

EQUAZIONI DELL'ACUSTICA

G. Comini

24 settembre 2003

1 Generalità

Nell'accezione più generale, l'acustica si occupa della generazione, propagazione e rivelazione delle onde elastiche in gas, liquidi e solidi anche se qui ci si limita, essenzialmente, allo studio delle onde sonore nei fluidi. Le onde sonore, come tutte le onde elastiche, si manifestano con moti oscillatori locali che si propagano con la velocità del suono nel mezzo stesso, purché il mezzo possieda massa ed elasticità non nulle. La massa consente, infatti, di trasferire quantità di moto, e quindi energia meccanica, da punto a punto, mentre l'elasticità tende a riportare le particelle oscillanti nella configurazione d'equilibrio, e quindi consente di mantenere il moto. Gas, liquidi e solidi sono tutti caratterizzati da massa ed elasticità non nulle ma presentano comportamenti elastici diversi: solo elasticità di compressione i fluidi, anche elasticità di taglio i solidi. Conseguenza importante è che in gas e liquidi si possono avere solo onde sonore longitudinali, con oscillazioni nella sola direzione di propagazione del suono, mentre nei solidi si possono avere sia onde sonore longitudinali, come nei fluidi, sia onde sonore trasversali, con oscillazioni nella direzione perpendicolare a quella di propagazione del suono. Ovviamente, lo studio delle onde sonore nei fluidi riveste un'importanza preponderante per l'acustica in quanto l'orecchio umano, entro ben determinati limiti di frequenza, è uno strumento rivelatore delle onde longitudinali di pressione che si propagano nel fluido aria.

Quando sono investite da un'onda sonora, le particelle di fluido oscillano intorno alla posizione d'equilibrio con spostamenti, nella direzione di propagazione dell'onda, caratterizzati da *velocità di particella* locali abbastanza ridotte. Tuttavia, come si è già osservato, le perturbazioni si propagano con una velocità molto elevata che viene definita *velocità del suono*. Le oscillazioni delle particelle inducono variazioni di densità, e quindi di pressione, nelle regioni interessate al fenomeno sonoro. La differenza tra la pressione totale e la pressione statica media viene detta *pressione sonora* perché le sue variazioni nel tempo vengono percepite come suoni dall'orecchio umano nell'intervallo di frequenze compreso tra 20 e 20000 hertz.

Le equazioni generali alle derivate parziali che governano le distribuzioni delle velocità di particella e delle pressioni sonore nei fluidi sono il principio di conservazione della massa,

e le equazioni di trasporto della quantità di moto. Nei paragrafi che seguono ci si occupa, appunto, di tali equazioni e delle condizioni al contorno necessarie per la loro soluzione.

2 Conservazione della Massa

Le equazioni che governano la conservazione della massa nei fluidi in ogni punto di un generico volume V , racchiuso da una superficie A , sono ottenute a partire dall'equazione generale di bilancio, seguendo il procedimento illustrato nella Sezione 5.2 del testo di *Trasmissione del calore*. La conservazione locale della massa è sinonimo di *continuità* in quanto implica che non vi siano discontinuità, tipo *pozzi* o *sorgenti* di fluido, nel dominio di definizione del problema. Pertanto l'equazione di conservazione locale della massa è spesso definita equazione di continuità. Nella forma vettoriale più generale l'equazione di conservazione locale della massa, od equazione di continuità, viene scritta come

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial \theta} = -\nabla \cdot (\rho_t \mathbf{w}_t) \quad (1)$$

dove $\rho_t = \rho_0 + \rho$ è la densità totale, somma della densità statica media ρ_0 e delle variazioni di densità ρ associate alla propagazione delle onde sonore, $\mathbf{w}_t = \mathbf{w}_0 + \mathbf{w}$ è il vettore velocità totale, somma della velocità di attraversamento \mathbf{w}_0 e della velocità di particella \mathbf{w} , e θ è la variabile temporale. Tenendo conto delle definizioni ed eseguendo le derivazioni indicate nella Equazione (1), si ottiene

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial \theta} + \frac{\partial \rho}{\partial \theta} = \rho \nabla \cdot \mathbf{w} + \mathbf{w} \nabla \rho \quad (2)$$

Nell'ipotesi, qui accettata, di densità statica media praticamente costante si ha

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial \theta} + \frac{\partial \rho}{\partial \theta} = \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \quad (3)$$

e, nell'ipotesi aggiuntiva di velocità di attraversamento media abbastanza uniforme, si può porre con ottima approssimazione

$$\rho \nabla \cdot \mathbf{w} + \mathbf{w} \nabla \rho \cong \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{w} + \mathbf{w}_0 \nabla \rho \quad (4)$$

Tenendo conto delle (3) e (4), l'Equazione (2) può quindi essere scritta nella forma linearizzata

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta} = -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{w} - \mathbf{w}_0 \nabla \rho \quad (5)$$

che può tornare utile quando si studiano i fenomeni di propagazione sonora nei mezzi in movimento con velocità \mathbf{w}_0 non trascurabili. Nel caso di un dominio in cui non vi è alcun flusso di attraversamento, tuttavia, l'equazione di continuità può essere ulteriormente semplificata ponendo $\mathbf{w}_0 = 0$. Si ottiene così l'espressione

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta} = -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{w} \quad (6)$$

che sarà utilizzata nel seguito.

