_{Carnot}(T_u, T_a)} = \frac{\varepsilon'_T}{(\varepsilon'_T)_{\max}}\end{aligned}\quad (13.42)$$

Poiché il rendimento exergetico non può superare l'unità, dall'Eq. (13.42) si può ricavare direttamente la relazione

$$\varepsilon'_T \leq \frac{T_G - T_a}{T_G} \frac{T_u}{T_u - T_a} = \eta_{Carnot}(T_G, T_a) \varepsilon'_{Carnot}(T_u, T_a) \quad (13.43)$$

del tutto equivalente alla (13.39).

### Esempio 13.11

Un impianto frigorifero ad assorbimento opera con una temperatura del generatore pari a 120 °C, una temperatura d'evaporazione, assunta coincidente con la temperatura utile del sistema refrigerato, pari a 5 °C ed una temperatura di condensazione - assorbimento, assunta coincidente con la temperatura dell'ambiente e pari a 35 °C. Il flusso termico fornito al generatore è pari a 500 kW, mentre il flusso termico utile asportato dall'evaporatore è pari a 300 kW. Si determini il rendimento exergetico.

#### Soluzione

Trascurando la potenza di pompaggio, si può calcolare il coefficiente d'effetto utile come

$$\varepsilon_T = \frac{q_E^+}{q_G^+} = \frac{300}{500} = 0,600$$

Dalla relazione (13.40) si ha quindi, per il rendimento exergetico

$$\begin{aligned} \eta_{II} &= \frac{\varepsilon_T}{\left[ (T_G - T_a) / T_G \right] \left[ T_u / (T_a - T_u) \right]} \\ &\cong \frac{0,600}{\left[ (393 - 308) / 393 \right] \left[ 278 / (308 - 278) \right]} = \frac{0,600}{0,216 \cdot 9,27} = 0,300 \end{aligned}$$

Poiché il coefficiente d'effetto utile massimo, in queste condizioni, è

$$(\varepsilon_T)_{\max} = \frac{T_G - T_a}{T_G} \frac{T_u}{T_a - T_u} = 0,216 \cdot 9,27 = 2,00$$

si sarebbe pervenuti allo stesso risultato anche scrivendo il rendimento e-

xergetico nella forma

$$\eta_{II} = \frac{\varepsilon_T}{(\varepsilon_T)_{\max}} = \frac{0,600}{2,00} = 0,300$$

simile a quella del rendimento exergetico dei cicli bitermici.

### 13.8 CONCLUSIONI

In questo capitolo sono stati illustrati i cicli inversi a compressione di vapore ed assorbimento. Questi cicli costituiscono il riferimento termodinamico per gli impianti che rendono disponibile un effetto utile esterno di tipo termico, vuoi sotto forma di calore asportato da un sistema a temperatura inferiore a quella dell'ambiente (frigoriferi), vuoi sotto forma di calore fornito a temperatura superiore a quella dell'ambiente (pompe di calore).

Si sono analizzati in dettaglio i cicli inversi a compressione più diffusi, mentre si è accennato soltanto ai cicli utilizzati nella produzione di freddo a basse temperature. Come problema a parte nella gestione degli impianti a compressione di vapore, si è citata la necessità di sostituire i fluidi frigoriferi attuali, in particolar modo i CFC, con altri non aggressivi nei confronti dell'ozono stratosferico.

L'esame delle macchine ad assorbimento ha poi dimostrato che i cicli inversi possono essere realizzati anche impiegando energia termica al posto d'energia meccanica. Infine, la schematizzazione dei cicli ad assorbimento come cicli tritermici, ha condotto ad espressioni particolarmente semplici per i valori limite dei coefficienti d'effetto utile.

---

# CAPITOLO 14

## CENNI SUL MOTO DEI FLUIDI COMPRESSIBILI

---

### 14.1 GENERALITÀ

In questo capitolo sulla termodinamica dei fluidi comprimibili sono fornite quelle informazioni che servono a dimensionare i condotti delle turbomacchine. La trattazione è limitata alle situazioni più semplici e le ipotesi in cui ci si pone includono:

- moto monodimensionale;
- regime stazionario;
- variazioni trascurabili d'energia potenziale;
- assenza di scambi di lavoro tecnico e di calore con l'esterno.

Inoltre, molto spesso si fa riferimento a deflussi isoentropici di fluidi comprimibili assimilabili a gas a comportamento ideale ed, in quest'ultimo caso, s'ipotizza anche che i calori specifici non dipendano dalla temperatura.

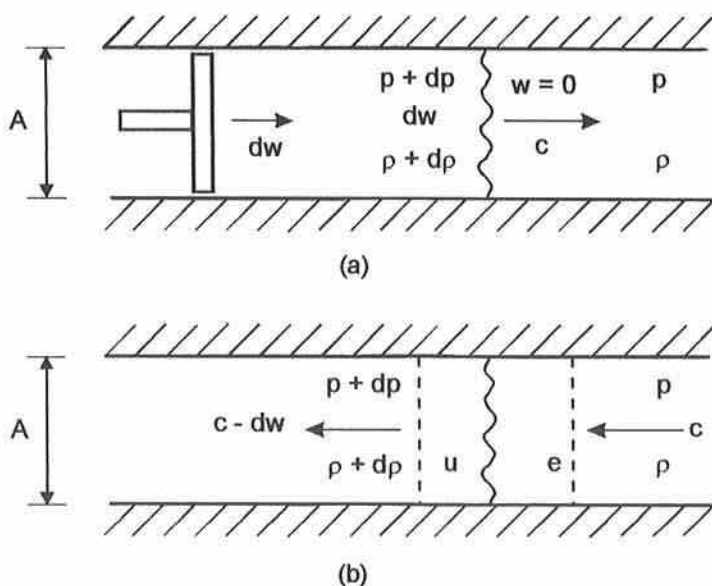
Le basi teoriche richieste per la comprensione degli sviluppi algebrici illustrati nel seguito sono già state fornite nei capitoli precedenti, con la sola eccezione del teorema della quantità di moto che, peraltro, è utilizzato in una versione monodimensionale abbastanza intuitiva. Analogamente, l'equazione di conservazione della massa, ricavata nel Capitolo 2, è scritta nella forma di "equazione di continuità" valida per deflussi monodimensionali.

### 14.2 VELOCITÀ DEL SUONO

Un'onda sonora è una piccola perturbazione che si propaga in un mezzo con



una velocità  $c$ , dipendente dalle condizioni del mezzo stesso. La velocità di propagazione delle onde sonore è definita velocità del suono. Le particelle del mezzo, investite da un'onda sonora, vanno incontro ad un piccolo spostamento accompagnato da modeste variazioni di pressione, densità e temperatura. Pertanto il processo risultante può essere considerato, con ottima approssimazione, reversibile ed adiabatico, cioè isoentropico. Nella propagazione del suono, il solo spostamento macroscopico è quello del fronte d'onda, la cui velocità può essere determinata in base allo schema di Fig. 14.1 (a). Nello schema, l'onda sonora è generata da un piccolo spostamento di un pistone, posto all'estremo di un condotto a sezione  $A$  costante. Rispetto ad un osservatore fermo e solidale al condotto, il passaggio dell'onda sonora dà luogo ad un processo transitorio, difficile da analizzare. Conviene allora adottare il riferimento inerziale rappresentato in Fig. 14.1 (b), dove il sistema di riferimento è fermo rispetto all'onda, ma si muove con moto rettilineo ed a velocità costante  $c$  rispetto al condotto.



**Figura 14.1** Propagazione di un'onda sonora in un fluido in quiete: (a) sistema di riferimento fisso e (b) sistema di riferimento inerziale mobile.

Per un condotto a sezione costante, nella situazione rappresentata in Fig. 14.1 (b), l'equazione di continuità può essere scritta nella forma

$$\dot{m}_u = (\rho + d\rho)(c - dw)A = \dot{m}_e = \rho c A = \dot{m} \quad (14.1)$$

ovvero, trascurando gli infinitesimi di ordine superiore, nelle forme equivalenti

$$c d\rho = \rho dw \quad (14.2)$$

e

$$dw = c \frac{d\rho}{\rho} \quad (14.3)$$

Inoltre il teorema della quantità di moto, applicato tra le superfici di controllo  $e$  ed  $u$ , fornisce

$$\begin{aligned} (pA)_u - (pA)_e &= (p + dp)A - pA \\ &= \dot{m}(w_u - w_e) = \rho c A (w_u - w_e) = \rho c A [-(c - dw) - (-c)] \end{aligned} \quad (14.4)$$

cioè

$$dp = \rho c dw \quad (14.5)$$

Sostituendo la (14.3) nella (14.5), si ottiene la relazione

$$dp = c^2 d\rho \quad (14.6)$$

da cui si ricava l'espressione della velocità del suono nel mezzo. Quando, come in questo caso, il processo è isoentropico si ha

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} \quad (14.7)$$

Dall'espressione (14.7) si deduce che la velocità del suono è tanto più ele-

vata quanto minori sono le variazioni di densità conseguenti ad una determinata variazione di pressione. Pertanto, la velocità del suono è molto più elevata nei solidi e nei liquidi, pressoché incomprimibili, che non nei gas. Se poi il fluido considerato è un gas ideale a calori specifici costanti, risulta anche

$$p v^k = p \rho^{-k} = \text{cost} \quad (14.8)$$

e, differenziando, si ottiene

$$\rho^{-k} dp - k p \rho^{-(k+1)} d\rho = 0 \quad (14.9)$$

cioè

$$\left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \frac{k p}{\rho} = k p v = k R T \quad (14.10)$$

Pertanto, la velocità del suono in un gas ideale a calori specifici costanti è pari a

$$c = \sqrt{k p v} = \sqrt{k R T} \quad (14.11)$$

Il rapporto tra la velocità del fluido  $w$  e la velocità del suono  $c$  è un numero adimensionale, definito numero di Mach

$$\text{Ma} = \frac{w}{c} \quad (14.12)$$

In armonia con la definizione (14.12), nel seguito si parlerà di moto supersonico quando  $\text{Ma} > 1$  e di moto subsonico quando  $\text{Ma} < 1$  intendendo, naturalmente, che il deflusso avvenga alla velocità del suono quando si abbia  $\text{Ma} = 1$ .

### Esempio 14.1

Si determini la velocità del suono nell'aria ( $k = 1,4$  ed  $M = 28,97$  kg/kmol)

alla temperatura di 20 °C.

*Soluzione*

Dall'Eq. (14.11) si ha

$$c = \sqrt{kRT} = \sqrt{1,4 \cdot (8314 / 28,97) \cdot 293,15} = 343 \text{ m/s}$$

Tale valore diminuisce al diminuire della temperatura e, quindi, decresce all'aumentare della quota sul livello del mare.

### 14.3 STATO DI RISTAGNO

È detto stato di ristagno, ed è indicato col pedice "0", lo stato raggiunto da un fluido che decelererà sino a fermarsi, seguendo un processo stazionario ben definito. Tale processo è semplicemente adiabatico per le definizioni d'entalpia e temperatura di ristagno, mentre è isoentropico per le definizioni di pressione e densità di ristagno. Nel calcolo delle proprietà associate con lo stato di ristagno si procede come indicato nel seguito.

In base alla definizione, l'entalpia di ristagno di un fluido in moto può essere calcolata applicando il primo principio della termodinamica ad un processo adiabatico stazionario, che si svolga tra la sezione di riferimento e la sezione d'arresto. In assenza di scambi di lavoro e di variazioni d'energia potenziale, si ottiene

$$h_0 = h + \frac{w^2}{2} \quad (14.13)$$

Dalla relazione (14.13) si arriva subito alla temperatura di ristagno di un gas ideale a calori specifici costanti

$$T_0 = T + \frac{w^2}{2c_p} \quad (14.14)$$

Tale temperatura, in base alla definizione, coincide con la temperatura misurabile mediante un termometro fermo rispetto ai confini del sistema, quando il processo d'arresto del fluido abbia luogo adiabaticamente.

La relazione (14.14) può essere scritta nella forma alternativa

$$\begin{aligned} \frac{T_0}{T} &= 1 + \frac{w^2}{2c_p T} = 1 + \frac{w^2}{2kR T / (k-1)} \\ &= 1 + \frac{k-1}{2} \frac{w^2}{c^2} = 1 + \frac{k-1}{2} \text{Ma}^2 \end{aligned} \quad (14.15)$$

nella quale compare il numero di Mach. La relazione (14.14) consente anche di ricavare la massima velocità raggiungibile da un gas ideale, nell'ipotesi di poter effettuare una espansione adiabatica fino alla temperatura di 0 K, convertendo tutta l'entalpia in energia cinetica. In tale caso, infatti, si avrebbe

$$w_{\max} = \sqrt{2c_p T_0} = \sqrt{2 \frac{k}{k-1} R T_0} = \sqrt{\frac{2}{k-1}} c_0 \quad (14.16)$$

dove

$$c_0 = \sqrt{kR T_0} \quad (14.17)$$

è la velocità del suono nelle condizioni di ristagno.

La relazione (14.15) consente di ricavare direttamente la pressione di ristagno per un processo isoentropico di un gas ideale a calori specifici costanti. Infatti, tenendo conto della relazione tra pressione e temperatura in un'isoentropica, si ha

$$\frac{p_0}{p} = \left( \frac{T_0}{T} \right)^{k/(k-1)} = \left( 1 + \frac{k-1}{2} \text{Ma}^2 \right)^{k/(k-1)} \quad (14.18)$$

Invece, per un deflusso isoentropico di un fluido a comportamento incom-

primibile, la pressione di ristagno può essere determinata in base alla (14.13) ed al primo principio della termodinamica, scritto per i parametri interni. In tali ipotesi, se il volume specifico non varia, si ottiene

$$0 = h_0 - h - \int_p^{p_0} v \, dp = \frac{w^2}{2} - v(p_0 - p) \quad (14.19)$$

cioè l'equazione di Bernoulli, dalla quale si ricava

$$\frac{p_0}{p} = 1 + \frac{w^2}{2pv} \quad (14.20)$$

Per un gas ideale tale equazione può essere riscritta, in termini di numero di Mach, nella forma

$$\frac{p_0}{p} = 1 + \frac{k w^2}{2kpv} = 1 + \frac{k}{2} \text{Ma}^2 \quad (14.21)$$

Infine, dalla (14.15) può essere ottenuta anche la densità di ristagno per un processo isoentropico di un gas ideale a calori specifici costanti

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{v}{v_0} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{1/k} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{1/(k-1)} = \left(1 + \frac{k-1}{2} \text{Ma}^2\right)^{1/(k-1)} \quad (14.22)$$

Infatti, la densità di ristagno è legata a pressione e temperatura di ristagno dalle relazioni valide per le trasformazioni isoentropiche.

### Esempio 14.2

Si determini l'errore che si commette confondendo  $T_0$  e  $T$  in una corrente d'aria ( $k = 1,4$ ) che si muove a  $\text{Ma} = 0,2$ .

#### Soluzione

Dalla (14.15) si deduce che nell'aria si ha

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} \text{Ma}^2 = 1 + 0,2 \cdot 0,2^2 = 1,008$$

e quindi l'errore che si commette è inferiore all'1%. Poiché la velocità del suono nell'atmosfera è dell'ordine dei 343 m/s, fino a velocità dell'aria di 70 m/s, corrispondenti a  $\text{Ma} = 0,2$ , si può trascurare l'effetto del moto sulle misure di temperatura, commettendo un errore del tutto accettabile ai fini pratici.

### Esempio 14.3

Con riferimento ad una corrente d'aria ( $k = 1,4$ ) che si muove a  $\text{Ma} = 0,2$ , si determini l'errore che si commette calcolando la pressione di ristagno mediante la relazione valida per il deflusso di un fluido a comportamento incomprimibile.

#### Soluzione

Se si utilizza la relazione (14.21), si ottiene il valore approssimato

$$\frac{p_0}{p} = 1 + \frac{k}{2} \text{Ma}^2 = 1 + 0,7 \cdot 0,2^2 = 1,0280$$

mentre, dalla (14.18) si ha il valore esatto

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2} \text{Ma}^2\right)^{k/(k-1)} = \left(1 + 0,2 \cdot 0,2^2\right)^{1,4/0,4} = 1,0283$$

Pertanto, l'errore che si commette è dell'ordine dello 0,03% appena.

### Esempio 14.4

Si determini l'errore che si commette confondendo  $\rho_0$  e  $\rho$  in una corrente d'aria ( $k = 1,4$ ) che si muove a  $\text{Ma} = 0,2$ .

#### Soluzione

Dalla (14.22) si deduce che nell'aria si ha

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{k-1}{2} \text{Ma}^2\right)^{1/(k-1)} = \left(1 + 0,2 \cdot 0,2^2\right)^{1/0,4} = 1,020$$

e quindi l'errore che si commette è dell'ordine del 2% soltanto.