Attese le regole del calcolo vettoriale l'Equazione (6) può, a sua volta, essere scritta nella forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta} = -\rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (7)$$

dove u e v sono le componenti della velocità di particella, rispettivamente secondo l'asse x e l'asse y .

3 Conservazione della Quantità di Moto

Le equazioni che esprimono la conservazione della quantità di moto in un fluido sono le equazioni di Navier-Stokes la cui derivazione è stata illustrata, ad esempio, nella Sezione 1.4 del testo di *Fondamenti di Termofluidodinamica Computazionale*. Nella rappresentazione vettoriale, le equazioni di Navier-Stokes possono essere scritte in forma non conservativa come

$$\rho_t \frac{\partial \mathbf{w}_t}{\partial \theta} + \rho_t \mathbf{w}_t \cdot \nabla \mathbf{w}_t = -\nabla p_t + \rho_t \mathbf{g} + \nabla \cdot \left\{ \mu \left[\nabla \mathbf{w}_t + (\nabla \mathbf{w}_t)^T \right] \right\} \quad (8)$$

dove $p_t = p_0 + p$ è la pressione totale, somma di pressione idrostatica media p_0 e di variazioni di pressione p associate alle onde sonore, μ è la viscosità dinamica, e \mathbf{g} è il vettore accelerazione di gravità. Nelle situazioni qui esaminate, la viscosità del fluido può giocare un ruolo non del tutto trascurabile solo nelle vicinanze delle pareti solide e nella propagazione del suono su lunghe distanze. Pertanto, nella maggior parte dei casi di interesse pratico, l'ultimo termine

al secondo membro della (8) può essere trascurato trasformando le equazioni di Navier-Stokes nelle equazioni di Eulero

$$\rho_t \frac{\partial \mathbf{w}_t}{\partial \theta} + \rho_t \mathbf{w}_t \cdot \nabla \mathbf{w}_t = -\nabla p_t + \rho_t \mathbf{g} \quad (9)$$

Al secondo membro della (9) si può depurare la pressione dalla componente idrostatica ponendo

$$\tilde{p} = p_t + \rho_t g H \quad (10)$$

dove H è la distanza da un piano isolivello, misurata nella stessa direzione ma in verso opposto di \mathbf{g} . In questo modo risulta

$$\nabla \tilde{p} = \nabla p_t + \rho_t g \nabla H = \nabla p_t - \rho_t g \frac{\mathbf{g}}{g} = \nabla p_t - \rho_t \mathbf{g} \quad (11)$$

ovvero

$$-\nabla p_t + \rho_t \mathbf{g} = -\nabla \tilde{p} \quad (12)$$

Infine, procedendo in analogia alla sezione precedente, si possono trascurare le variazioni temporali e spaziali della velocità di attraversamento, e si possono linearizzare i coefficienti dei due termini al primo membro assumendo $\rho_t \cong \rho_0$ e $\rho_t \mathbf{w}_t \cong \rho_0 \mathbf{w}_0$. In questo modo le equazioni di Eulero (9) possono venire espresse nella forma

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \theta} + \rho_0 \mathbf{w}_0 \cdot \nabla \mathbf{w} = -\nabla p \quad (13)$$

che può tornare utile quando si studiano i fenomeni di propagazione sonora nei mezzi in movimento con velocità \mathbf{w}_0 non trascurabili. Nel caso di un dominio in cui non vi è alcun flusso di attraversamento, tuttavia, le equazioni di Eulero possono venir ulteriormente semplificate, ponendo $\mathbf{w}_0 = 0$. Si ottiene così l'espressione

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \theta} = -\nabla p \quad (14)$$

che sarà utilizzata nel seguito.

Attese le regole del calcolo vettoriale l'Equazione (14) può, a sua volta, essere scritta sotto forma di sistema di due equazioni

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (15)$$

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial \theta} = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (16)$$

dove u e v sono le componenti della velocità di particella, rispettivamente secondo l'asse x e l'asse y .