## 14.4 CONDOTTI A SEZIONE VARIABILE

In questo paragrafo, si mettono in relazione le variazioni di velocità e le variazioni di sezione nel deflusso isoentropico stazionario in condotti orizzontali. Il punto di partenza è dato dal primo principio della termodinamica, applicato ad una trasformazione infinitesima e scritto, rispettivamente, in termini di scambio

$$dh = -\frac{dw^2}{2} = -w dw \quad (14.23)$$

ed in termini di parametri interni

$$dh = T ds + v dp = v dp = \frac{dp}{\rho} \quad (14.24)$$

Sostituendo la (14.24) nella (14.23) si ricava

$$w dw = -\frac{dp}{\rho} = -\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \frac{d\rho}{\rho} = -c^2 \frac{d\rho}{\rho} \quad (14.25)$$

mentre, differenziando l'espressione della portata di massa  $\dot{m} = \rho A w$  e tenendo conto della (14.25), si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = 0 &= \frac{dw}{w} + \frac{dA}{A} + \frac{d\rho}{\rho} \\ &= \frac{dw}{w} + \frac{dA}{A} - \frac{w}{c^2} dw = \frac{dw}{w} + \frac{dA}{A} - \frac{w^2}{c^2} \frac{dw}{w} \end{aligned} \quad (14.26)$$

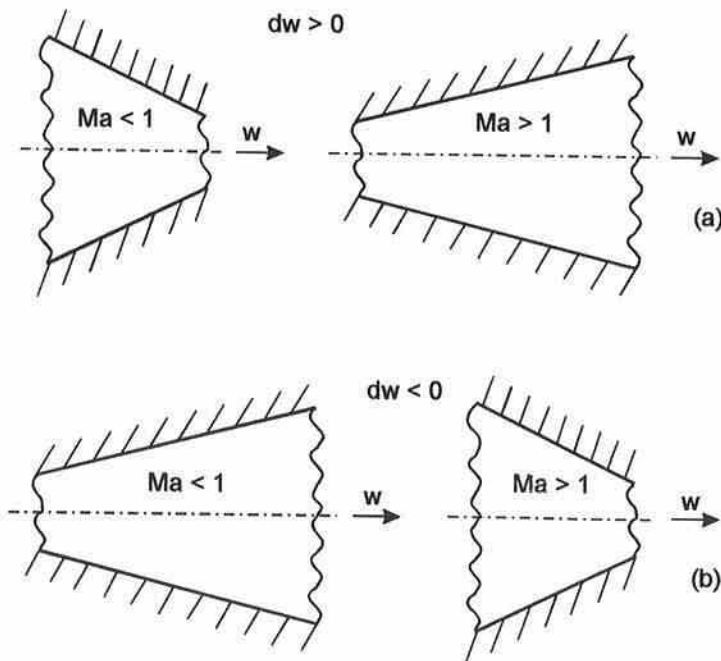


Attesa la definizione di numero di Mach, raggruppando opportunamente le quantità che compaiono all'ultimo membro della (14.26), si arriva alla relazione cercata

$$\frac{dA}{A} = \frac{dw}{w} (\text{Ma}^2 - 1) \quad (14.27)$$

Dall'Eq. (14.27) si deduce che

- come indicato in Fig. 14.2 (a), per accelerare un fluido deve essere utilizzato un condotto convergente, se  $\text{Ma} < 1$ , od un condotto divergente, se  $\text{Ma} > 1$ , mentre
- come indicato in Fig. 14.2 (b), per decelerare un fluido deve essere utilizzato un condotto divergente, se  $\text{Ma} < 1$ , od un condotto convergente, se  $\text{Ma} > 1$ .



**Figura 14.2** Variazioni di sezione dei condotti per deflussi isoentropici: (a) accelerazione e (b) decelerazione.

Questi risultati si giustificano facilmente tenendo conto delle variazioni di volume specifico. Nel caso dell'accelerazione, ad esempio, la pressione diminuisce nel senso del moto causando, insieme, aumenti di velocità e di volume specifico. Gli aumenti di velocità inducono riduzioni di sezione, mentre gli aumenti di volume specifico inducono aumenti di sezione. Per  $Ma < 1$  prevalgono gli effetti cinetici, e quindi l'espansione richiede un convergente mentre, per  $Ma > 1$ , prevalgono gli aumenti di volume specifico, e quindi l'espansione richiede un divergente.

Si noti che la relazione (14.27) è stata ricavata senza fare riferimento ad un fluido particolare, e quindi vale sia per i gas sia per i liquidi. Tuttavia, la velocità del suono nei liquidi è dell'ordine delle migliaia di metri al secondo, mentre la velocità dei deflussi liquidi di interesse tecnico è dell'ordine dei metri al secondo. Pertanto è molto difficile, se non tecnicamente impossibile, che i liquidi defluiscano in regime supersonico.

#### 14.4.1 Stato Critico

Viene detto stato critico, ed indicato con l'indice "\*", lo stato raggiunto nel punto in cui si ha  $Ma = 1$ . Nella progettazione dei condotti per il deflusso di fluidi comprimibili, assimilabili a gas ideali con calori specifici costanti, è spesso conveniente fare riferimento alle proprietà dello stato critico.

In base alla definizione e con riferimento alla pressione di ristagno, può essere calcolato immediatamente il rapporto critico delle pressioni ponendo  $Ma = 1$  nella (14.20). Si ottiene così

$$\frac{p_0}{p^*} = \left(1 + \frac{k-1}{2}\right)^{k/(k-1)} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{k/(k-1)} \quad (14.28)$$

ovvero

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/(k-1)} \quad (14.29)$$

Analogamente, i valori critici di temperatura e densità, per gas ideali a calori specifici costanti, possono essere espressi in funzione dei corrispondenti valori di ristagno, ponendo  $Ma = 1$  nelle (14.15) e (14.22). Si ottiene così

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{k+1} \quad (14.30)$$

dalla (14.15), e

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left( \frac{2}{k+1} \right)^{1/(k-1)} \quad (14.31)$$

dalla (14.22) mentre, in base alla definizione di velocità del suono, risulta

$$\frac{c^*}{c_0} = \frac{\sqrt{kRT^*}}{\sqrt{kRT_0}} = \sqrt{\frac{T^*}{T_0}} = \sqrt{\frac{2}{k+1}} \quad (14.32)$$

Nella pratica, capita spesso di dover decidere se l'espansore da utilizzare per un gas ideale deve essere convergente - divergente o può essere solo convergente. Per rispondere ad una tale domanda basta valutare il rapporto critico delle pressioni  $p^*/p_0$  e confrontarlo con il rapporto  $p_u/p_0$  tra la pressione all'uscita e la pressione di ristagno. Se risulta  $p_u/p_0 < p^*/p_0$ , allora il numero di Mach all'uscita è superiore ad 1 e bisogna utilizzare un convergente - divergente, mentre se si ha  $p_u/p_0 > p^*/p_0$  il numero di Mach all'uscita è inferiore ad 1 e basta un convergente. Altri esempi di riferimento allo stato critico nella progettazione dei condotti saranno presentati nei paragrafi che seguono.

### Esempio 14.5

Con riferimento all'aria ( $k = 1,4$ ), si determinino i rapporti adimensionali tra le proprietà nello stato critico e nello stato di ristagno.

*Soluzione*

Dalle relazioni (14.29) - (14.32) si ha, in sequenza

$$\frac{p^*}{p_0} = \left( \frac{2}{k+1} \right)^{k/(k-1)} = \left( \frac{2}{2,4} \right)^{1,4/0,4} = 0,528$$

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{k+1} = \frac{2}{2,4} = 0,833$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left( \frac{2}{k+1} \right)^{1/(k-1)} = \left( \frac{2}{2,4} \right)^{1/0,4} = 0,634$$

e

$$\frac{c^*}{c_0} = \sqrt{\frac{2}{k+1}} = \sqrt{\frac{2}{2,4}} = 0,913$$

Di particolare interesse, come si è detto, è il rapporto critico delle pressioni. In base al risultato qui ottenuto, si può concludere che, nel caso di gas biatomici come l'aria, il convergente - divergente serve solo per rapporti d'espansione  $p_u / p_0 < 0,528$ . Analogamente, in base alla (14.28), si trova che, nel caso di gas triatomici come il vapor d'acqua ( $k = 1,333$ ), il convergente - divergente serve solo per rapporti d'espansione inferiori a 0,540.

## 14.5 ESPANSORI IDEALI

In questo paragrafo ci si occupa d'espansori nei quali abbia luogo un deflusso isoentropico monodimensionale stazionario, di un gas ideale a calori specifici costanti. Nelle ipotesi poste, l'area della sezione di passaggio del fluido dipende dalla combinazione di tre parametri: portata di massa, densità e velocità locale. Se però si fa riferimento a variabili adimensionali, è possibile esprimere il rapporto tra l'area della sezione generica e l'area della sezione di gola, cioè della sezione più ristretta del condotto, in funzione del

solo numero di Mach locale. Tale rapporto viene solitamente indicato con  $A / A^*$  in quanto, come si è visto nella Sezione 14.3, il numero di Mach è uguale ad 1 nella sezione di gola. Il punto di partenza per l'analisi è dato dalle relazioni, ricavate in precedenza, che intercorrono tra i parametri rappresentativi, e dall'equazione di continuità scritta nella forma

$$\dot{m} = \rho w A = \rho^* c^* A^* \quad (14.33)$$

Infatti, dall'Eq. (14.33) si ottiene

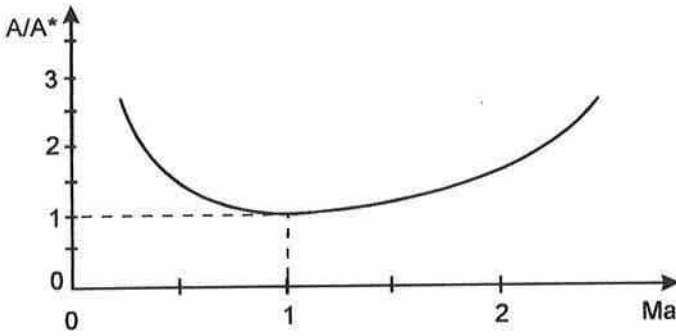
$$\begin{aligned} \frac{A}{A^*} &= \frac{\rho^* c^*}{\rho w} = \frac{\rho^* \rho_0 c^* c}{\rho_0 \rho c w} = \frac{\rho^* \rho_0 c^*}{\rho_0 \rho c} \frac{1}{\text{Ma}} \\ &= \frac{1}{\text{Ma}} \frac{\rho^* \rho_0 c^* c_0}{\rho_0 \rho c_0 c} = \frac{1}{\text{Ma}} \frac{\rho^* c^* \rho_0}{\rho_0 c_0 \rho} \sqrt{\frac{T_0}{T}} \end{aligned} \quad (14.34)$$

e tenendo conto, in sequenza, delle relazioni (14.31), (14.32), (14.22) e (14.15), si arriva all'espressione cercata

$$\begin{aligned} \frac{A}{A^*} &= \frac{1}{\text{Ma}} \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{2}} \left( 1 + \frac{k-1}{2} \text{Ma}^2 \right)^{\frac{1}{k-1}} \left( 1 + \frac{k-1}{2} \text{Ma}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\text{Ma}} \left[ \left( \frac{2}{k+1} \right) \left( 1 + \frac{k-1}{2} \text{Ma}^2 \right) \right]^{(k+1)/[2(k-1)]} \end{aligned} \quad (14.35)$$

La variazione di  $A / A^*$  con il numero di Mach è riportata in Fig. 14.3 e l'andamento trovato conferma le conclusioni cui si era giunti, per altra via, nella sezione precedente. Infatti dal grafico si vede che, se il numero di Mach resta inferiore ad 1, la profilatura dell'espansore può essere limitata al solo convergente mentre, se il numero di Mach supera l'unità, la profilatura deve prevedere un convergente seguito da un divergente. Dalla Fig. 14.3 si evince ancora che, per un certo valore del numero di Mach, si ha un unico

valore del rapporto  $A/A^*$  mentre, per lo stesso valore del rapporto  $A/A^*$  si hanno due valori del numero di Mach, uno minore dell'unità nella zona convergente ed uno maggiore dell'unità nella zona divergente.



**Figura 14.3** Andamento del rapporto  $A/A^*$  in un espansore isoentropico per un gas ideale avente  $k = 1,4$ .

Per il calcolo della velocità all'uscita dell'espansore, si può trasformare l'Eq. (14.14), tenendo conto delle Eq. (14.17) e (14.32). Si ottiene così

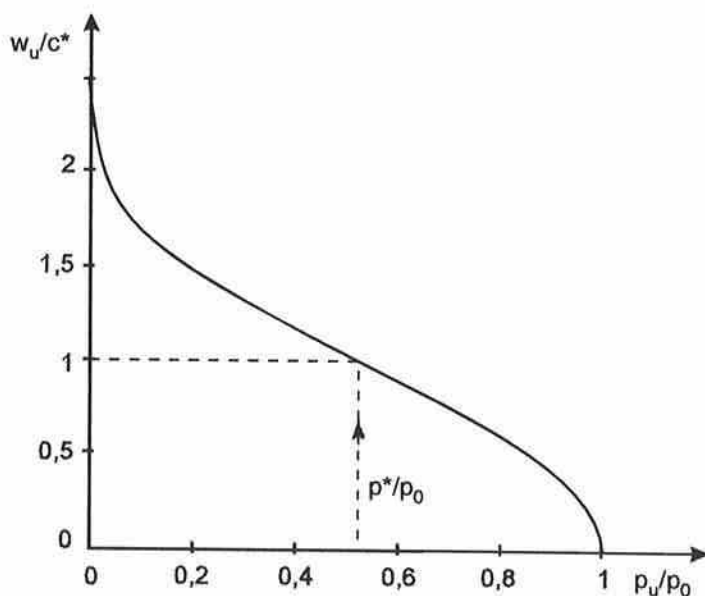
$$\begin{aligned}
 w_u^2 &= 2c_p(T_0 - T_u) = 2\frac{k}{k-1}RT_0\left(1 - \frac{T_u}{T_0}\right) \\
 &= 2\frac{k}{k+1}RT_0\frac{k+1}{k-1}\left[1 - \left(\frac{p_u}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right] = \frac{k+1}{k-1}\left[1 - \left(\frac{p_u}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right](c^*)^2 \quad (14.36)
 \end{aligned}$$

ovvero, in termini di velocità adimensionale

$$\frac{w_u}{c^*} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}\left[1 - \left(\frac{p_u}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]} \quad (14.37)$$

Ovviamente, se nella (14.37) si utilizza come rapporto delle pressioni il va-

lore critico dato dalla (14.29), si ottiene  $w_u = c^*$  mentre, per una pressione d'uscita nulla, si ottiene  $w_u = w_{\max}$ , con la velocità massima espressa dalla (14.16). L'andamento della velocità di uscita adimensionale, espresso dalla (14.37), è rappresentato in Fig. 14.4.



**Figura 14.4** Andamento della velocità adimensionale all'uscita di un espansore isoentropico per un gas ideale avente  $k = 1,4$ .

Un'espressione adimensionale della portata di massa può essere ricavata partendo dalla definizione di portata specifica all'uscita

$$\frac{\dot{m}}{A_u} = \rho_u w_u \quad (14.38)$$

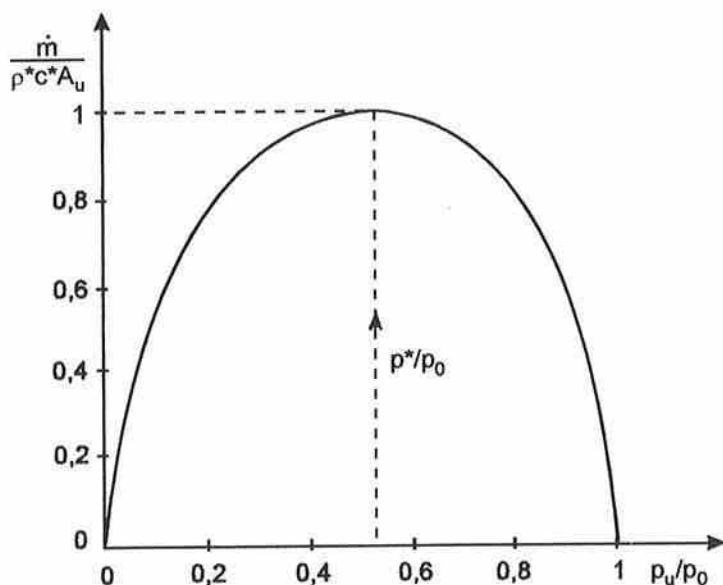
Dividendo entrambi i membri della (14.38) per la portata specifica nella sezione critica, o di gola, si ottiene la relazione

$$\frac{\dot{m}}{\rho^* c^* A_u} = \frac{\rho_u w_u}{\rho^* c^*} = \frac{\rho_u \rho_0}{\rho_0 \rho^*} \frac{w_u}{c^*} \quad (14.39)$$

dove, al terzo membro, compaiono tutti rapporti noti. Sostituendo, nella (14.39), le (14.31) e (14.37) e tenendo conto della relazione (14.18), si ricava

$$\frac{\dot{m}}{\rho^* c^* A_u} = \left(\frac{p_u}{p_0}\right)^{1/k} \left(\frac{k+1}{2}\right)^{1/(k-1)} \sqrt{\frac{k+1}{k-1} \left[1 - \left(\frac{p_u}{p_0}\right)^{(k-1)/k}\right]} \quad (14.40)$$

L'andamento del rapporto tra portata specifica all'uscita e portata specifica nella sezione critica, espresso dalla (14.40), è rappresentato nella Fig. 14.5.



**Figura 14.5** Andamento della portata specifica adimensionale all'uscita di un espansore isoentropico per un gas ideale avente  $k = 1,4$ .

Come si vede, il valore massimo della portata specifica si ha in corrispondenza al valore critico del rapporto delle pressioni, quando la sezione d'uscita coincide con la sezione di gola. Inoltre si può osservare che, per una pressione d'uscita nulla, la (14.40) fornisce una portata di massa nulla. Tale risultato, pur corretto sul piano matematico, non appare tuttavia plausi-



bile sul piano fisico e, come si vedrà nel prossimo paragrafo, non trova riscontro nel comportamento degli espansori reali.

### Esempio 14.6

Un espansore isoentropico è attraversato da una portata di 0,4 kg/s d'aria ( $k = 1,4$ ). Lo stato di arresto, coincidente con lo stato iniziale, è caratterizzato da una pressione di 0,8 MPa e da una temperatura di 1000 K, mentre la pressione d'uscita è pari a 0,1 MPa. Si determinino le aree delle sezioni di gola e d'uscita, la velocità d'uscita e la portata specifica adimensionale all'uscita.

#### Soluzione

Nella sezione di gola si ha  $Ma = 1$ , e quindi si raggiunge lo stato critico caratterizzato da

$$\begin{aligned}\rho^* &= \left(\frac{2}{k+1}\right)^{1/(k-1)} \rho_0 = 0,634 \frac{P}{(\bar{R}/M)T_0} \\ &= 0,634 \frac{800}{(8,314/28,97)1000} = 1,767 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}c^* &= \sqrt{\frac{2}{k+1}} c_0 = 0,913 \sqrt{k \frac{\bar{R}}{M} T_0} \\ &= 0,913 \sqrt{1,4(8314/28,97)1000} = 578,7 \text{ m/s}\end{aligned}$$

Pertanto dall'equazione di continuità, applicata alla sezione di gola, si ottiene

$$A_g = A^* = \frac{\dot{m}}{\rho^* c^*} = \frac{0,4}{1,767 \cdot 578,7} = 3,912 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 3,912 \text{ cm}^2$$

Nella sezione d'uscita si ha

$$w_u = c^* \sqrt{\frac{k+1}{k-1} \left[ 1 - \left( \frac{p_u}{p_0} \right)^{(k-1)/k} \right]}$$

$$= 578,7 \sqrt{\frac{2,4}{0,4} \left[ 1 - \left( \frac{1}{8} \right)^{0,4/1,4} \right]} = 948,7 \text{ m/s}$$

e

$$\frac{\dot{m}}{\rho^* c^* A_u} = \left( \frac{p_u}{p_0} \right)^{1/k} \left( \frac{k+1}{2} \right)^{1/(k-1)} \sqrt{\frac{k+1}{k-1} \left[ 1 - \left( \frac{p_u}{p_0} \right)^{(k-1)/k} \right]}$$

$$= \left( \frac{1}{8} \right)^{1/1,4} \left( \frac{2,4}{2} \right)^{1/0,4} \sqrt{\frac{2,4}{0,4} \left[ 1 - \left( \frac{1}{8} \right)^{0,4/1,4} \right]} = 0,586$$

oltre che

$$A_u = \frac{\rho^* c^* A_u \dot{m}}{\dot{m} \rho^* c^*}$$

$$= \frac{1}{0,586} \cdot \frac{0,4}{1,767 \cdot 578,7} = 6,675 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 6,675 \text{ cm}^2$$

A conferma dei risultati ottenuti, si può calcolare il numero di Mach all'uscita in base all'Eq. (14.18), scritta nella forma

$$\left( \frac{p_0}{p_u} \right)^{(k-1)/k} = \left( 1 + \frac{k-1}{2} \text{Ma}^2 \right)$$

Si ottiene così

$$8^{0,4/1,4} - 1 = 0,2 \text{Ma}^2$$

da cui si ricava  $\text{Ma} = 2,0143$ . Sostituendo tale valore nella (14.35) si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{A_u}{A^*} &= \frac{1}{\text{Ma}} \left[ \left( \frac{2}{k+1} \right) \left( 1 + \frac{k-1}{2} \text{Ma}^2 \right) \right]^{(k+1)/[2(k-1)]} \\ &= \frac{1}{2,0143} \left[ 0,8333 \left( 1 + 0,2 \cdot 2,0143^2 \right) \right]^3 = 1,708 \end{aligned}$$

contro il valore prima stimato

$$\frac{A_u}{A^*} = \frac{6,675}{3,912} = 1,706$$

La differenza è compatibile con gli errori d'arrotondamento, a conferma della sostanziale accuratezza dei calcoli.

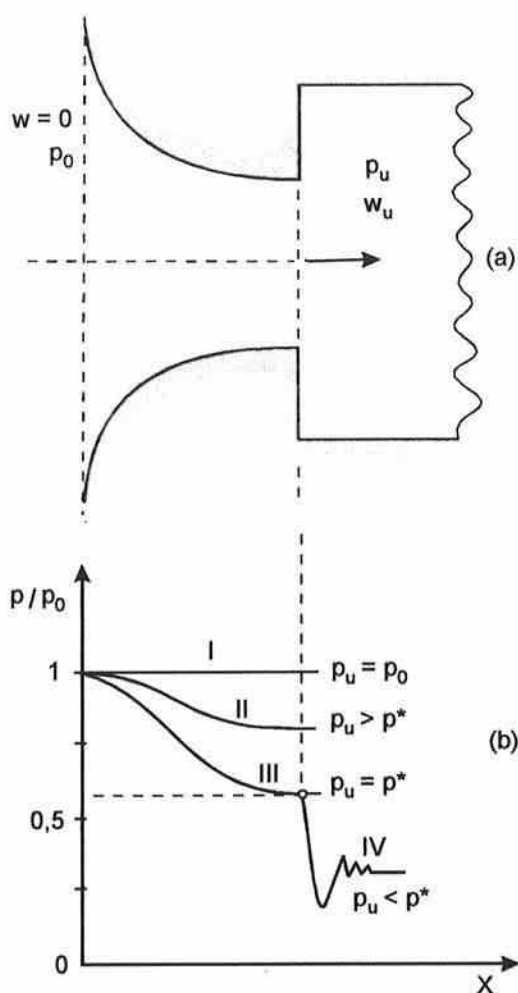
## 14.6 ESPANSORI REALI

Gli espansori reali non operano costantemente nelle condizioni di progetto e, quindi, è importante determinare, almeno in maniera qualitativa, il loro comportamento al variare della pressione di uscita. Inoltre, i processi d'espansione reali sono sempre, con ottima approssimazione, adiabatici ma non sempre possono essere considerati anche isoentropici. Pertanto gli espansori reali, come le turbine, possono essere vantaggiosamente caratterizzati da un valore del rendimento isoentropico d'espansione opportunamente definito. Nell'analisi che segue si distinguerà tra espansori, od ugelli, convergenti ed espansori, od ugelli, convergenti - divergenti.

### 14.6.1 Ugello Convergente

Si faccia riferimento alla situazione schematizzata in Fig. 14.6 (a), dove pressione e temperatura a monte di un ugello convergente sono costanti e pari ai valori di ristagno, mentre la pressione d'uscita può mutare. Al variare delle condizioni di scarico, la pressione all'interno dell'espansore ha gli an-

damenti evidenziati in Fig. 14.6 (b).



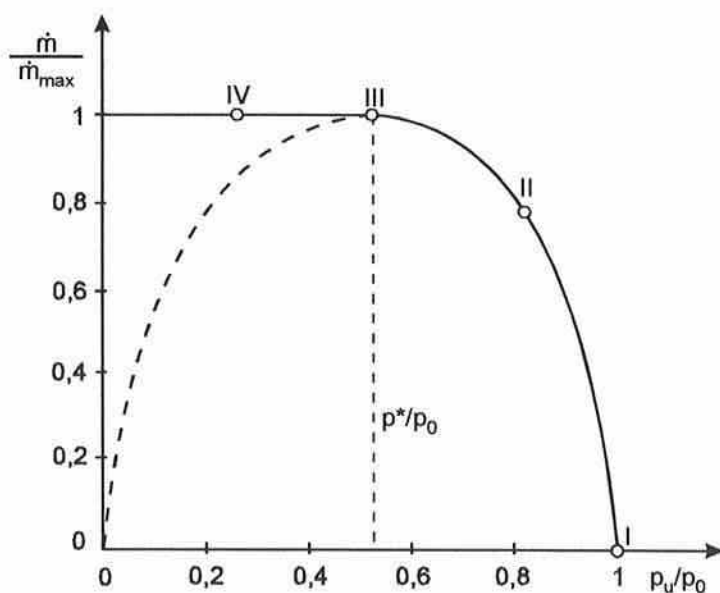
**Figura 14.6** Andamenti della pressione in un ugello convergente (a) al variare della pressione di scarico (b).

Il caso più semplice (situazione I), è caratterizzato dall'assenza di deflusso e si ha per  $p_u = p_0$ . Successivamente, al diminuire della pressione di scarico (situazioni II e III), il fluido accelera fino a che, per  $p_u = p^*$ , raggiunge la velocità del suono nella sezione di uscita. In particolare nella si-

tuazione III si ha, all'uscita,  $w_u = c^*$ ,  $\rho_u = \rho^*$  ed  $A_u = A^*$ , di modo che risulta

$$\dot{m} = \rho_u w_u A_u = \rho^* c^* A^* = \dot{m}_{\max} \quad (14.41)$$

Infatti, se la pressione d'uscita diminuisce ancora fino ad avere  $p_u < p^*$  (situazione IV), la velocità allo scarico non può aumentare ulteriormente perché, in assenza di un divergente, il numero di Mach non può superare l'unità. D'altra parte, con la velocità nella sezione di uscita uguale alla velocità del suono, nessuna informazione può risalire la corrente. Pertanto, la riduzione della pressione di scarico al di sotto del valore critico non sortisce alcun effetto sulla pressione nella sezione d'uscita o sulla portata di massa. Il fluido non può che completarsi irreversibilmente, e non più isoentropicamente, la sua espansione all'esterno, mentre la portata di massa rimane bloccata al valore massimo fornito dalla (14.41). Nella Fig. 14.7,



**Figura 14.7** Variazioni della portata di massa in un ugello convergente, in funzione della pressione di scarico.

l'andamento reale della portata di massa è rappresentato mediante una linea continua, mentre l'andamento teorico

$$\frac{\dot{m}}{\dot{m}_{\max}} = \frac{\dot{m}}{\rho^* c^* A^*} = \frac{\dot{m}}{\rho^* c^* A_u} \quad (14.42)$$

corrispondente alle previsioni della (14.40), è rappresentato mediante una linea tratteggiata.

### 14.6.2 Ugello Convergente - Divergente

Si faccia riferimento alla situazione schematizzata in Fig. 14.8 (a), dove pressione e temperatura a monte di un ugello convergente sono costanti e pari ai valori di ristagno, mentre la pressione d'uscita può mutare. Al variare delle condizioni di scarico, la pressione all'interno dell'espansore ha gli andamenti evidenziati in Fig. 14.8 (b).

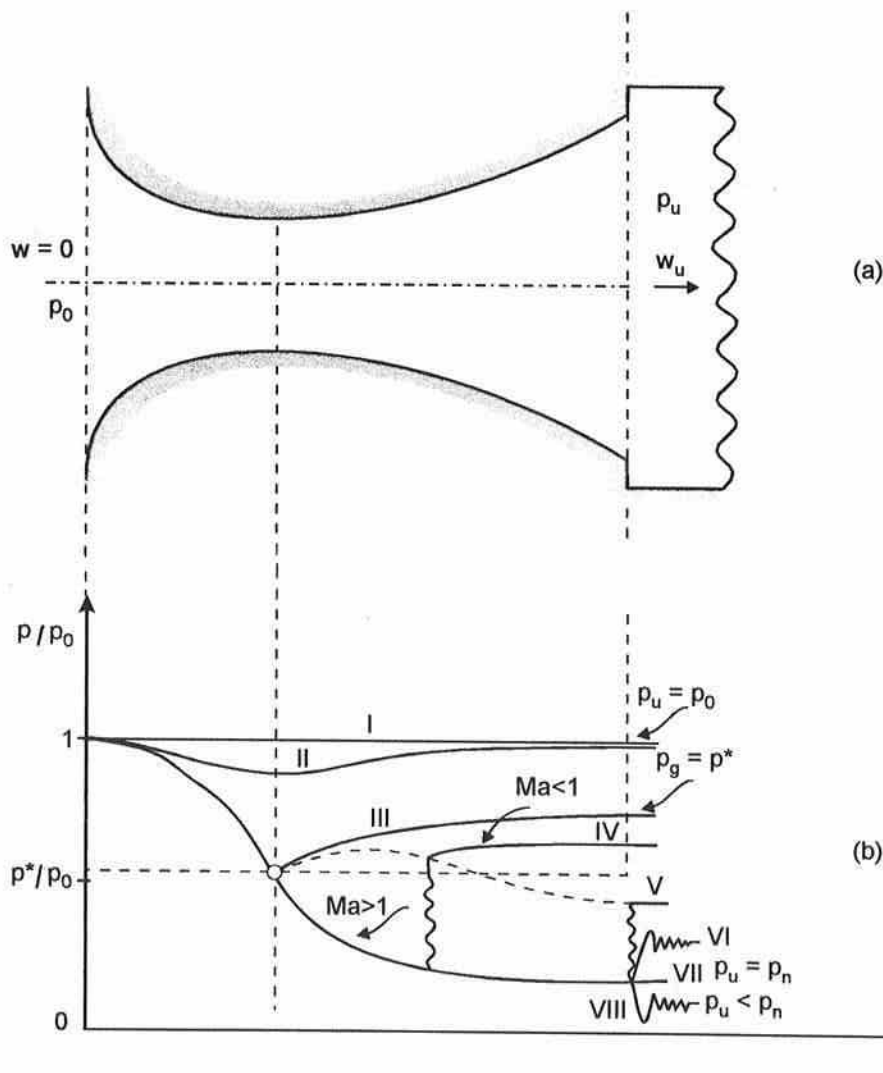
Il caso più semplice (situazione I), è ancora dato dall'assenza di deflusso per  $p_u = p_0$ . Successivamente (situazione II), al diminuire della pressione di scarico il fluido accelera e, fino a che la pressione nella sezione ristretta, o di gola  $A_g$ , non raggiunge la pressione critica, il moto resta completamente subsonico. Quando la pressione raggiunge il valore critico nella sezione di gola (situazione III con  $p_g = p^*$ ), nella sezione stessa si ha anche  $w_g = c^*$ ,  $\rho_g = \rho^*$  e la portata di massa raggiunge il valore

$$\dot{m} = \rho_g w_g A_g = \rho^* c^* A^* = \dot{m}_{\max} \quad (14.43)$$

Naturalmente, nelle situazioni II e III, il tratto divergente opera con  $Ma < 1$ , fungendo da diffusore, mentre l'ugello, nel suo complesso, si comporta come un tubo Venturi.

Quando la pressione di scarico diminuisce ancora (situazioni IV e V), non possono mutare le condizioni di moto nel tratto convergente e, di

conseguenza, la portata di massa rimane bloccata al valore massimo dato dalla (14.43). L'espansione continua regolarmente per un certo tratto, superando anche la velocità del suono, ma poi il fluido non può rallentare reversibilmente perché, per  $Ma > 1$ , ciò richiederebbe un convergente.



**Figura 14.8** Andamenti della pressione in un ugello convergente - divergente (a), al variare della pressione di scarico (b).

Di conseguenza si registra un brusco passaggio da  $Ma > 1$  a  $Ma < 1$ , accompagnato da un aumento irreversibile di pressione: nel fluido si ha la formazione di una discontinuità ortogonale alla direzione del moto definita “onda d’urto normale”. A valle dell’onda d’urto il moto è subsonico e quindi il divergente si comporta come un diffusore. Man mano che la pressione di scarico diminuisce, l’onda d’urto si sposta verso la sezione d’uscita fino a raggiungerla nella situazione V.

Successivamente, fino a quando la pressione di scarico non raggiunge la pressione nominale di progetto, il recupero irreversibile di pressione ha luogo a valle della sezione di sbocco (situazione VI con  $p_u > p_n$ ). In tal caso, nel fluido esterno si ha la formazione di una discontinuità che, però, non è più ortogonale al moto ed è quindi definita “onda d’urto obliqua”.

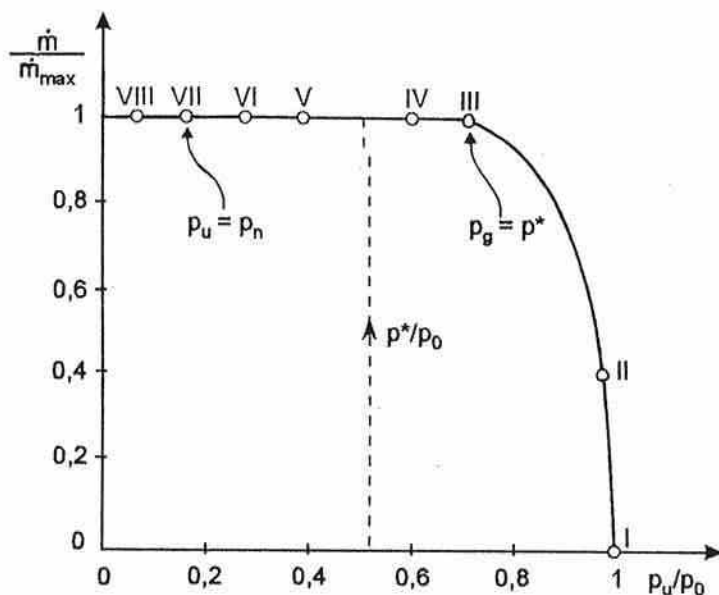
Finalmente, quando la pressione di scarico raggiunge la pressione nominale di progetto, nell’ugello si ha un’espansione supersonica completamente reversibile (situazione VII con  $p_u = p_n$ ). Se poi la pressione di scarico diminuisce ancora, scendendo sotto la pressione nominale, si ha un’espansione reversibile nell’ugello accompagnata, però, da un’ulteriore espansione irreversibile all’esterno (situazione VIII con  $p_u < p_n$ ).

L’andamento della portata di massa, rappresentato in Fig. 14.9, non è qualitativamente diverso da quello relativo ad un ugello convergente. Infatti, come si è detto, la portata aumenta fino a che si raggiungono le condizioni critiche sezione di gola e, successivamente, resta bloccata al valore massimo dato dalla (14.43).

### 14.6.3 Rendimento Isoentropico di un Ugello

Come si è già osservato, le espansioni reali, possono essere considerate adiabatiche con ottima approssimazione, ma non sempre possono essere definite isoentropiche. Pertanto, in analogia a quanto fatto per le turbine, si può definire anche il rendimento isoentropico d’espansione in un ugello.