4 Velocità del Suono

Nelle ipotesi in cui ci si pone, la propagazione del suono è un processo senza attriti e, con buona approssimazione, adiabatico. Pertanto, come discusso nella Sezione 14.2 del testo di *Termodinamica Applicata*, tale processo può essere considerato isoentropico ovvero ad entropia $s = cost$. Di conseguenza vale la relazione

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \quad (17)$$

dove c è la velocità di propagazione del suono nel mezzo. Di conseguenza, nella situazione qui considerata, risulta anche

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad (18)$$

e sostituendo nell'Equazione (6) si ottiene

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial \theta} = -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{w} \quad (19)$$

ovvero un'equazione di conservazione della massa, o equazione di continuità, opportunamente modificata. A questo punto è interessante notare che un'espressione analoga alla (19) viene utilizzata nelle procedure di calcolo agli elementi finiti del tipo *penalty*, per stimare direttamente la pressione nei fluidi *incomprimibili* a partire dal termine $(\nabla \cdot \mathbf{w})$. Nei fluidi effettivamente incomprimibili la variazione di densità con la pressione sarebbe nulla e, di conseguenza, la velocità del suono sarebbe infinita. Nei metodi tipo *penalty*, ovviamente, ci si limita ad assegnare al termine c^2 un valore molto grande al fine di approssimare il comportamento incomprimibile. Ovviamente nel caso di propagazione sonora nell'aria, considerata un gas ideale, si ha

$$c^2 = k \frac{p}{\rho} = k R T \quad (20)$$

dove $k = 1,4$ è il rapporto tra i calori specifici a pressione ed a volume costante, $R \cong 0,287$ kJ/(kg K) è la costante del gas, e T è la temperatura assoluta.

Al solito, attese le regole del calcolo vettoriale, l'Equazione (19) può essere scritta nella forma

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial \theta} = -\rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (21)$$

dove u e v sono le componenti della velocità di particella, rispettivamente secondo l'asse x e l'asse y .

5 Regime Transitorio

L'equazione di Eulero semplificata (14) e l'equazione di continuità modificata (19) possono essere opportunamente combinate tra loro per ottenere le equazioni delle onde sonore in regime transitorio, nelle forme di uso più comune che sono riferite alla pressione, al potenziale di velocità ed al vettore degli spostamenti di particella. La scelta della pressione ha motivazioni evidenti in quanto la maggior parte dei rivelatori di suono, a cominciare dall'orecchio umano, sono sensibili alle variazioni di pressione. La scelta del potenziale di velocità è giustificata, come vedremo, dalla relativa facilità con cui si possono formulare le condizioni al contorno per questa variabile. Infine, la scelta del vettore degli spostamenti può tornare utile in problemi di accoppiamento fluido-parete.

5.1 Equazioni d'onda

Per ottenere l'equazione d'onda riferita alla pressione, occorre eliminare la velocità \mathbf{w} tra le Equazioni (14) e (19). A questo scopo si deriva rispetto al tempo l'Equazione (19) e si utilizza l'Equazione (14), ottenendo

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} = -\rho_0 \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \theta} \right) = -\rho_0 \nabla \cdot \left(-\frac{1}{\rho_0} \nabla p \right) = \nabla^2 p \quad (22)$$

ovvero l'espressione

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} = \nabla^2 p \quad (23)$$

che rappresenta l'equazione delle onde sonore, in regime transitorio, nella variabile pressione.

Al solito, attese le regole del calcolo vettoriale, l'Equazione (23) può essere scritta nella forma

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \quad (24)$$

dove i simboli hanno il significato prima definito.

Se si preferisce operare in termini di velocità, occorre partire dalla constatazione che, in assenza di viscosità, il campo di moto è irrotazionale. Pertanto il campo delle velocità ammette un potenziale ϕ tale che

$$\mathbf{w} = \nabla \phi \quad (25)$$

Sostituendo la definizione (25) nell'equazione di Eulero semplificata (14), ed invertendo l'ordine di derivazione, si ottiene

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \theta} = \rho_0 \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla \phi) = \nabla \left(\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = -\nabla p \quad (26)$$

Quindi deve necessariamente essere

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad (27)$$

A questo punto si possono sostituire la definizione (25) e l'espressione (27) nell'equazione di continuità modificata (19) ottenendo

$$-\rho_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = -\rho_0 c^2 \nabla \cdot \nabla \phi = -\rho_0 c^2 \nabla^2 \phi \quad (28)$$

ovvero l'espressione

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = \nabla^2 \phi \quad (29)$$

che rappresenta l'equazione delle onde sonore, in regime transitorio, nella variabile potenziale di velocità.

Al solito, attese le regole del calcolo vettoriale, l'Equazione (29) può essere scritta nella forma

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad (30)$$

dove i simboli hanno il significato più volte richiamato.

Infine, in problemi che comportino un accoppiamento fluido-parete, può risultare necessario operare in termini di vettore spostamento \mathbf{s} . In tal caso si ha

$$\mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} \quad (31)$$

e, sostituendo nella (19) si ottiene

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial \theta} = -\rho_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla \cdot \mathbf{s}) \quad (32)$$

cioé

$$p = -\rho_0 c^2 \nabla \cdot \mathbf{s} \quad (33)$$

A questo punto, si può sostituire la definizione (31) al primo membro dell'equazione di Eulero (14) tenendo conto, al secondo membro, del risultato (33)

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \theta} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial \theta^2} = -\nabla p = \rho_0 c^2 \nabla^2 \mathbf{s} \quad (34)$$

Dal secondo e dal quarto membro si ottiene così l'espressione che rappresenta l'equazione vettoriale delle onde sonore, in regime transitorio, nella variabile spostamento

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial \theta^2} = \nabla^2 \mathbf{s} \quad (35)$$

Si noti che la (35) dà luogo ad un sistema di tante equazioni identiche quante sono le componenti dello spostamento. Ad esempio, nel caso di problemi bidimensionali si ha

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s_x}{\partial \theta^2} = \nabla^2 s_x \quad (36)$$

e

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s_y}{\partial \theta^2} = \nabla^2 s_y \quad (37)$$

Non vi sono quindi vantaggi ad operare in termini di spostamento se non quando si ha a che fare con problemi di accoppiamento fluido parete.

5.2 Soluzioni delle equazioni d'onda

Con riferimento ad un'onda che si propaga nella direzione \mathbf{n} , le equazioni d'onda possono essere scritte come prodotto di operatori. Ad esempio l'equazione d'onda per la pressione può essere fattorizzata come

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} = \left(\mathbf{n} \cdot \nabla + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\mathbf{n} \cdot \nabla - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) p = 0 \quad (38)$$

Pertanto, essa sarà soddisfatta imponendo una delle due condizioni

$$\left(\frac{\partial}{\partial n} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) p = \frac{\partial p}{\partial n} + \frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \quad (39)$$

o

$$\left(\frac{\partial}{\partial n} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) p = \frac{\partial p}{\partial n} - \frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \quad (40)$$

Le soluzioni della (39) devono avere una forma del tipo $p(n - c\theta)$, ovvero devono dipendere dalla variabile $\xi = n - c\theta$. Infatti, applicando le regole di derivazione delle funzioni di funzione si ha

$$\frac{\partial p}{\partial n} + \frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial n} + \frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} = \frac{\partial p}{\partial \xi} \cdot 1 + \frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial \xi} \cdot (-c) \equiv 0 \quad (41)$$

Pertanto le soluzioni della (39) corrispondono ad onde progressive che si allontanano dalla sorgente ed all'istante θ si trovano nella posizione $n = c\theta$. Con procedura analoga si dimostra che le soluzioni della (40) devono avere una forma del tipo $p(n + c\theta)$, ovvero devono dipendere

dalla variabile $\xi = n + c\theta$. Di conseguenza le soluzioni della (40) corrispondono ad onde regressive che si avvicinano alla sorgente ed all'istante θ si trovano nella posizione $n = -c\theta$.

Ovviamente conclusioni del tutto analoghe valgono anche per l'equazione d'onda scritta in termini di potenziale di velocità.

5.3 Condizioni al contorno per le equazioni d'onda

Generalmente, le condizioni che implicano un'interazione tra fluido e parete sono di tipo periodico nella variabile temporale. Quindi, per motivi che appariranno chiari tra poco, il loro esame in dettaglio viene rinviato alla sezione seguente. Qui basta dire che le condizioni più utilizzate sono quelle che legano l'accelerazione, derivata temporale seconda dello spostamento, alla derivata normale della pressione. Esse si ricavano moltiplicando per il versore \mathbf{n} della normale il secondo e terzo membro della (34)

$$\mathbf{n} \cdot \nabla p = \frac{\partial p}{\partial n} = -\rho_0 \mathbf{n} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial \theta^2} \quad (42)$$

ed implicano che la derivata normale della pressione sia pari al prodotto della densità media del fluido per la componente normale dell'accelerazione.

Le altre condizioni al contorno per le equazioni d'onda si possono formulare agevolmente solo nei due casi particolari di superfici perfettamente cedevoli, e quindi completamente assorbenti, e di superfici perfettamente rigide, e quindi completamente riflettenti. Nel caso di una superficie completamente assorbente si hanno condizioni al contorno del primo tipo, o di Dirichlet, per la pressione ed il potenziale di velocità e condizioni del secondo tipo, o di Neumann, per le componenti dello spostamento. Infatti, se la la pressione è identicamente uguale alla pressione media, la pressione acustica è nulla e si ha

$$p = 0 \quad (43)$$

mentre, in base alla (27) deve essere anche

$$\phi = 0 \quad (44)$$

Con pressione acustica nulla, invece, dalla (33) si ha

$$\nabla \cdot \mathbf{s} \equiv 0 \implies \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial n} \quad (45)$$

come si era anticipato.