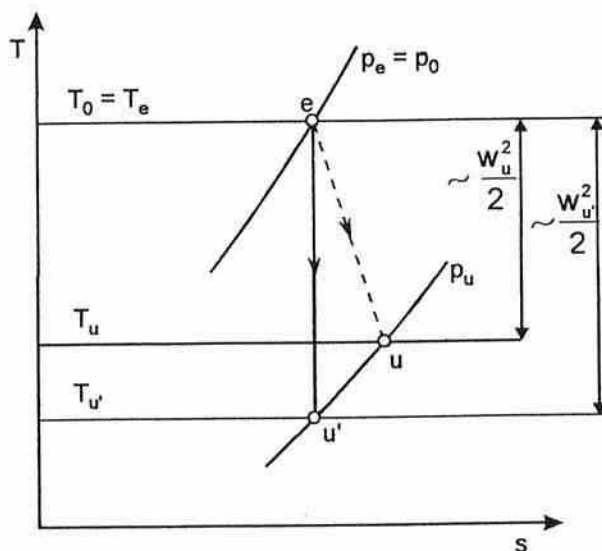
**Figura 14.9** Variazione della portata di massa in un ugello convergente - divergente, in funzione della pressione di scarico.

Tale rendimento è dato dal rapporto tra il valore raggiunto dall'energia cinetica all'uscita in un'espansione reale, ed il valore massimo raggiungibile nella corrispondente espansione ideale isoentropica. Se si considera come iniziale lo stato di ristagno e si fa riferimento alla situazione schematizzata in Fig. 14.10, si ha

$$\eta_{iw} = \frac{e_{wu}}{e_{wu'}} = \frac{w_u^2 / 2}{w_{u'}^2 / 2} = \frac{h_0 - h_u}{h_0 - h_{u'}} \quad (14.44)$$

Se poi l'espansione riguarda un gas ideale a calori specifici costanti, l'espressione precedente può venir scritta nella forma

$$\eta_{iw} = \frac{e_{wu}}{e_{wu'}} = \frac{w_u^2 / 2}{w_{u'}^2 / 2} = \frac{T_0 - T_u}{T_0 - T_{u'}} \quad (14.45)$$



**Figura 14.10** Rendimento isoentropico di un ugello.

Ovviamente, il rendimento isoentropico è sempre inferiore ad 1 poiché, in un'espansione reale, la presenza degli attriti fa sì che la velocità effettivamente raggiunta dal fluido sia inferiore a quella raggiungibile nella corrispondente espansione ideale.

## 14.7 CONCLUSIONI

In questo capitolo si è calcolata la velocità di propagazione del suono in un mezzo e si è introdotto il numero adimensionale di Mach, definito come rapporto tra la velocità del fluido e la velocità del suono nel fluido stesso. Si è poi mostrato come il numero di Mach, a sua volta, condizioni il comportamento dei gas ed orienti verso la scelta di un modello matematico per il fluido di tipo "comprimibile" od "incomprimibile".

Sono stati poi determinati i valori dei parametri di riferimento per le situazioni di ristagno nelle quali si ha  $Ma = 0$ , e le situazioni critiche nelle

quali si ha  $Ma = 1$ . Infine, sono stati esaminati i comportamenti degli espansori ideali e reali, sia convergenti sia convergenti - divergenti. Di particolare interesse è risultato il funzionamento degli espansori reali in condizioni diverse da quelle di progetto ed in situazioni d'irreversibilità.

---

## APPENDICE

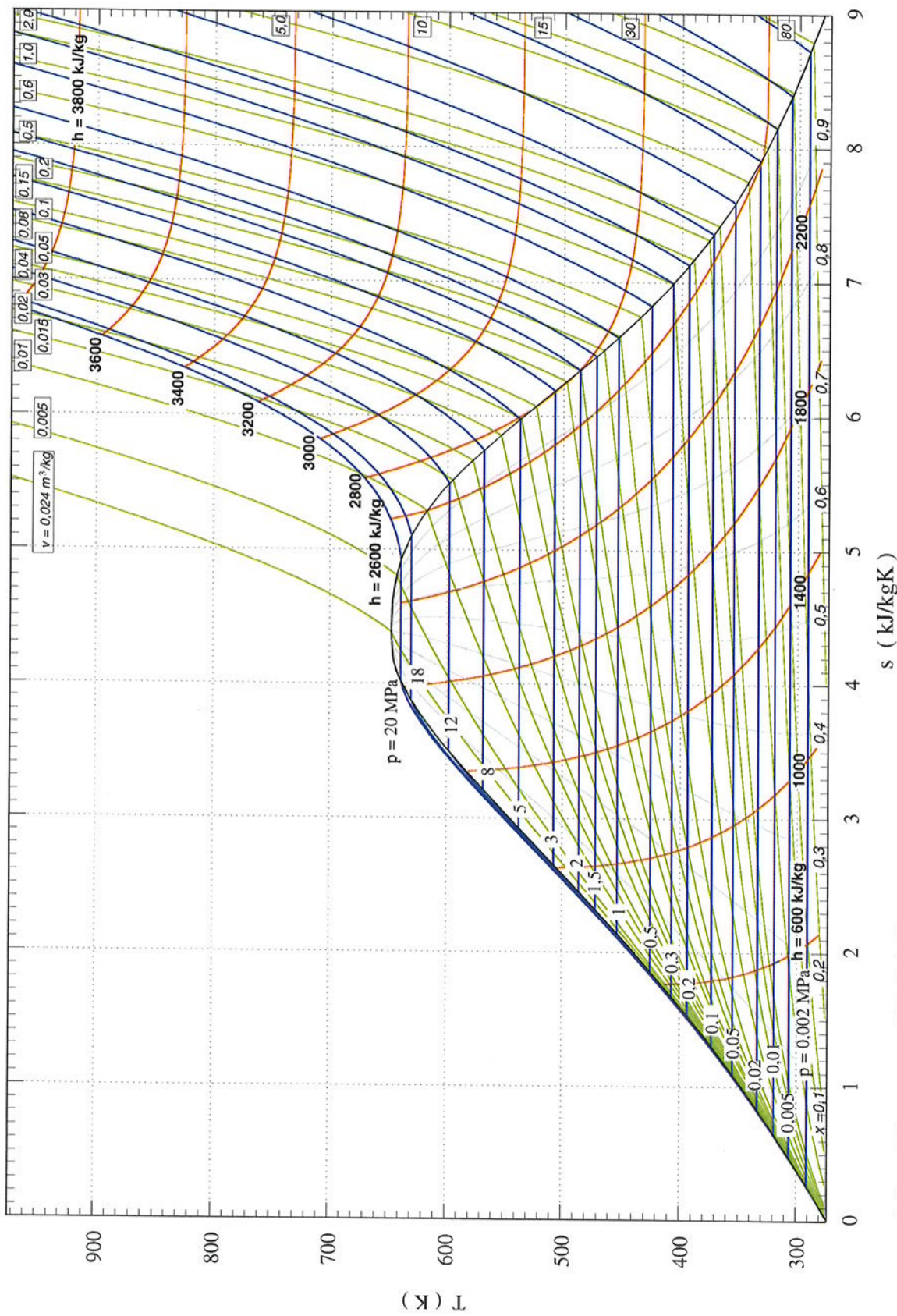
---

- A.1 Diagramma ( $T, s$ ) dell'acqua.
- A.2 Diagramma ( $h, s$ ) dell'acqua.
- A.3 Diagramma ( $T, s$ ) del fluido frigorigeno R134a.
- A.4 Diagramma ( $p, h$ ) del fluido frigorigeno R134a.
- A.5 Diagramma psicrometrico di Carrier.
- A.6 Diagramma psicrometrico di Mollier.
- A.7 Proprietà dell'acqua in condizioni di saturazione.
- A.8 Proprietà dell'acqua in condizioni di vapore surriscaldato.
- A.9 Proprietà del fluido frigorigeno R134a in condizioni di saturazione.
- A.10 Proprietà del fluido frigorigeno R134a in condizioni di vapore surriscaldato.
- A.11 Proprietà termodinamiche dell'aria standard alla pressione di 101,325 kPa.
- A.12 Proprietà termodinamiche dei prodotti della combustione di metano in aria standard alla pressione di 0,1 MPa.
- A.13 Calori specifici a pressione costante dei gas ideali.
- A.14 Valori medi dei calori specifici a pressione costante.

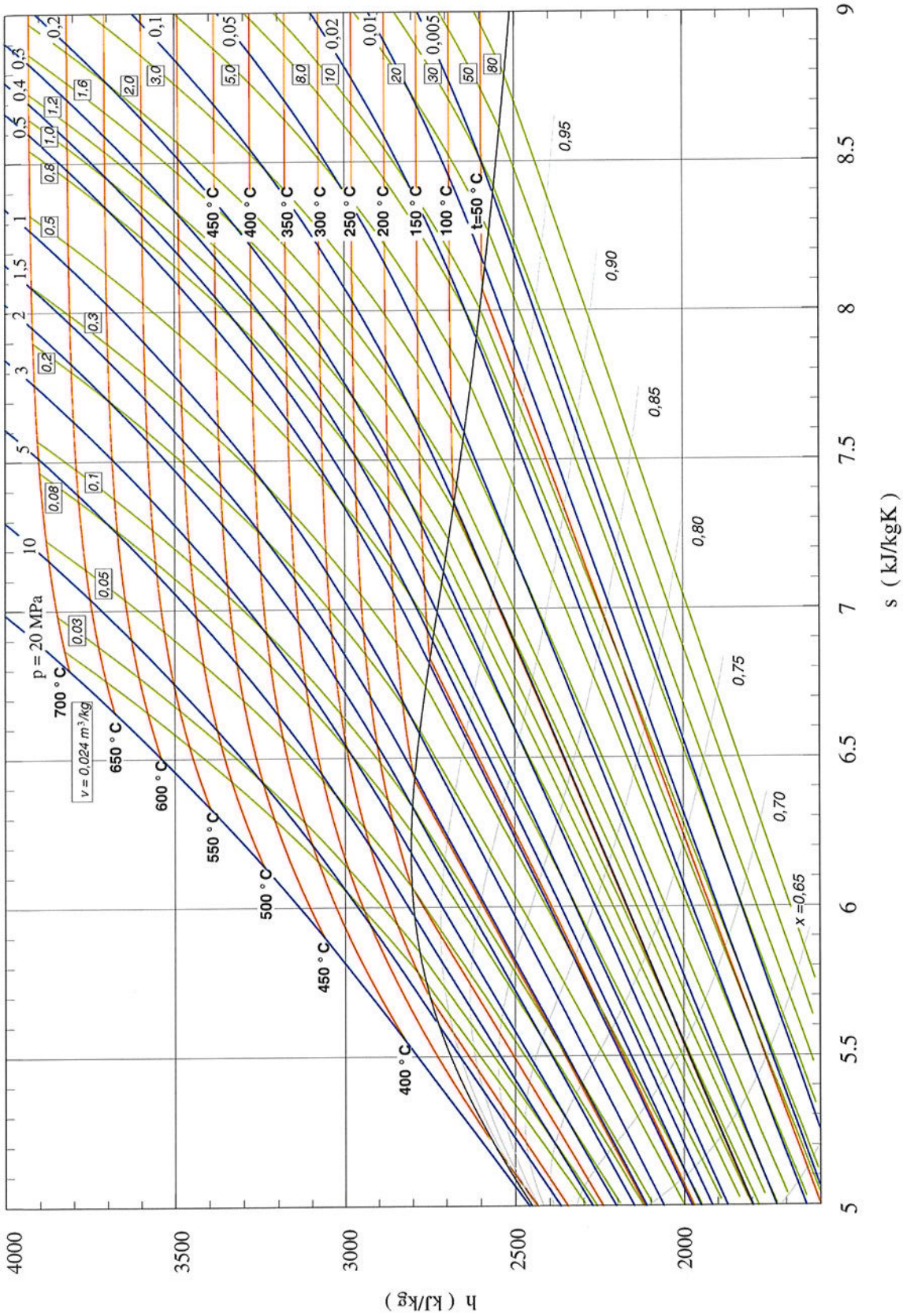
### NOTA

Nel tracciamento dei diagrammi termodinamici (da A1 ad A6), nella compilazione delle Tabelle (da A7 ad A14) e nella soluzione degli esercizi proposti negli esempi si sono utilizzati i *Programmi per il tracciamento dei cicli* che il Dipartimento di Energetica e Macchine dell'Università di Udine mette a disposizione di studenti e docenti. Questi programmi, ed altri sussidi didattici aggiornati dinamicamente, si trovano nella sezione *Didattica on line* della pagina WEB del Dipartimento