Nel caso di una superficie completamente riflettente, si hanno condizioni al contorno del secondo tipo per la pressione ed il potenziale della velocità e condizioni del primo tipo per le componenti dello spostamento. Infatti se si ha $\mathbf{w} = 0$, in base alla (14) risulta

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} = 0 = -\nabla p \cdot \mathbf{n} \quad (46)$$

ovvero

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (47)$$

mentre, in base alla (25), si ha

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0 = \nabla \phi \cdot \mathbf{n} \quad (48)$$

ovvero

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (49)$$

Con spostamento nullo dei confini, invece, si ha

$$\mathbf{s} = 0 \quad (50)$$

come si era anticipato.

Nel caso generale di superfici parzialmente assorbenti si potrebbe, in teoria, usare condizioni al contorno del terzo tipo, o di Robin, esprimibili come

$$a \frac{\partial p}{\partial n} + bp + c = 0 \quad (51)$$

o

$$a \frac{\partial \phi}{\partial n} + b\phi + c = 0 \quad (52)$$

ovvero

$$a \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial n} + b \mathbf{s} + c = 0 \quad (53)$$

Oltre a rappresentare le superfici parzialmente assorbenti le condizioni di Robin includono, come casi particolari, le condizioni di Dirichlet ($a = c = 0$) e di Neumann ($b = c = 0$). Tuttavia la determinazione delle costanti diventa molto difficile per superfici solo parzialmente assorbenti. A rigore sarebbe, infatti, necessario descrivere matematicamente il processo di assorbimento dell'energia, risolvendo un problema elastico accoppiato fluido-parete. Nella pratica si preferisce quindi fare riferimento ad un'impedenza acustica normale di parete opportunamente definita. Poiché, come si vedrà, tale impedenza varia fortemente con la frequenza, è praticamente impossibile specificarla senza fare riferimento alle metodologie descritte nella sezione seguente.

6 Regime Quasi Stazionario

La difficoltà di esprimere condizioni al contorno realistiche e sufficientemente generali per le equazioni d'onda in transitorio, ha spinto la maggior parte degli studiosi ad occuparsi dello studio del campo acustico generato da emissioni sonore che variano nel tempo con legge periodica. In queste situazioni, dopo un transitorio più o meno lungo, la pressione sonora ed il potenziale di velocità variano, in ogni punto, con legge periodica. Molti problemi d'interesse pratico sono suscettibili di questo tipo di schematizzazione: basti pensare, ad esempio, ai rumori prodotti dalle macchine e dalle apparecchiature a funzionamento continuo. Inoltre, a condizione di prolungarsi sufficientemente nel tempo, anche i suoni emessi dagli strumenti musicali possono essere considerati sollecitazioni periodiche nel tempo. Infine non va dimenticato che, nell'acustica architettonica, il primo problema è lo studio della risposta di una sala a sollecitazioni periodiche. Il primo obiettivo, infatti, è rendere la risposta della sala il più possibile indipendente dalla frequenza. Solo dopo, e spesso con metodi meno precisi, ci si occupa del comportamento della sala durante i transitori, generalmente focalizzando l'attenzione sulla propagazione dei fronti d'onda.

6.1 Equazioni di Helmholtz

In presenza di un'emissione sinusoidale, o di una componente armonica di un'emissione periodica, conviene utilizzare una rappresentazione complessa che, per il campo delle pressioni, può essere del tipo

$$p = \operatorname{Re} (P e^{i\omega t}) \quad (54)$$

in quanto risulta

$$e^{i\omega\theta} \equiv \cos \omega\theta + i \operatorname{sen} \omega\theta \quad (55)$$

e quindi la parte reale, indicata col simbolo $\operatorname{Re}(\cdot)$, rappresenta una risposta armonica. Ancora, nella (54) si indica con

$$P = R + iI \quad (56)$$

l'ampiezza complessa delle oscillazioni di pressione, cioè una grandezza il cui modulo

$$|P| = \sqrt{R^2 + I^2} \quad (57)$$

ed argomento

$$\alpha = \arctan \frac{I}{R} \quad (58)$$

rappresentano, rispettivamente, l'ampiezza reale e lo sfasamento (rispetto alla forzante $i\omega\theta$) delle oscillazioni di pressione nel punto considerato. Ovviamente, considerazioni del tutto analoghe possono essere fatte per la rappresentazione complessa del potenziale di velocità

$$\phi = \operatorname{Re} (\Phi e^{i\omega\theta}) \quad (59)$$

e per la rappresentazione complessa del vettore degli spostamenti

$$\mathbf{S} = \operatorname{Re} (\mathbf{S} e^{i\omega\theta}) \quad (60)$$

dove Φ , omologa di P , è l'ampiezza complessa del potenziale di velocità e \mathbf{S} è il vettore delle ampiezze complesse delle componenti dello spostamento.

La rappresentazione complessa facilita le operazioni di derivazione rispetto al tempo. Infatti con riferimento, ad esempio, alla pressione si ha

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (P e^{i\omega\theta}) = i\omega (P e^{i\omega\theta}) \quad (61)$$

dove il risultato della derivata temporale è sfasato in anticipo di $\pi/2$ rispetto alla variabile primitiva, come dev'essere trattandosi di funzioni armoniche, in quanto si ha

$$e^{i(\omega\theta+\pi/2)} = e^{i\omega\theta} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i\omega \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right) = e^{i\omega\theta} (0 + i\omega) = i\omega e^{i\omega\theta} \quad (62)$$

Quindi, a tutti gli effetti pratici, ogni derivazione rispetto al tempo diventa una sostituzione di operatori

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \implies i\omega \quad (63)$$

Applicando una volta la (63), l'equazione di Eulero modificata (14) fornisce

$$i\omega \rho_0 \mathbf{W} = -\nabla P \quad (64)$$

mentre la relazione (31), tra spostamento e velocità, conduce all'espressione

$$\omega^2 \rho_0 \mathbf{S} = \nabla P \quad (65)$$

e la relazione (27), tra pressione e potenziale di velocità, consente di scrivere

$$P = -i\omega \rho_0 \Phi \quad (66)$$

dove \mathbf{S} è l'ampiezza complessa degli spostamenti e \mathbf{W} è l'ampiezza complessa delle velocità. Le relazioni (64), (65) e (66) saranno utilizzate nel paragrafo che segue per la formulazione delle condizioni al contorno.

Come si poteva dedurre anche dalla (65), applicare due volte l'operatore (63) equivale ad operare la sostituzione

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \implies -\omega^2 \quad (67)$$

in quanto il risultato è sfasato in anticipo di $\pi = \pi/2 + \pi/2$ rispetto alla variabile primitiva, e quindi ha il segno cambiato trovandosi in opposizione di fase rispetto ad essa. Pertanto, sostituendo la (54) e la (67) nell'equazione d'onda (23) per la pressione, si ottiene

$$\nabla^2 P + k^2 P = 0 \quad (68)$$

dove $k = \omega / c$ è il numero d'onda. L'equazione (68) è l'equazione di Helmholtz nella variabile ampiezza complessa P della pressione.

Per ottenere l'equazione di Helmholtz nelle variabili ampiezza potenziale di velocità ed ampiezza del vettore dello spostamento, si segue la stessa procedura utilizzata per la pressione e, ripetendo gli stessi passi, si arriva alle espressioni

$$\nabla^2 \Phi + k^2 \Phi = 0 \quad (69)$$

che è l'equazione di Helmholtz nella variabile ampiezza complessa Φ del potenziale di velocità, e

$$\nabla^2 \mathbf{S} + k^2 \mathbf{S} = 0 \quad (70)$$

che è l'equazione di Helmholtz nelle variabili ampiezza complessa delle componenti del vettore degli spostamenti.

6.2 Condizioni al contorno per le equazioni di Helmholtz

Per le equazioni di Helmholtz vengono correntemente utilizzate condizioni al contorno del primo, secondo e terzo tipo. Aniché per tipo, tuttavia, nel seguito si preferisce esaminare le condizioni utilizzate con riferimento alle problematiche di modellizzazione in domini di estensione finita. Qui non ci occupa infatti delle problematiche, ancora oggetto di ricerca, riguardanti l'utilizzazione di condizioni al contorno non riflettenti per modellare i campi acustici di estensione infinita.

Le condizioni che si utilizzano per la modellizzazione delle interazioni fluido-parete in domini di estensione limitata sono di tipo periodico nella variabile temporale. Esse possono riguardare, in alternativa, la pressione sonora

$$p(\theta) = \text{Re} (P_s e^{i\omega\theta}) \quad (71)$$

la componente normale della velocità

$$w_n(\theta) = \frac{\partial s_n}{\partial \theta} = \text{Re} (W_n e^{i\omega\theta}) = \text{Re} (i\omega S_n e^{i\omega\theta}) \quad (72)$$

o la componente normale dell'accelerazione intesa come derivata seconda temporale della componente normale dello spostamento

$$a_n(\theta) = \frac{\partial^2 s_n}{\partial \theta^2} = \operatorname{Re} (A_n e^{i\omega\theta}) = \operatorname{Re} (-\omega^2 S_n e^{i\omega\theta}) \quad (73)$$

Come si vede, tali condizioni implicano una conoscenza delle ampiezze e della pulsazione ω delle oscillazioni forzanti.