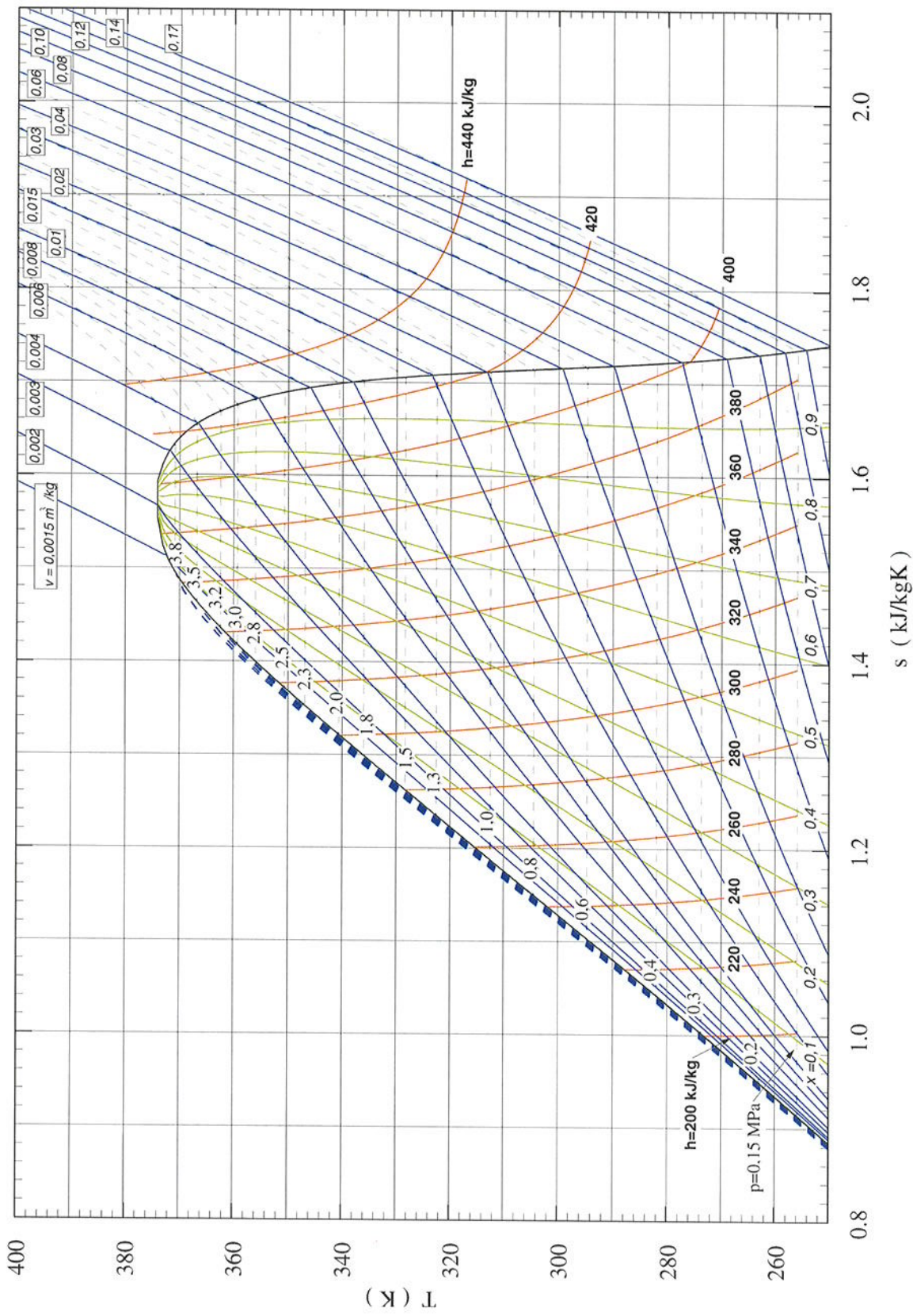
<http://web.uniud.it/dem/i0dida.htm>



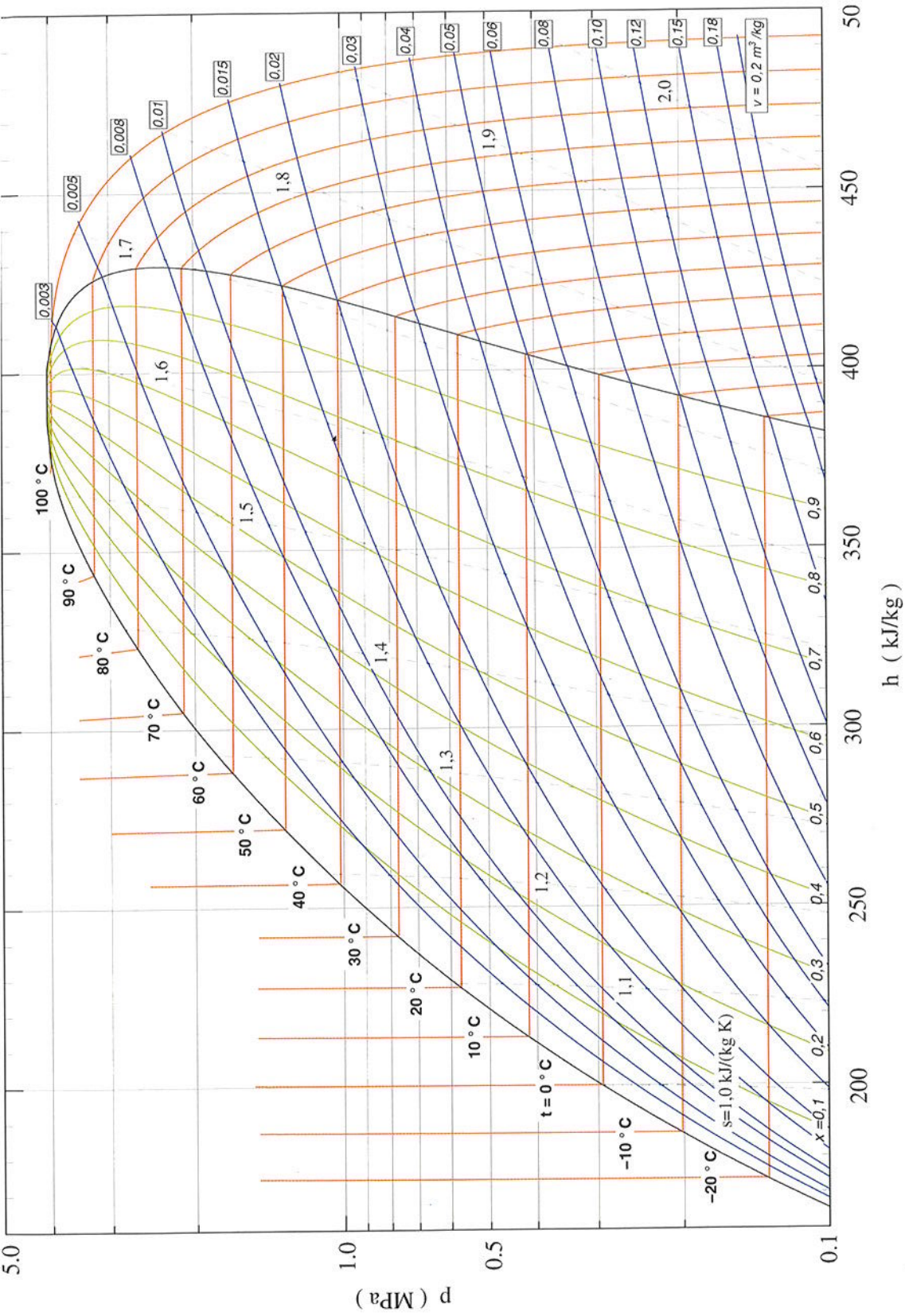
A.1 Diagramma ( $T, s$ ) dell'acqua.



A.2 Diagramma ( $h, s$ ) dell'acqua.

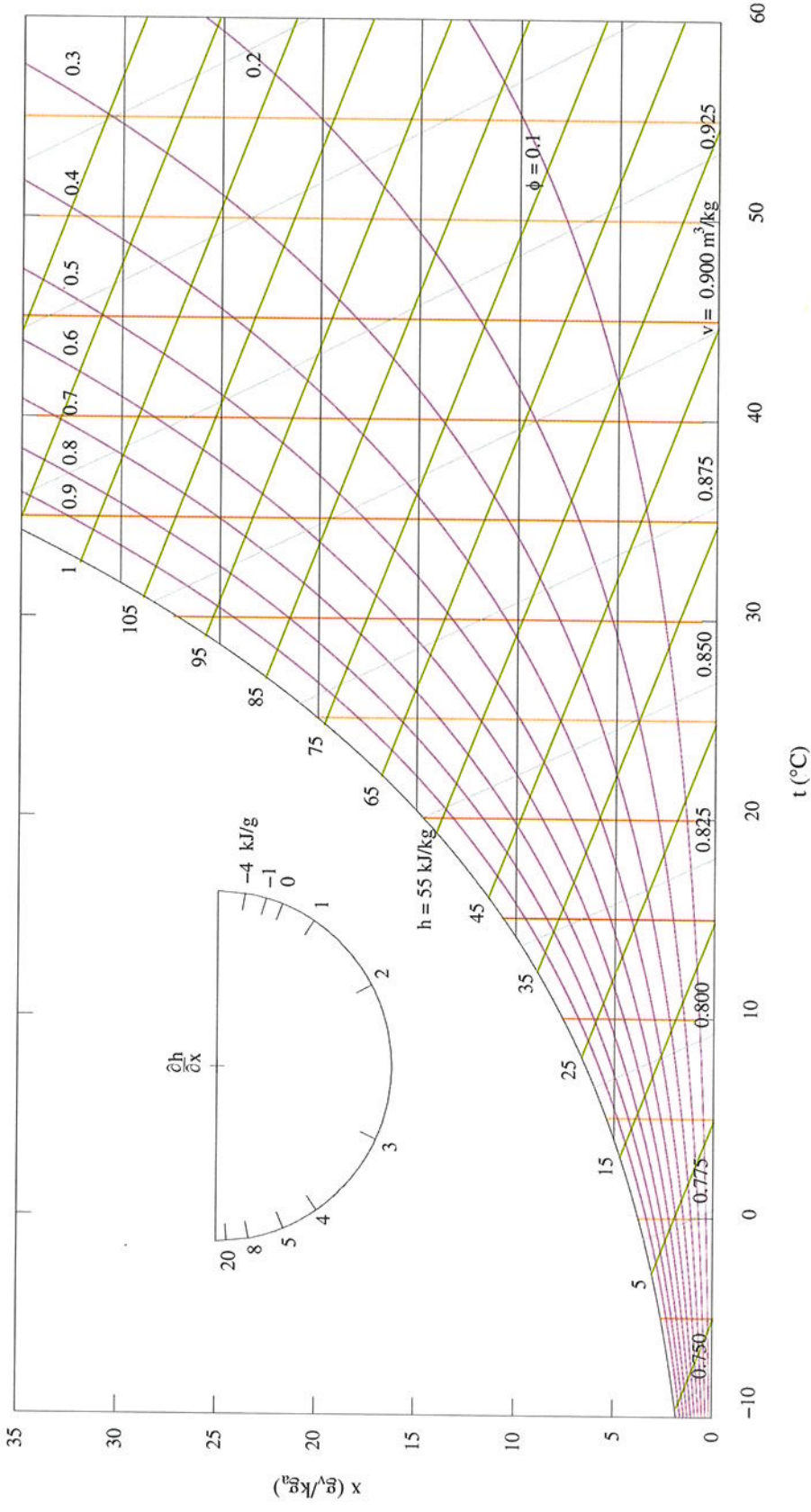


A.3 Diagramma ( $T, s$ ) del fluido refrigerante R134a.

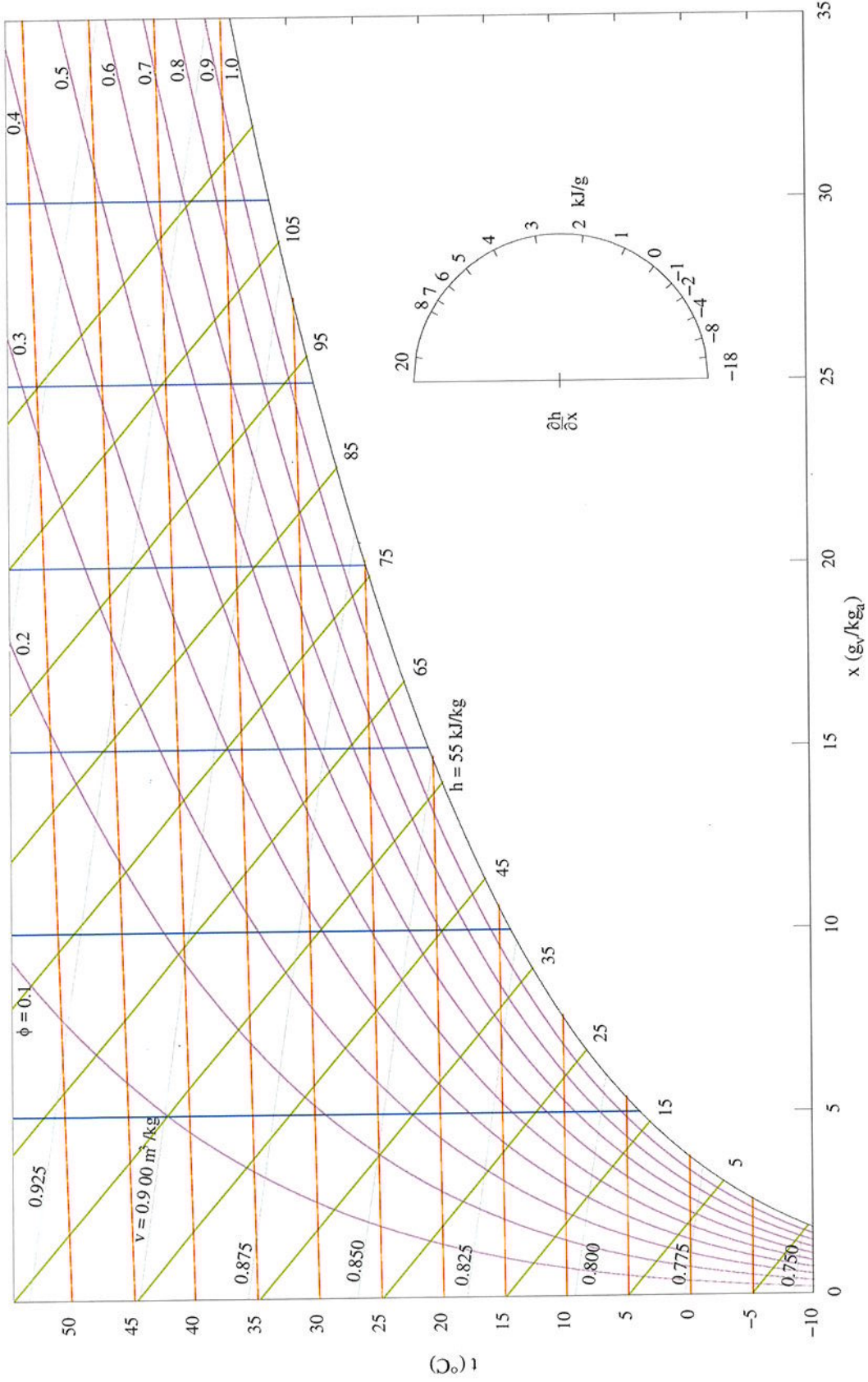


A.4 Diagramma ( $p, h$ ) del fluido frigorifero R134a.





A.5 Diagramma psicrometrico di Carrier.



**A.6** Diagramma psicrometrico di Mollier.

## A.7 Proprietà dell'acqua in condizioni di saturazione.

$t$ [°C]	$p$ [MPa]	$v_l$ [m <sup>3</sup> /kg]	$v_v$ [m <sup>3</sup> /kg]	$h_l$ [kJ/kg]	$h_v$ [kJ/kg]	$s_l$ [kJ/(kgK)]	$s_v$ [kJ/(kgK)]
.01	.00061	.99996E-03	.20574E+03	.14	2501.33	.00049	9.15333
10.00	.00123	.10005E-02	.10604E+03	42.03	2519.98	.14964	8.90000
20.00	.00235	.10020E-02	.57597E+02	84.09	2538.41	.29588	8.66717
30.00	.00426	.10045E-02	.32794E+02	126.11	2556.60	.43667	8.45324
40.00	.00740	.10079E-02	.19473E+02	167.39	2574.56	.57260	8.25647
50.00	.01237	.10121E-02	.12006E+02	209.63	2592.28	.70414	8.07523
60.00	.01998	.10171E-02	.76567E+01	251.78	2609.73	.83169	7.90804
70.00	.03124	.10227E-02	.50338E+01	293.82	2626.90	.95557	7.75349
80.00	.04747	.10290E-02	.34017E+01	335.79	2643.73	1.07606	7.61029
90.00	.07026	.10360E-02	.23567E+01	377.72	2660.17	1.19341	7.47726
100.00	.10153	.10436E-02	.16700E+01	419.67	2676.17	1.30781	7.35332
110.00	.14354	.10518E-02	.12080E+01	461.71	2691.64	1.41947	7.23746
120.00	.19891	.10606E-02	.89018E+00	503.90	2706.53	1.52774	7.12876
130.00	.27061	.10700E-02	.66722E+00	546.31	2720.74	1.63399	7.02640
140.00	.36198	.10801E-02	.50788E+00	588.98	2734.18	1.73824	6.92961
150.00	.47672	.10908E-02	.39205E+00	631.97	2746.78	1.84068	6.83770
160.00	.61890	.11022E-02	.30651E+00	675.30	2758.42	1.94149	6.75003
170.00	.79294	.11144E-02	.24242E+00	719.01	2769.00	2.04079	6.66605
180.00	1.00363	.11274E-02	.19375E+00	763.12	2778.43	2.13870	6.58523
190.00	1.25608	.11413E-02	.15632E+00	807.65	2786.59	2.23530	6.50709
200.00	1.55579	.11562E-02	.12719E+00	852.63	2793.35	2.33068	6.43118
210.00	1.90856	.11723E-02	.10429E+00	898.09	2798.61	2.42493	6.35711
220.00	2.32056	.11896E-02	.86093E-01	944.08	2802.21	2.51816	6.28447
230.00	2.79827	.12083E-02	.71501E-01	990.67	2804.03	2.61052	6.21289

## Proprietà dell'acqua in condizioni di saturazione.

$t$ [°C]	$p$ [MPa]	$v_l$ [m <sup>3</sup> /kg]	$v_v$ [m <sup>3</sup> /kg]	$h_l$ [kJ/kg]	$h_v$ [kJ/kg]	$s_l$ [kJ/(kgK)]	$s_v$ [kJ/(kgK)]
240.00	3.34850	.12287E-02	.59696E-01	1037.93	2803.90	2.70217	6.14197
250.00	3.97834	.12509E-02	.50066E-01	1085.99	2801.65	2.79334	6.07133
260.00	4.69528	.12753E-02	.42150E-01	1134.99	2797.05	2.88432	6.00053
270.00	5.50711	.13022E-02	.35593E-01	1185.11	2789.87	2.97543	5.92909
280.00	6.42185	.13321E-02	.30123E-01	1236.58	2779.80	3.06707	5.85642
290.00	7.44808	.13657E-02	.25527E-01	1289.66	2766.44	3.15968	5.78185
300.00	8.59488	.14038E-02	.21637E-01	1344.68	2749.28	3.25374	5.70448
310.00	9.87208	.14475E-02	.18318E-01	1402.00	2727.61	3.34977	5.62314
320.00	11.29059	.14988E-02	.15462E-01	1462.02	2700.41	3.44829	5.53622
330.00	12.86311	.15604E-02	.12977E-01	1525.40	2666.12	3.55013	5.44131
340.00	14.60427	.16375E-02	.10784E-01	1593.68	2622.22	3.65787	5.33464
350.00	16.53368	.17402E-02	.88035E-02	1669.77	2564.03	3.77561	5.20943
360.00	18.67483	.18946E-02	.69368E-02	1760.89	2481.05	3.91437	5.05069
370.00	21.06034	.22195E-02	.49295E-02	1895.52	2334.50	4.11768	4.80277
374.15	22.13211	.31550E-02	.31489E-02	2099.30	2099.30	4.42890	4.42890

## A.8 Proprietà dell'acqua in condizioni di vapore surriscaldato.

$p = 0.005$ [MPa]			$t_{sat} = 32.82$ [°C]			$p = 0.01$ [MPa]			$t_{sat} = 45.77$ [°C]		
$t$ [°C]	$v$ [m <sup>3</sup> /kg]	$h$ [kJ/kg]	$s$ [kJ/(kgK)]	$t_{sat}$	$v$ [m <sup>3</sup> /kg]	$h$ [kJ/kg]	$s$ [kJ/(kgK)]	$t$ [°C]	$v$ [m <sup>3</sup> /kg]	$h$ [kJ/kg]	$s$ [kJ/(kgK)]
$t_{sat}$	.28181E+02	2561.62	8.39680	$t_{sat}$	.14669E+02	2584.75	8.15072				
50	.29789E+02	2595.37	8.49679	50	.14865E+02	2595.06	8.17828				
100	.34430E+02	2688.73	8.76185	100	.17202E+02	2688.55	8.44368				
150	.39055E+02	2783.08	9.00295	150	.19520E+02	2782.96	8.68497				
200	.43674E+02	2878.90	9.22281	200	.21832E+02	2878.80	8.90493				
250	.48293E+02	2976.33	9.42396	250	.24143E+02	2976.24	9.10614				
300	.52911E+02	3075.43	9.60875	300	.26452E+02	3075.35	9.29096				
350	.57528E+02	3176.21	9.77933	350	.28761E+02	3176.14	9.46155				
400	.62145E+02	3278.68	9.93768	400	.31070E+02	3278.62	9.61991				
450	.66762E+02	3382.85	10.08560	450	.33379E+02	3382.79	9.76785				
500	.71379E+02	3488.70	10.22473	500	.35688E+02	3488.65	9.90697				
550	.75996E+02	3596.24	10.35651	550	.37997E+02	3596.20	10.03875				
600	.80613E+02	3705.47	10.48221	600	.40305E+02	3705.44	10.16445				
650	.85229E+02	3816.40	10.60293	650	.42614E+02	3816.37	10.28517				
700	.89846E+02	3929.01	10.71959	700	.44922E+02	3928.99	10.40184				
750	.94462E+02	4043.32	10.83295	750	.47231E+02	4043.30	10.51519				
800	.99079E+02	4159.32	10.94356	800	.49539E+02	4159.30	10.62580				
850	.10370E+03	4277.01	11.05183	850	.51847E+02	4276.99	10.73407				
900	.10831E+03	4396.39	11.15797	900	.54156E+02	4396.37	10.84022				
950	.11293E+03	4517.46	11.26203	950	.56464E+02	4517.45	10.94428				
1000	.11754E+03	4640.22	11.36388	1000	.58772E+02	4640.21	11.04613				

Proprietà dell'acqua in condizioni di vapore surriscaldato.