La prescrizione della pressione sonora sulla superficie esterna della sorgente dà luogo a condizioni al contorno del primo tipo, sia per la pressione sia per il potenziale di velocità. Per la pressione si ha subito

$$P = P_s \quad (74)$$

mentre per il potenziale si ricava dalla (66)

$$P_s = -\rho_0 i \omega \Phi_s \implies \Phi_s = -\frac{1}{i \omega \rho_0} P_s \quad (75)$$

Ad esempio, la prescrizione della componente normale della velocità sulla superficie esterna di una sorgente sonora dà luogo a condizioni al contorno del secondo tipo sia per la pressione sia per il potenziale di velocità. Per la pressione, facendo il prodotto scalare di entrambi i membri della (64) con il versore \mathbf{n} della normale alla superficie si ottiene

$$\frac{\partial P}{\partial n} = -i \omega \rho_0 W_n \quad (76)$$

mentre per il potenziale, facendo il prodotto scalare di entrambi i membri della definizione (25) con il versore \mathbf{n} della normale alla superficie si ottiene

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = W_n \quad (77)$$

La prescrizione, sulla superficie esterna di una sorgente sonora, della componente normale dello spostamento dà luogo a condizioni al contorno del secondo tipo sia per la pressione sia per il potenziale di velocità. Per la pressione, facendo il prodotto scalare di entrambi i membri della (65) con il versore \mathbf{n} della normale alla superficie si ottiene

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \omega^2 \rho_0 S_n \quad (78)$$

mentre per il potenziale, facendo il prodotto scalare di entrambi i membri della definizione (25) con il versore \mathbf{n} della normale alla superficie si ottiene

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = i \omega \rho_0 S_n \quad (79)$$

Nei due casi particolari di superficie perfettamente cedevole, e quindi completamente assorbente, e di superficie perfettamente rigida, e quindi completamente riflettente si hanno condizioni al contorno del tutto analoghe a quelle illustrate nella sezione precedente, con la sola variante rappresentata dalla sostituzione di p con P e di ϕ con Φ . Quindi, nel caso di una superficie completamente assorbente si hanno le condizioni al contorno del primo tipo

$$P = 0 \quad (80)$$

e

$$\Phi = 0 \quad (81)$$

Nel caso di una superficie completamente riflettente, si hanno le condizioni al contorno del secondo tipo

$$\frac{\partial P}{\partial n} = 0 \quad (82)$$

e

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad (83)$$

Nel caso generale di superficie solo parzialmente assorbente si ricorre, come si è detto, al concetto d'impedenza acustica specifica normale di parete

$$Z_n = \frac{P}{W_n} \quad (84)$$

definita come rapporto complesso, valutato nelle immediate vicinanze della parete, tra le ampiezze complesse della pressione acustica totale (risultante dalla sovrapposizione tra onda incidente ed onda riflessa), e della componente normale della velocità alla parete. Tenuto conto della definizione (84) per eliminare W_n dalla (78), che è ancora valida, si ottiene

$$\frac{\partial P}{\partial n} = -i \frac{\omega \rho_0}{Z_n} P = -i \frac{k}{\zeta} P \quad (85)$$

mentre, sostituendo la (66) nella (85) si ottiene anche

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = -i \frac{\omega \rho_0}{Z_n} \Phi = -i \frac{k}{\zeta} \Phi \quad (86)$$

dove

$$\zeta = \frac{Z_n}{Z_o} = \frac{Z_n}{\rho_0 c} \quad (87)$$

è l'impedenza specifica complessa ridotta, cioè l'impedenza specifica normale divisa per l'impedenza specifica caratteristica.

L'impedenza acustica specifica normale di parete è legata alle caratteristiche di assorbimento della parete stessa, oltre che alla frequenza ed all'angolo d'incidenza dell'onda. Tuttavia, per pareti che riflettono in maniera diffusa, la sola variabile che interessa è la frequenza. Ciò premesso, per il calcolo dell'impedenza ridotta normale dei materiali porosi in letteratura viene proposta la correlazione

$$\zeta = 1 + 9,08 \left(\frac{\epsilon}{f} \right)^{0,75} + i 11,9 \left(\frac{\epsilon}{f} \right)^{0,73} \quad (88)$$

dove f è la frequenza misurata in hertz, ed ϵ è la resistenza al flusso del materiale, definita come rapporto tra la perdita di carico nello strato di rivestimento e la portata massica specifica d'aria che lo attraversa

$$\epsilon = \frac{\Delta p}{\dot{m}/A} \quad (89)$$

con A area del rivestimento e \dot{m}/A portata massica specifica.