$p = 0.03$ [MPa]			$t_{sat} = 69.13$ [°C]			$p = 0.06$ [MPa]			$t_{sat} = 86.01$ [°C]		
$t$ [°C]	$v$ [m <sup>3</sup> /kg]	$h$ [kJ/kg]	$s$ [kJ/(kgK)]	$t_{sat}$	$v$ [m <sup>3</sup> /kg]	$h$ [kJ/kg]	$s$ [kJ/(kgK)]	$t$ [°C]	$v$ [m <sup>3</sup> /kg]	$h$ [kJ/kg]	$s$ [kJ/(kgK)]
$t_{sat}$	.52289E+01	2625.36	7.76702	$t_{sat}$	.27322E+01	2653.61	7.52965	$t_{sat}$	.27322E+01	2653.61	7.52965
100	.57169E+01	2686.52	7.93194	100	.28448E+01	2682.28	7.60365	100	.28448E+01	2682.28	7.60365
150	.64971E+01	2782.02	8.17497	150	.32411E+01	2780.23	7.84968	150	.32411E+01	2780.23	7.84968
200	.72708E+01	2878.25	8.39591	200	.36304E+01	2877.29	8.07227	200	.36304E+01	2877.29	8.07227
250	.80424E+01	2975.84	8.59766	250	.40173E+01	2975.20	8.27494	250	.40173E+01	2975.20	8.27494
300	.88133E+01	3075.02	8.78277	300	.44035E+01	3074.52	8.46057	300	.44035E+01	3074.52	8.46057
350	.95837E+01	3175.86	8.95354	350	.47893E+01	3175.42	8.63162	350	.47893E+01	3175.42	8.63162
400	.10354E+02	3278.37	9.11199	400	.51749E+01	3277.99	8.79023	400	.51749E+01	3277.99	8.79023
450	.11124E+02	3382.57	9.25997	450	.55603E+01	3382.23	8.93830	450	.55603E+01	3382.23	8.93830
500	.11894E+02	3488.45	9.39913	500	.59456E+01	3488.15	9.07751	500	.59456E+01	3488.15	9.07751
550	.12664E+02	3596.02	9.53092	550	.63308E+01	3595.76	9.20933	550	.63308E+01	3595.76	9.20933
600	.13434E+02	3705.28	9.65663	600	.67159E+01	3705.05	9.33505	600	.67159E+01	3705.05	9.33505
650	.14204E+02	3816.23	9.77736	650	.71009E+01	3816.03	9.45579	650	.71009E+01	3816.03	9.45579
700	.14973E+02	3928.87	9.89403	700	.74859E+01	3928.69	9.57246	700	.74859E+01	3928.69	9.57246
750	.15743E+02	4043.19	10.00738	750	.78708E+01	4043.04	9.68582	750	.78708E+01	4043.04	9.68582
800	.16512E+02	4159.21	10.11800	800	.82557E+01	4159.08	9.79643	800	.82557E+01	4159.08	9.79643
850	.17282E+02	4276.91	10.22626	850	.86406E+01	4276.80	9.90470	850	.86406E+01	4276.80	9.90470
900	.18051E+02	4396.30	10.33241	900	.90254E+01	4396.20	10.01085	900	.90254E+01	4396.20	10.01085
950	.18821E+02	4517.39	10.43647	950	.94102E+01	4517.29	10.11491	950	.94102E+01	4517.29	10.11491
1000	.19590E+02	4640.15	10.53832	1000	.97950E+01	4640.07	10.21676	1000	.97950E+01	4640.07	10.21676



Proprietà dell'acqua in condizioni di vapore surriscaldato.

$p = 0.6 \text{ [MPa]}$			$t_{\text{sat}} = 158.90 \text{ [}^\circ\text{C]}$			$p = 1 \text{ [MPa]}$			$t_{\text{sat}} = 179.87 \text{ [}^\circ\text{C]}$		
$t \text{ [}^\circ\text{C]}$	$v \text{ [m}^3\text{/kg]}$	$h \text{ [kJ/kg]}$	$s \text{ [kJ/(kgK)]}$	$t \text{ [}^\circ\text{C]}$	$v \text{ [m}^3\text{/kg]}$	$h \text{ [kJ/kg]}$	$s \text{ [kJ/(kgK)]}$	$t \text{ [}^\circ\text{C]}$	$v \text{ [m}^3\text{/kg]}$	$h \text{ [kJ/kg]}$	$s \text{ [kJ/(kgK)]}$
$t_{\text{sat}}$	.31566E+00	2757.15	6.75977	$t_{\text{sat}}$	.19442E+00	2778.29	6.58655	200	.20652E+00	2831.75	6.69166
200	.35293E+00	2854.16	6.96251	200	.23326E+00	2949.81	6.92680	250	.25822E+00	3056.79	7.13046
250	.39449E+00	2961.63	7.18283	250	.28252E+00	3161.18	7.31152	300	.30652E+00	3265.79	7.47569
300	.43467E+00	3064.69	7.37826	300	.33034E+00	3371.54	7.62685	350	.35402E+00	3478.74	7.76777
350	.47432E+00	3167.38	7.55475	350	.37760E+00	3587.47	7.90055	400	.40109E+00	3697.78	8.02680
400	.51369E+00	3271.04	7.71638	400	.42451E+00	3809.68	8.14783	450	.44788E+00	3923.16	8.26466
450	.55289E+00	3376.12	7.86613	450	.47119E+00	4038.24	8.37811	500	.49446E+00	4154.91	8.48878
500	.59196E+00	3482.76	8.00627	500	.51771E+00	4273.17	8.59707	550	.54092E+00	4393.02	8.70323
550	.63093E+00	3591.01	8.13861	550	.56411E+00	4514.46	8.80730	600	.58728E+00	4637.49	8.90916
600	.66981E+00	3700.88	8.26462	600				650			
650	.70862E+00	3812.39	8.38551	650				700			
700	.74737E+00	3925.52	8.50227	700				750			
750	.78607E+00	4040.29	8.61568	750				800			
800	.82473E+00	4156.68	8.72632	800				850			
850	.86336E+00	4274.71	8.83461	850				900			
900	.90196E+00	4394.37	8.94076	900				950			
950	.94054E+00	4515.66	9.04483	950				1000			
1000	.97910E+00	4638.59	9.14668	1000							



Proprietà dell'acqua in condizioni di vapore surriscaldato.

$p = 2$ [MPa]		$t_{sat} = 212.21$ [°C]		$p = 3$ [MPa]		$t_{sat} = 233.61$ [°C]	
$t$ [°C]	$v$ [m <sup>3</sup> /kg]	$h$ [kJ/kg]	$s$ [kJ/(kgK)]	$t$ [°C]	$v$ [m <sup>3</sup> /kg]	$h$ [kJ/kg]	$s$ [kJ/(kgK)]
$t_{sat}$	.99621E-01	2799.54	6.34117	$t_{sat}$	.66690E-01	2804.22	6.18745
250	.11187E+00	2913.37	6.54908	250	.70825E-01	2865.46	6.29185
300	.12574E+00	3034.65	6.77738	300	.81417E-01	3008.56	6.55069
350	.13864E+00	3144.80	6.97212	350	.90628E-01	3126.97	6.76240
400	.15113E+00	3252.29	7.14389	400	.99325E-01	3238.18	6.94359
450	.16342E+00	3359.90	7.29927	450	.10778E+00	3347.95	7.10419
500	.17557E+00	3468.55	7.44253	500	.11608E+00	3458.17	7.25036
550	.18760E+00	3578.53	7.57661	550	.12427E+00	3569.47	7.38605
600	.19955E+00	3689.96	7.70359	600	.13238E+00	3682.04	7.51392
650	.21143E+00	3802.86	7.82501	650	.14041E+00	3795.97	7.63585
700	.22326E+00	3917.24	7.94207	700	.14838E+00	3911.27	7.75318
750	.23503E+00	4033.10	8.05564	750	.15631E+00	4027.95	7.86691
800	.24677E+00	4150.46	8.16638	800	.16420E+00	4146.00	7.97773
850	.25847E+00	4269.30	8.27471	850	.17205E+00	4265.44	8.08611
900	.27014E+00	4389.63	8.38089	900	.17988E+00	4386.27	8.19232
950	.28179E+00	4511.45	8.48498	950	.18768E+00	4508.47	8.29641
1000	.29342E+00	4634.76	8.58684	1000	.19547E+00	4632.06	8.39828

Proprietà dell'acqua in condizioni di vapore surriscaldato.

$p = 5$ [MPa]			$t_{sat} = 263.71$ [°C]			$p = 7$ [MPa]			$t_{sat} = 285.76$ [°C]		
$t$ [°C]	$v$ [m <sup>3</sup> /kg]	$h$ [kJ/kg]	$s$ [kJ/(kgK)]	$t$ [°C]	$v$ [m <sup>3</sup> /kg]	$h$ [kJ/kg]	$s$ [kJ/(kgK)]	$t$ [°C]	$v$ [m <sup>3</sup> /kg]	$h$ [kJ/kg]	$s$ [kJ/(kgK)]
$t_{sat}$	.39457E-01	2794.73	5.97438	$t_{sat}$	.27378E-01	2772.59	5.81402	300	.29528E-01	2846.98	5.92635
300	.45527E-01	2941.18	6.21405	300	.29528E-01	2846.98	5.92635	350	.35407E-01	3035.27	6.24048
350	.52097E-01	3085.84	6.46982	350	.40012E-01	3173.75	6.47855	400	.44156E-01	3296.46	6.67074
400	.57842E-01	3207.78	6.67548	400	.48086E-01	3414.59	6.83445	450	.51889E-01	3531.85	6.97988
450	.63253E-01	3323.01	6.84968	450	.55599E-01	3649.44	7.11316	500	.59237E-01	3767.77	7.23809
500	.68487E-01	3436.82	7.00340	500	.62816E-01	3886.95	7.35709	550	.66346E-01	4007.05	7.47174
550	.73604E-01	3550.94	7.14327	550	.69837E-01	4128.07	7.58307	600	.73294E-01	4250.02	7.69174
600	.78632E-01	3665.93	7.27347	600	.76724E-01	4372.90	7.79811	650	.80132E-01	4496.70	7.90229
650	.83588E-01	3782.00	7.39669	650	.83520E-01	4621.44	8.00421	700			
700	.88486E-01	3899.20	7.51474	700				750			
750	.93336E-01	4017.55	7.62887	750				800			
800	.98145E-01	4137.06	7.73991	800				850			
850	.10292E+00	4257.73	7.84841	850				900			
900	.10767E+00	4379.56	7.95469	900				950			
950	.11240E+00	4502.55	8.05882	950				1000			
1000	.11710E+00	4626.71	8.16071	1000							

Proprietà dell'acqua in condizioni di vapore surriscaldato.

$p = 10$ [MPa]			$t_{sat} = 311.39$ [°C]			$p = 15$ [MPa]			$t_{sat} = 342.27$ [°C]		
$t$ [°C]	$v$ [m <sup>3</sup> /kg]	$h$ [kJ/kg]	$s$ [kJ/(kgK)]	$t_{sat}$ [°C]	$v$ [m <sup>3</sup> /kg]	$h$ [kJ/kg]	$s$ [kJ/(kgK)]	$t$ [°C]	$v$ [m <sup>3</sup> /kg]	$h$ [kJ/kg]	$s$ [kJ/(kgK)]
$t_{sat}$	.18006E-01	2724.28	5.61173	$t_{sat}$	.10339E-01	2610.70	5.30863	$t_{sat}$	.10339E-01	2610.70	5.30863
350	.22506E-01	2934.92	5.92882	350	.11371E-01	2682.93	5.40965	350	.11371E-01	2682.93	5.40965
400	.26531E-01	3113.68	6.23172	400	.15729E-01	2983.11	5.85958	400	.15729E-01	2983.11	5.85958
450	.29802E-01	3252.86	6.45992	450	.18548E-01	3168.05	6.16942	450	.18548E-01	3168.05	6.16942
500	.32777E-01	3379.38	6.64362	500	.20843E-01	3314.98	6.39845	500	.20843E-01	3314.98	6.39845
550	.35599E-01	3502.11	6.80015	550	.22923E-01	3449.32	6.58016	550	.22923E-01	3449.32	6.58016
600	.38323E-01	3623.96	6.93960	600	.24884E-01	3579.44	6.73359	600	.24884E-01	3579.44	6.73359
650	.40972E-01	3745.91	7.06795	650	.26766E-01	3708.09	6.86970	650	.26766E-01	3708.09	6.86970
700	.43563E-01	3868.25	7.18885	700	.28588E-01	3836.19	6.99492	700	.28588E-01	3836.19	6.99492
750	.46104E-01	3991.11	7.30456	750	.30360E-01	3964.03	7.11302	750	.30360E-01	3964.03	7.11302
800	.48605E-01	4114.51	7.41648	800	.32092E-01	4091.70	7.22627	800	.32092E-01	4091.70	7.22627
850	.51074E-01	4238.47	7.52547	850	.33791E-01	4219.25	7.33600	850	.33791E-01	4219.25	7.33600
900	.53515E-01	4362.98	7.63202	900	.35463E-01	4346.68	7.44295	900	.35463E-01	4346.68	7.44295
950	.55933E-01	4488.06	7.73630	950	.37111E-01	4473.99	7.54747	950	.37111E-01	4473.99	7.54747
1000	.58332E-01	4613.69	7.83828	1000	.38741E-01	4601.18	7.64957	1000	.38741E-01	4601.18	7.64957

A.9 Proprietà del fluido refrigerante R134a in condizioni di saturazione.

$t$ [°C]	$p$ [MPa]	$v_l$ [m <sup>3</sup> /kg]	$v_g$ [m <sup>3</sup> /kg]	$h_l$ [kJ/kg]	$h_g$ [kJ/kg]	$s_l$ [kJ/(kgK)]	$s_g$ [kJ/(kgK)]
-30.00	.08513	.72201E-03	.22402E+00	161.12	379.80	.84993	1.74930
-25.00	.10725	.72961E-03	.18029E+00	167.38	382.95	.87536	1.74406
-20.00	.13369	.73755E-03	.14649E+00	173.74	386.08	.90066	1.73945
-15.00	.16498	.74585E-03	.12007E+00	180.19	389.20	.92580	1.73542
-10.00	.20173	.75452E-03	.99209E-01	186.72	392.28	.95074	1.73191
-5.00	.24453	.76360E-03	.82576E-01	193.32	395.34	.97547	1.72885
.00	.29403	.77312E-03	.69193E-01	200.00	398.36	1.00000	1.72618
5.00	.35089	.78313E-03	.58334E-01	206.75	401.32	1.02433	1.72385
10.00	.41582	.79369E-03	.49451E-01	213.58	404.23	1.04848	1.72181
15.00	.48954	.80484E-03	.42131E-01	220.49	407.07	1.07247	1.71999
20.00	.57278	.81667E-03	.36055E-01	227.49	409.84	1.09633	1.71835
25.00	.66633	.82925E-03	.30977E-01	234.59	412.51	1.12007	1.71681
30.00	.77100	.84269E-03	.26707E-01	241.79	415.07	1.14373	1.71534
35.00	.88762	.85711E-03	.23094E-01	249.10	417.52	1.16733	1.71387
40.00	1.01705	.87266E-03	.20020E-01	256.54	419.82	1.19091	1.71233
45.00	1.16021	.88952E-03	.17389E-01	264.11	421.96	1.21449	1.71065
50.00	1.31804	.90791E-03	.15124E-01	271.83	423.92	1.23813	1.70876
55.00	1.49154	.92814E-03	.13166E-01	279.72	425.65	1.26186	1.70658
60.00	1.68176	.95059E-03	.11462E-01	287.79	427.13	1.28574	1.70399
65.00	1.89981	.97582E-03	.99704E-02	296.09	428.30	1.30986	1.70086
70.00	2.11691	1.0046E-02	.86571E-02	304.64	429.11	1.33431	1.69703
75.00	2.36438	1.0380E-02	.74914E-02	313.51	429.45	1.35924	1.69225
80.00	2.63367	1.0780E-02	.64462E-02	322.79	429.19	1.38490	1.68617
85.00	2.92648	1.1279E-02	.54948E-02	332.64	428.08	1.41168	1.67816
90.00	3.24484	1.1945E-02	.46063E-02	343.38	425.68	1.44042	1.66704
95.00	3.59144	1.2971E-02	.37294E-02	355.83	420.82	1.47330	1.64982
100.00	3.97083	1.5667E-02	.26732E-02	375.14	408.07	1.52391	1.61216
101.15	4.06400	1.9685E-02	.19685E-02	391.00	391.00	1.56580	1.56580

**A.10** Proprietà del fluido refrigerante R134a in condizioni di vapore surriscaldato.

$p = 0.1$ [MPa]				$p = 0.15$ [MPa]			
$t_{sat} = -26.54$ [°C]				$t_{sat} = -17.29$ [°C]			
$t$ [°C]	$v$ [m <sup>3</sup> /kg]	$h$ [kJ/kg]	$s$ [kJ/(kgK)]	$t$ [°C]	$v$ [m <sup>3</sup> /kg]	$h$ [kJ/kg]	$s$ [kJ/(kgK)]
$t_{sat}$	.19256E+00	381.98	1.74560	$t_{sat}$	.13144E+00	387.77	1.73721
-10	.19860E+00	387.22	1.76655	-10	.15389E+00	393.80	1.76526
-10	.20765E+00	395.27	1.79775	0	.16077E+00	402.16	1.79643
0	.21652E+00	403.41	1.82813	10	.16751E+00	410.58	1.82671
10	.22527E+00	411.67	1.85780	20	.17414E+00	419.10	1.85626
20	.23392E+00	420.05	1.88689	30	.18070E+00	427.72	1.88518
30	.24250E+00	428.56	1.91545	40	.18718E+00	436.47	1.91356
40	.25101E+00	437.22	1.94355	50	.19362E+00	445.34	1.94147
50	.25948E+00	446.03	1.97123	60	.20002E+00	454.36	1.96895
60	.26791E+00	454.99	1.99853	70	.20638E+00	463.52	1.99604
70	.27631E+00	464.10	2.02547	80	.21272E+00	472.83	2.02277
80	.28468E+00	473.36	2.05208	90	.21903E+00	482.28	2.04917
90	.29302E+00	482.78	2.07837	100	.22533E+00	491.89	2.07526
100	.30135E+00	492.35	2.10437	110	.23161E+00	501.64	2.10105
110	.30967E+00	502.07	2.13009	120	.23787E+00	511.54	2.12657
120	.31797E+00	511.95	2.15554	130	.24413E+00	521.60	2.15181
130	.32626E+00	521.98	2.18074	140	.25037E+00	531.80	2.17681
140	.33454E+00	532.16	2.20568	150	.25660E+00	542.15	2.20156
150	.34281E+00	542.49	2.23039	160	.26283E+00	552.64	2.22607
160	.35107E+00	552.97	2.25487	170	.26904E+00	563.28	2.25037
170	.35932E+00	563.60	2.27912				

Proprietà del fluido refrigerante R134a in condizioni di vapore surriscaldato.