In base alla definizione ϵ è calcolabile come

$$\epsilon = \frac{\xi L}{\rho_0} \quad (90)$$

dove ξ è la resistività al flusso del materiale, definita come rapporto tra la perdita di carico nello strato di spessore unitario e la portata volumetrica specifica che lo attraversa

$$\xi = \frac{\Delta p/L}{\dot{V}/A} \quad (91)$$

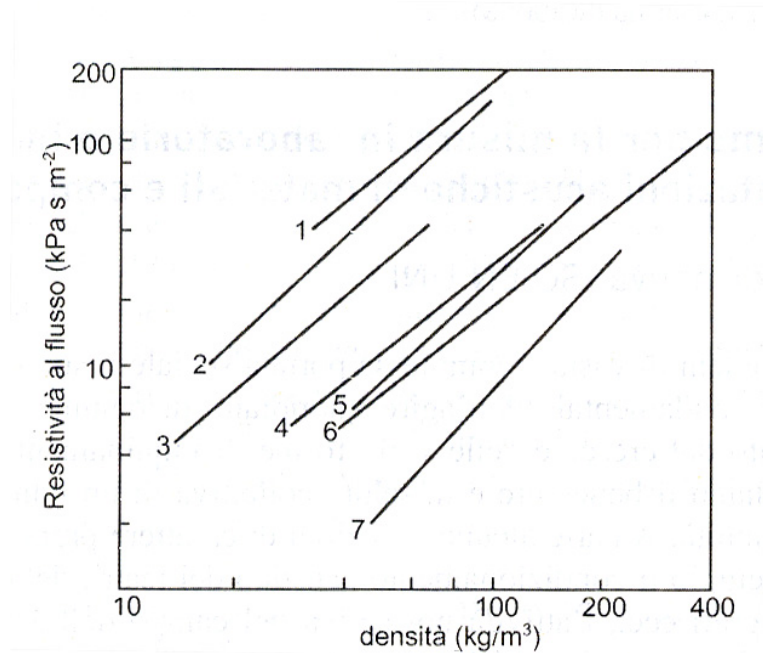


Figura 1: Andamenti della resistività al flusso in funzione della densità per alcuni materiali porosi: 1) lana di Kaoline; 2) fibra di vetro suprfine; 3) fibra di vetro Isover; 4) lana di basalto Isover; 5) lana di basalto; 6) lana minerale Sillan e 7) lana di vetro spessa.

con L spessore del campione attraversato dalla portata volumetrica specifica \dot{V}/A . Alcuni andamenti della resistività al flusso dei materiali porosi, in funzione della densità, sono riportati nella Figura 1 allegata. In base alla definizione, la resistività al flusso ξ ha dimensioni di pascal per secondo su metro quadrato [$\text{Pa s}/\text{m}^2$], e quindi la resistenza al flusso ϵ ha dimensioni di secondi alla meno uno [s^{-1}], esattamente come la frequenza f . Pertanto il parametro ϵ/f è adimensionale. Per rivestimenti acustici in opera, ϵ assume valori dell'ordine di qualche centinaia. Ad esempio, $\epsilon = 300$ è un valore citato per un controsoffitto fonoassorbente.

Si noti poi che la correlazione (88), per $\epsilon = 0$ fornisce $\zeta = 1$, ovvero $Z_n = Z_0$, valore caratteristico di una finestra aperta, mentre per $\epsilon = \infty$ fornisce $\zeta = \infty$ e $Z_n = \infty$, valore caratteristico di una superficie completamente riflettente. Infine ζ e Z_n variano in modo inversamente proporzionale alla frequenza, in armonia con i dati sperimentali che vogliono ogni materiale poroso completamente riflettente alle basse frequenze, e completamente assorbente alle alte frequenze.

6.3 Autovalori

L'equazione di Helmholtz, accompagnata dalle condizioni al contorno, può essere risolta anche nella variabile k per determinare un numero discreto m di autovalori k_j , con $j = 1, m$. Gli autovalori sono legati alle frequenze proprie del sistema $f_j = c k_j$ ed alle corrispondenti

pulsazioni $\omega_j = c k_j$. Se l'impedenza specifica normale della parete è un numero complesso, come accade di solito, anche gli autovalori sono numeri complessi del tipo $k_j = \omega_j + i \gamma_j$. In tal caso la dipendenza temporale della pressione risulta essere del tipo $[\exp(i \omega_j - \gamma_j) \theta]$ e la parte immaginaria può essere interpretata come una costante di smorzamento. Infatti, in assenza di sorgenti sonore forzanti, il campo acustico tende ad attenuarsi fino a sparire. Quest'ultimo effetto è alla base della teoria della riverberazione.