$p = 0.2$ [MPa]		$t_{sat} = -10.22$ [°C]		$p = 0.3$ [MPa]		$t_{sat} = 0.55$ [°C]	
$t$ [°C]	$v$ [m <sup>3</sup> /kg]	$h$ [kJ/kg]	$s$ [kJ/(kgK)]	$t$ [°C]	$v$ [m <sup>3</sup> /kg]	$h$ [kJ/kg]	$s$ [kJ/(kgK)]
$t_{sat}$	.10005E+00	392.15	1.73205	$t_{sat}$	.67887E-01	398.69	1.72591
-10	.10013E+00	392.34	1.73276				
0	.10501E+00	400.91	1.76474				
10	.10974E+00	409.50	1.79562	10	.71110E-01	407.17	1.75637
20	.11436E+00	418.15	1.82563	20	.74415E-01	416.12	1.78744
30	.11889E+00	426.87	1.85491	30	.77620E-01	425.10	1.81754
40	.12335E+00	435.71	1.88357	40	.80748E-01	434.12	1.84684
50	.12776E+00	444.66	1.91171	50	.83816E-01	443.23	1.87547
60	.13213E+00	453.74	1.93937	60	.86838E-01	452.44	1.90354
70	.13646E+00	462.95	1.96661	70	.89821E-01	461.76	1.93110
80	.14076E+00	472.30	1.99346	80	.92774E-01	471.21	1.95823
90	.14504E+00	481.79	2.01997	90	.95702E-01	480.78	1.98495
100	.14930E+00	491.42	2.04614	100	.98609E-01	490.48	2.01131
110	.15355E+00	501.21	2.07201	110	.10150E+00	500.32	2.03734
120	.15777E+00	511.13	2.09759	120	.10437E+00	510.30	2.06305
130	.16199E+00	521.21	2.12289	130	.10723E+00	520.43	2.08848
140	.16620E+00	531.43	2.14794	140	.11008E+00	530.69	2.11362
150	.17039E+00	541.80	2.17273	150	.11292E+00	541.09	2.13850
160	.17458E+00	552.31	2.19728	160	.11575E+00	551.64	2.16314
170	.17876E+00	562.97	2.22161	170	.11858E+00	562.33	2.18753











**A.11** Proprietà termodinamiche dell'aria standard alla pressione di 101,325 kPa.

$T$ [K]	$c_p$ [kJ/(kgK)]	$c_v$ [kJ/(kgK)]	$h$ [kJ/kg]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$s$ [kJ/(kgK)]
298.15	1.0135	.7253	0	1.179	6.888
300	1.0136	.7254	1.9	1.172	6.894
350	1.0147	.7265	52.6	1.005	7.051
400	1.0181	.7299	103.4	.879	7.186
450	1.0255	.7373	154.5	.781	7.307
500	1.0357	.7475	206.0	.703	7.415
550	1.0475	.7593	258.1	.639	7.515
600	1.0602	.7720	310.7	.586	7.606
650	1.0729	.7848	364.1	.541	7.692
700	1.0855	.7973	418.0	.502	7.772
750	1.0977	.8095	472.6	.469	7.847
800	1.1094	.8212	527.8	.439	7.918
850	1.1204	.8322	583.6	.414	7.986
900	1.1309	.8427	639.8	.391	8.050
950	1.1408	.8526	696.6	.370	8.111
1000	1.1500	.8618	753.9	.352	8.170
1050	1.1588	.8706	811.6	.335	8.227
1100	1.1670	.8788	869.8	.320	8.281
1150	1.1747	.8865	928.3	.306	8.333
1200	1.1820	.8938	987.2	.293	8.383
1250	1.1889	.9007	1046.5	.281	8.431
1300	1.1954	.9072	1106.1	.270	8.478
1350	1.2015	.9133	1166.0	.260	8.523
1400	1.2073	.9191	1226.3	.251	8.567
1450	1.2128	.9246	1286.8	.242	8.609
1500	1.2180	.9298	1347.5	.234	8.651
1550	1.2230	.9348	1408.6	.227	8.691
1600	1.2277	.9395	1469.8	.220	8.730
1650	1.2322	.9440	1531.3	.213	8.767
1700	1.2364	.9483	1593.0	.207	8.804

**A.12** Proprietà termodinamiche dei prodotti della combustione di metano in aria standard alla pressione di 0,1 MPa. I valori dell'entalpia sono riferiti alla base di 25 °C e 101,325 kPa (a cui sono posti uguali a zero i valori dell'entalpia dei singoli elementi: carbonio, ossigeno, idrogeno ed azoto). Le entropie, riferite alla temperatura di 0 K sono entropie assolute.

$\varepsilon = 0$								$\varepsilon = 1$							
$\text{CO}_2 = 0.0951, \text{H}_2\text{O} = 0.1901, \text{N}_2 = 0.7148$								$\text{CO}_2 = 0.0499, \text{H}_2\text{O} = 0.0998, \text{O}_2 = 0.0998, \text{N}_2 = 0.7505$							
$T$ [K]	$c_p$ [kJ/(kgK)]	$c_v$ [kJ/(kgK)]	$h$ [kJ/kg]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$s$ [kJ/(kgK)]	$T$ [K]	$c_p$ [kJ/(kgK)]	$c_v$ [kJ/(kgK)]	$h$ [kJ/kg]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$s$ [kJ/(kgK)]				
298.15	1.1138	.8129	-3011.6	1.115	7.230	298.15	1.0651	.7704	-1548.5	1.138	7.116				
300	1.1143	.8134	-3009.5	1.108	7.236	300	1.0654	.7706	-1546.5	1.131	7.123				
400	1.1323	.8314	-2897.2	.831	7.559	400	1.0768	.7821	-1439.5	.848	7.431				
500	1.1593	.8584	-2782.7	.665	7.815	500	1.0993	.8045	-1330.8	.679	7.673				
600	1.1928	.8919	-2665.1	.554	8.029	600	1.1284	.8336	-1219.4	.566	7.876				
700	1.2272	.9263	-2544.1	.475	8.216	700	1.1584	.8637	-1105.1	.485	8.052				
800	1.2601	.9592	-2419.8	.415	8.382	800	1.1868	.8921	-987.8	.424	8.209				
900	1.2904	.9895	-2292.2	.369	8.532	900	1.2129	.9182	-867.8	.377	8.350				
1000	1.3181	1.0172	-2161.8	.332	8.669	1000	1.2365	.9417	-745.3	.339	8.479				
1100	1.3432	1.0423	-2028.7	.302	8.796	1100	1.2576	.9629	-620.6	.308	8.598				
1200	1.3660	1.0651	-1893.2	.277	8.914	1200	1.2766	.9819	-493.8	.283	8.708				
1300	1.3866	1.0857	-1755.6	.256	9.024	1300	1.2937	.9990	-365.3	.261	8.811				
1400	1.4053	1.1044	-1615.9	.237	9.128	1400	1.3091	1.0144	-235.2	.242	8.908				
1500	1.4223	1.1214	-1474.6	.222	9.225	1500	1.3231	1.0283	-103.5	.226	8.998				
1600	1.4378	1.1369	-1331.5	.208	9.317	1600	1.3357	1.0410	29.4	.212	9.084				
1700	1.4519	1.1510	-1187.0	.196	9.405	1700	1.3472	1.0525	163.6	.200	9.166				

Prodotti della combustione di metano in aria standard alla pressione di 0,1 MPa.

$\varepsilon = 2$							$\varepsilon = 3$						
$\text{CO}_2 = 0.0338, \text{H}_2\text{O} = 0.0677, \text{O}_2 = 0.1353, \text{N}_2 = 0.7632$							$\text{CO}_2 = 0.0256, \text{H}_2\text{O} = 0.0512, \text{O}_2 = 0.1535, \text{N}_2 = 0.7697$						
$T$ [K]	$c_p$ [kJ/(kgK)]	$c_v$ [kJ/(kgK)]	$h$ [kJ/kg]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$s$ [kJ/(kgK)]		$T$ [K]	$c_p$ [kJ/(kgK)]	$c_v$ [kJ/(kgK)]	$h$ [kJ/kg]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$s$ [kJ/(kgK)]	
298.15	1.0482	.7556	-1042.2	1.146	7.057		298.15	1.0397	.7482	-785.4	1.151	7.024	
300	1.0484	.7559	-1040.3	1.139	7.064		300	1.0399	.7484	-783.5	1.144	7.030	
400	1.0576	.7650	-935.0	.854	7.366		400	1.0479	.7564	-679.1	.858	7.330	
500	1.0785	.7859	-828.3	.684	7.604		500	1.0679	.7764	-573.4	.686	7.566	
600	1.1061	.8135	-719.1	.570	7.803		600	1.0947	.8032	-465.3	.572	7.763	
700	1.1346	.8420	-607.1	.488	7.976		700	1.1225	.8310	-354.5	.490	7.934	
800	1.1615	.8689	-492.2	.427	8.129		800	1.1487	.8572	-240.9	.429	8.085	
900	1.1861	.8935	-374.8	.380	8.268		900	1.1725	.8810	-124.8	.381	8.222	
1000	1.2082	.9156	-255.1	.342	8.394		1000	1.1939	.9024	-6.5	.343	8.347	
1100	1.2280	.9354	-133.3	.311	8.510		1100	1.2130	.9214	113.9	.312	8.461	
1200	1.2457	.9531	-9.6	.285	8.617		1200	1.2300	.9385	236.0	.286	8.568	
1300	1.2615	.9690	115.8	.263	8.718		1300	1.2452	.9537	359.8	.264	8.667	
1400	1.2758	.9832	242.7	.244	8.812		1400	1.2589	.9674	485.0	.245	8.760	
1500	1.2887	.9961	370.9	.228	8.900		1500	1.2713	.9798	611.6	.229	8.847	
1600	1.3004	1.0078	500.4	.214	8.984		1600	1.2825	.9910	739.3	.214	8.929	
1700	1.3110	1.0184	631.0	.201	9.063		1700	1.2926	1.0011	868.0	.202	9.007	

Prodotti della combustione di metano in aria standard alla pressione di 0,1 MPa.

$\varepsilon = 4$							$\varepsilon = 5$						
$\text{CO}_2 = 0.0206, \text{H}_2\text{O} = 0.0411, \text{O}_2 = 0.1646, \text{N}_2 = 0.7737$							$\text{CO}_2 = 0.0172, \text{H}_2\text{O} = 0.0344, \text{O}_2 = 0.1721, \text{N}_2 = 0.7763$						
$T$ [K]	$c_p$ [kJ/(kgK)]	$c_v$ [kJ/(kgK)]	$h$ [kJ/kg]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$s$ [kJ/(kgK)]		$T$ [K]	$c_p$ [kJ/(kgK)]	$c_v$ [kJ/(kgK)]	$h$ [kJ/kg]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$s$ [kJ/(kgK)]	
298.15	1.0345	.7436	-630.1	1.153	7.002		298.15	1.0310	.7406	-526.1	1.155	6.987	
300	1.0347	.7438	-628.2	1.146	7.008		300	1.0312	.7408	-524.2	1.148	6.993	
400	1.0420	.7512	-524.4	.860	7.307		400	1.0381	.7477	-420.8	.861	7.290	
500	1.0616	.7707	-419.4	.688	7.541		500	1.0573	.7669	-316.1	.689	7.524	
600	1.0879	.7971	-311.9	.573	7.737		600	1.0833	.7929	-209.1	.574	7.719	
700	1.1152	.8243	-201.7	.491	7.907		700	1.1103	.8199	-99.4	.492	7.888	
800	1.1409	.8500	-88.9	.430	8.057		800	1.1357	.8453	12.9	.430	8.038	
900	1.1643	.8734	26.4	.382	8.193		900	1.1588	.8684	127.6	.383	8.173	
1000	1.1852	.8944	143.8	.344	8.317		1000	1.1794	.8890	244.5	.344	8.296	
1100	1.2039	.9130	263.3	.313	8.431		1100	1.1978	.9074	363.4	.313	8.410	
1200	1.2205	.9297	384.6	.287	8.536		1200	1.2142	.9237	484.0	.287	8.514	
1300	1.2354	.9445	507.4	.264	8.635		1300	1.2288	.9384	606.2	.265	8.612	
1400	1.2487	.9579	631.6	.246	8.727		1400	1.2419	.9515	729.7	.246	8.704	
1500	1.2608	.9699	757.1	.229	8.813		1500	1.2537	.9633	854.5	.230	8.790	
1600	1.2716	.9808	883.7	.215	8.895		1600	1.2644	.9740	980.4	.215	8.871	
1700	1.2815	.9907	1011.4	.202	8.972		1700	1.2741	.9837	1107.4	.203	8.948	

**A.13 Calori specifici a pressione costante dei gas ideali**

Le variazioni con la temperatura dei calori specifici nei gas ideali possono essere stimate anche mediante formule empiriche. Ad esempio, per alcuni gas e miscele di gas di interesse tecnico nel campo di temperature compreso tra 273,16 e 1500 K, si hanno le relazioni seguenti.

**Vapor d'acqua**

$$c_p = 4,614 - \frac{103}{\sqrt{T}} + \frac{967}{T} \quad \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}$$

**Anidride carbonica**

$$c_p = 1,54 - \frac{345}{T} + \frac{41400}{T^2} \quad \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}$$

**Aria**

$$c_p = 0,917 + 2,58 \cdot 10^{-4} T - 3,97 \cdot 10^{-8} T^2 \quad \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}$$

**Metano**

$$c_p = 0,883 + 47,1 \cdot 10^{-4} T - 112 \cdot 10^{-8} T^2 \quad \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}$$

**Ossigeno**

$$c_p = 1,51 - \frac{16,77}{\sqrt{T}} + \frac{111}{T} \quad \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}$$

**A.14** Valori medi dei calori specifici a pressione costante

I valori medi, in un intervallo di temperature, dei calori specifici a pressione costante possono essere stimati in base alla definizione

$$\bar{c}_p \equiv \left( \frac{\Delta h}{\Delta T} \right)_p$$

ed ai valori delle entalpie riportati nelle tabelle o ricavati dai diagrammi termodinamici.

Ad esempio, per calcolare il calore specifico medio dei prodotti della combustione di metano in aria standard, con eccesso d'aria del 100% e nell'intervallo di temperature compreso tra 1200 e 700 K, si può fare riferimento alla Tabella A.12 (seconda entrata). Si ottiene così

$$\bar{c}_p \equiv \left( \frac{\Delta h}{\Delta T} \right)_p = \frac{-493,8 - (-1105,1)}{1200 - 700} = 1,22 \quad \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}$$

La stessa procedura, con ovvie modifiche, può essere estesa alla determinazione dei calori specifici dei fumi in altre situazioni di interesse tecnico.



---

## BIBLIOGRAFIA

---

- M.M. Abbott e H.C. Van Ness**, *Termodinamica*, Collana Schaum, ETAS Libri, Milano, 1982.
- G. Alfano e V. Betta**, *Fisica Tecnica: Termodinamica Applicata, Principi d'Impianti Tecnici*, Liguori, Napoli, 1989.
- A. Bejan**, *Advanced Engineering Thermodynamics*, Wiley, New York, 1988.
- A. Boeche, A. Cavallini e S. Del Giudice**, *Problemi di Termodinamica Applicata*, CLEUP, Padova, 1994.
- L. Borel**, *Thermodynamique et Énergétique*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Losanna, 1991.
- A. Cavallini e L. Mattarolo**, *Termodinamica Applicata*, CLEUP, Padova, 1988.
- A. Cavallini e M. Sovrano**, *Gasdinamica*, Patron, Bologna, 1973.
- A. Cocchi**, *Elementi di Termofisica Generale ed Applicata*, Progetto Leonardo, Bologna, 1990.
- G. Comini**, *Misure di Temperatura*, CLEUP, Padova, 1973.
- G. Comini**, *Fondamenti di Misure Meccaniche e Termiche*, CLEUP, Padova, 1974.
- T.D. Eastop ed A. McConkey**, *Applied Thermodynamics for Engineering Technologists*, Longman, Harlow, Gran Bretagna, 1986.
- R.W. Fox ed A.T. McDonald**, *Introduction to Fluid Mechanics*, Wiley, New York, 1994.
- R.W. Haywood**, *Analysis of Engineering Cycles*, Pergamon, Oxford, 1985.
- J.P. Holman**, *Thermodynamics*, McGraw-Hill, New York, 1988.
- R. Mastrullo, P. Mazzei e R. Vanoli**, *Fondamenti di Energetica*, Liguori, Napoli, 1992.

- R. Mastrullo, P. Mazzei e R. Vanoli**, *Termodinamica per Ingegneri*, Li-  
guori, Napoli, 1996.
- M.J. Moran e H.N. Shapiro**, *Fundamentals of Engineering Thermodyna-  
mics*, Wiley, New York, 1995.
- E.F. Obert e R.L. Young**, *Elements of Thermodynamics and Heat  
Transfer*, McGraw-Hill, New York, 1962.
- C. Pizzetti**, *Condizionamento dell'Aria e Refrigerazione*, Masson Italia,  
Milano, 1987.
- G. Rogers e Y. Mahew**, *Engineering Thermodynamics Work and Heat  
Transfer*, Longman, Harlow, Gran Bretagna, 1992.
- L. D. Russel e G.A. Adebisi**, *Classical Thermodynamics*, Saunders College  
Publishing, Orlando, Florida, 1993.
- W.F. Stoecker e J.W. Jones**, *Refrigeration and Air Conditioning*,  
McGraw-Hill, Auckland, 1982.
- G. Van Wylen, R. Sonntag e C. Borgnakke**, *Fundamentals of Classical  
Thermodynamics*, Wiley, New York, 1994.
- K. Wark**, *Thermodynamics*, McGraw-Hill, New York, 1971.
- K. Wark, Jr.**, *Advanced Thermodynamics for Engineers*, McGraw-Hill,  
New York, 1995.
- M.W. Zemansky, M.M. Abbott e H.C. Van Ness**, *Fondamenti di Termo-  
dinamica per Ingegneri*, Zanichelli, Bologna, 1982.
- M.W. Zemansky e R.H. Dittman**, *Heat and Thermodynamics*, McGraw -  
Hill, Auckland, 1981.

---

## INDICE ANALITICO

---

### Aeriformi

- energia interna, 209
- entalpia, 208
- entropia, 204
- proprietà termodinamiche, 203

### Analisi dei fumi, 323

### Aria standard, 318

### Aria secca, 223

### Aria umida

- calore specifico a pressione costante, 239
- condizionamento, 264
- diagramma ASHRAE, 244
- diagramma di Carrier, 239
- diagramma di Mollier, 242
- entalpia dell'aria umida, 237
- mescolamento adiabatico, 249
- raffreddamento con deumidificazione, 258
- raffreddamento e riscaldamento, 256
- raffreddamento evaporativo, 261
- temperatura di bulbo bagnato, 246

temperatura di bulbo secco, 246

temperatura di rugiada, 245

temperatura di saturazione adiabatica, 248

umidificazione adiabatica, 252

umidificazione a vapore, 254

umidità relativa, 236

umidità specifica, 235

### Bilancio dell'energia meccanica

relazione con il primo principio, 97

sistemi chiusi, 30

sistemi a deflusso monodimensionale stazionario, 34

### Bilancio di entropia

sistemi chiusi, 100

sistemi aperti, 104

### Bilancio di exergia

sistemi chiusi, 280

sistemi aperti, 290

### Calore

di condensazione, 181

di fusione, 184

di vaporizzazione, 181

scambi di, 23

## Calori specifici

- a pressione costante, 71
- a volume costante, 70
- definizione generale, 69
- interpretazione geometrica, 94
- molari, 72
- sostanze incompressibili, 71
- trasformazioni politropiche, 151
- variazioni con la pressione, 116
- variazioni con il volume specifico, 116

## Carnot

- ciclo, vedi: "Ciclo di Carnot"
- teorema di, 84

## Cicli a pompa di calore, vedi:

- "Cicli inversi a vapore"

## Cicli bitermici

- diretti reversibili ad aria, 418
- reversibili ed irreversibili, 82

## Cicli diretti a vapore

- a risurriscaldamento, 440
- a vapore saturo, 427
- a vapore surriscaldato, 435
- generalità, 425
- influenza delle irreversibilità, 431
- miglioramenti, 433, 439
- rigenerativi con scambiatore a miscela, 446

rigenerativi con scambiatore a superficie, 451

rigenerativi ideali, 444

rigenerativi pratici, 454

## Cicli frigoriferi, vedi:

"Cicli inversi a vapore"

## Cicli inversi ad assorbimento, ve-

di: "Macchine ad assorbimento"

## Cicli inversi tritermici, vedi:

"Macchine ad assorbimento"

## Cicli inversi a vapore

a compressione, 461-465

a doppia compressione e doppia laminazione, 498

a pompa di calore standard, 476

con rigenerazione, 492

frigoriferi per basse temperature, 497

frigoriferi standard, 473

influenza delle irreversibilità esterne, 479

standard, 469

## Ciclo di Carnot

diretto, 84

effetto utile frigorifero, 87

effetto utile pompa di calore, 87

inverso, 87

rendimento, 86

- sul diagramma pressione - volume specifico, 142
  - sul diagramma temperatura - entropia specifica, 95
- Ciclo Diesel
  - analisi exergetica, 414
  - generalità, 407
  - lavoro, 411
  - rendimento, 408, 410
- Ciclo Ericsson
  - generalità, 418
  - rendimento, 419
- Ciclo Joule
  - con espandione e compressione in più stadi, 383
  - ideale, 363
  - influenza delle irreversibilità, 371
  - lavoro netto, 367, 371
  - rendimento, 364, 373, 379, 380, 381, 382
  - rigenerativo, 378, 381
  - schematizzazione, 361
- Ciclo misto
  - generalità, 406
  - rendimento, 417
- Ciclo Otto
  - analisi exergetica, 404
  - generalità, 397
  - lavoro, 401
  - rendimento, 398, 400
- Ciclo Rankine, vedi: "Cicli a vapore diretti"
- Ciclo Stirling
  - generalità, 420
  - rendimento, 422
- Coefficiente di effetto utile
  - cicli ad assorbimento, 511
  - cicli a pompa di calore, 66
  - cicli a pompa di calore bitermici, 309
  - cicli frigoriferi, 66
- Combustione
  - analisi dei fumi, 323
  - eccesso d'aria, 322
  - temperatura dei fumi, 336
  - temperatura di combustione adiabatica, 336
- Compressori alternativi
  - cicli, 168
  - rendimento volumetrico, 170
- Condizionamento dell'aria
  - estivo, 271
  - generalità, 264
  - invernale, 268
  - schema d'impianto, 265
- Conservazione dell'energia, vedi: "Primo principio"
- Conservazione della massa, 25
- Deflusso isoentropico
  - condotti a sezione variabile, 531

- espansori ideali, 535
- espansori reali, 542
- Densità
  - critica, 534
  - di ristagno, 529
- Diagramma ASHRAE, 244
- Diagramma di Carrier, 239
- Diagramma di Mollier dell'aria umida, 242
- Diagrammi termodinamici
  - entalpia ed entropia specifiche, 200
  - generalità, 196
  - pressione, volume specifico e temperatura, 174
  - pressione e temperatura, 177
  - pressione e volume specifico, 178
  - pressione ed entalpia specifica, 201
  - temperatura ed entropia specifica, 198
- Disuguaglianza di Clausius, 92
- Eccesso d'aria, 322
- Energia globale, 50, 53
- Energia interna
  - aeriformi, 209
  - definizione, 51
  - gas ideali, 121
  - in funzione di temperatura e volume specifico, 114
  - molare, 73
  - sostanze incompressibili, 72
- Energia libera di Helmholtz, 110
- Energia utilizzabile:
  - vedi "Exergia"
- Entalpia
  - aeriformi, 208
  - definizione, 54
  - di ristagno, 527
  - gas ideali, 122
  - in funzione di temperatura e pressione, 115
  - molare, 73
  - sostanze incompressibili, 72
- Entalpia libera di Gibbs, 110
- Entropia
  - aeriformi, 204
  - definizione, 90
  - gas ideali, 129
  - in funzione di temperatura e pressione, 114
  - in funzione di temperatura e volume specifico, 113
  - molare, 91
  - sostanze incompressibili, 97
- Equazione di Bernoulli, 37
- Equazione di Clausius-Clapeyron, 180
- Equazioni di Maxwell, vedi: "Relazioni di Maxwell"
- Equazioni di stato

- gas ideali, 119
- Lee-Kesler, 195
- miscele di gas ideali, 211
- Van der Waals, 193
- viriale, 194
- Espansori, vedi: "Deflusso isoentropico"
- Exergia
  - analisi exergetica di cicli bitermici e tritermici: vedi "Rendimenti exergetici"
  - analisi exergetica di impianti: vedi "Impianti"
  - di un fluido, 283, 295
  - perdite negli scambi termici irreversibili, 288
  - rappresentazione grafica, 297
  - scambi di exergia associati agli scambi di calore, 286
  - sistemi aperti, 290
  - sistemi chiusi, 280
- Fattore di attrito, 44
- Fattore di comprimibilità, 188
- Fluidi frigoriferi, 504
- Gas ideali
  - calori specifici, 126
  - costante del gas, 121
  - costante universale, 120
  - energia interna, 121
  - entalpia, 122
  - entropia, 129
  - equazione di stato, 119
  - trasformazioni isobare, 133
  - trasformazioni isocore, 131
  - trasformazioni isoentropiche, 137
  - trasformazioni isoterme, 134
  - trasformazioni politropiche, 147
- Gas reali ed aeriformi,
  - equazione del viriale, 194
  - equazione di Lee-Kesler, 195
  - equazione di Van der Waals, 193
  - fattore di comprimibilità, 188
  - proprietà termodinamiche, 203
- Grandezze
  - di stato, 21
  - di scambio, 23
  - estensive ed intensive, 22
  - potenziali, 23
- Impianti a compressione di vapore
  - analisi exergetica di un frigorifero, 481, 484
  - analisi exergetica di una pompa di calore, 487, 489
- Impianti ad assorbimento, vedi: "Macchine ad assorbimento"
- Impianti con turbina a gas
  - analisi exergetica, 387, 391
  - generalità, 385

- rendimento di conversione, 386
- Impianti con turbina a vapore
  - analisi exergetica, 459
  - rendimento di conversione, 458
- Impianti di compressione dei gas, 163
- Impianti frigoriferi, vedi
  - “Impianti a compressione di vapore”
- Impianti a pompa di calore, vedi
  - “Impianti a compressione di vapore”
- Irreversibilità, 80
- Lavoro
  - di entrata e di uscita, 33
  - in un sistema chiuso, 26
  - nei processi di compressione, 58
  - nei processi di espansione, 58
  - scambi di, 23
  - tecnico in un sistema aperto, 32
  - tecnico in un sistema chiuso, 278
- Liquido sottoraffreddato, 186
- Macchine ad assorbimento
  - analisi energetica dei cicli inversi tritermici, 519
  - ciclo ad assorbimento, 511
  - coefficiente di effetto utile a pompa di calore, 513, 516
  - coefficiente di effetto utile frigorifero, 512, 514
  - generalità, 508
- Mescolamento
  - adiabatico, 249
  - di gas ideali, 223
- Miscela di gas
  - frazione di massa, 214
  - frazione molare, 214
  - ideali, 216
  - legge di Amagat, 218
  - legge di Dalton, 217
  - massa molare, 214
  - miscelazione di gas ideali, 223
  - pressione parziale, 217
  - proprietà termodinamiche delle miscele di gas ideali, 220
  - proprietà termodinamiche delle miscele di gas reali, 230
- Moto isoentropico:
  - vedi “Deflusso isoentropico”
- Motori a combustione interna, 396
- Numero di Mach, 518
- Perdite di carico, 43
- Potenza
  - tecnica utile, 38
  - totale, 39
- Potere calorifico (combustibili)



- definizioni generali, 327
- inferiore, 329
- nei sistemi chiusi, 334
- superiore, 328
- variazioni con la temperatura, 332
- Potere exergetico (combustibili)
  - definizione, 339
  - valutazione, 342
- Pressione
  - critica, 533
  - del punto critico, 188
  - di ristagno, 528
  - ridotta, 188
- Primo principio
  - relazione con il bilancio dell'energia meccanica, 97
  - referito ai parametri interni, 95
  - sistemi a deflusso monodimensionale stazionario, 56
  - sistemi aperti, 52
  - sistemi chiusi, 49
  - trasformazioni cicliche, 64
- Processi di compressione
  - compressori, 164
  - compressori alternativi, 168
  - doppia compressione, 166
- Punto critico, 176
- Punto triplo, 177
- Relazioni di Maxwell, 109
- Rendimenti di combustione, 346
- Rendimenti di conversione
  - caldaie e generatori di vapore, 350
  - camera di combustione, 353
  - cicli diretti, 65
  - cicli diretti bitermici, 308
  - definizione generale, 299
  - impianti con turbina a gas, 386
  - impianti con turbina a vapore, 458
  - impianti termici motori, 358
- Rendimenti di primo principio:
  - vedi "Rendimenti di conversione"
- Rendimenti di secondo principio:
  - vedi "Rendimenti exergetici"
- Rendimenti exergetici
  - caldaie e generatori di vapore, 350
  - camera di combustione, 354
  - cicli a pompa di calore bitermici, 311
  - cicli diretti bitermici, 308
  - cicli frigoriferi bitermici, 311
  - cicli inversi bitermici, 310
  - cicli inversi tritermici, 519
  - definizione generale, 300
  - espansioni e compressioni, 301
  - impianti a pompa di calore a compressione di vapore, 487,

- 489
- impianti con turbina a gas, 387, 391
- impianti con turbina a vapore, 459
- impianti frigoriferi a compressione di vapore, 481, 484
- impianti termici motori, 358
- scambiatori di calore, 305
- Rendimenti isoentropici
  - compressioni ed espansioni adiabatiche, 144
  - ugello di espansione, 547
- Rendimenti politropici
  - definizione, 155
  - espansione adiabatica, 158
  - compressione adiabatica, 160
- Reversibilità, 80
- Riempimento di bombole, 62
- Scale di temperatura
  - definizione, 12
  - di gas ideale, 15
  - SIPT, 17
  - termodinamica, 86
- Scambiatori di calore
  - bilancio di primo principio, 59
  - rendimenti exergetici, 305
- Secondo principio
  - sistemi aperti, 104
  - sistemi chiusi, 100
  - enunciato di Clausius, 78
  - enunciato di Kelvin-Planck, 78
- Sistema Internazionale di Unità di Misura, 3
- Sistemi di riempimento, 62
- Sistemi termodinamici
  - chiusi, 21
  - aperti, 24
- Stato critico, 533
- Stato di ristagno, 527
- Stechiometria della combustione, 317
- Temperatura
  - critica, 534
  - dei fumi, 336
  - del punto critico, 188
  - di bulbo bagnato, 246
  - di bulbo secco, 246
  - di combustione adiabatica, 339
  - di gas ideale, 15
  - di ristagno, 527
  - di rugiada dell'aria, 245
  - di rugiada dei fumi, 319
  - di saturazione adiabatica, 253
  - ridotta, 188
  - termodinamica, 86
- Titolo di un vapore, 178
- Torre evaporativa, 262
- Trasformazioni
  - irreversibili, 80
  - isobare di un gas ideale, 133
  - isocore di un gas ideale, 131

- isoterme di un gas ideale, 134
- isoentropiche di un gas ideale, 137
- politropiche, 147
- politropiche di un gas ideale, 149
- quasi statiche, 23
- reversibili, 80
- Ugello convergente, 542
- Ugello convergente-divergente, 545
- Umidificazione dell'aria
  - adiabatica, 252
  - a vapore, 254
- Umidità
  - relativa, 236
  - specifica, 235
- Unità di misura
  - cambiamento, 7
  - sistema internazionale, 3
- Valvola di laminazione, 61
- Vapore
  - saturo, 178
  - surriscaldato, 187
  - titolo, 178
- Velocità del suono
  - critica, 534
  - di ristagno, 528
  - in un fluido, 523
- Volume specifico
  - del punto critico, 190
  - ridotto, 189

SERVIZI GRAFICI EDITORIALI  
PADOVA - OTTOBRE 2007

Il volume è scritto per le necessità didattiche dei corsi di Fisica Tecnica tenuti all'Università di Udine per allievi ingegneri meccanici, gestionali e civili. La trattazione risulta particolarmente semplice in quanto non trascura alcun "passaggio" nelle dimostrazioni ed illustra gli argomenti, tradizionalmente più ostici, con molti esempi di applicazione. La scelta dei contenuti è determinata dalle esigenze dei corsi successivi, con particolare riguardo ai corsi di Energetica, Macchine ed Impianti Tecnici. La presentazione è strutturata in modo da consentire l'individuazione di vari percorsi didattici abbreviati che possono non comprendere, ad esempio, il bilancio dell'energia meccanica, le relazioni di Maxwell, l'analisi exergetica, alcuni approfondimenti sui cicli ed il moto dei fluidi comprimibili. Pertanto, il testo può venire utilizzato anche nei corsi di laurea triennale ed in quelle situazioni, ormai frequenti, nelle quali l'insegnamento dell'intera Fisica Tecnica deve venir compreso in un solo modulo didattico.

**Gianni Comini** è professore ordinario di Fisica Tecnica nella Facoltà di Ingegneria dell'Università di Udine. È autore di numerosi volumi a carattere scientifico, didattico e divulgativo e di oltre 160 pubblicazioni, molte delle quali apparse su riviste scientifiche internazionali.

€ 30,00  
IVA COMPRESA

ISBN 88-86281-25-0