

LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA NELL'UNIVERSO

Gianni Comini

CISM - Dipartimento di Energia e Ambiente

Piazza Garibaldi 18 - 33100 Udine

gianni.comini@cism.it

Luglio 2018

1 Considerazioni cosmologiche

Nel 1917, Albert Einstein (1879-1955) pubblicò le:

- “Considerazioni cosmologiche sulla teoria della Relatività Generale”

dove sono applicate all'intero universo le equazioni del campo gravitazionale descritte nella teoria della Relatività Generale. Fino a quel momento le indagini cosmologiche si erano limitate alle osservazioni astronomiche e, di conseguenza, le “Considerazioni” segnano la nascita della Cosmologia Moderna che, dal 1917, procederà in parallelo tra modelli matematici ed osservazioni astronomiche.

Per poter applicare in cosmologia le equazioni della Relatività Generale, Einstein introdusse le ipotesi, estremamente semplificative, di omogeneità ed isotropicità dell'universo, almeno sulle grandi scale. In altre parole,

- utilizzò il **Principio Cosmologico** assumendo che, su scale dell'ordine delle centinaia di milioni di anni luce, tutte le regioni dell'universo si assomigliassero e fossero caratterizzate da proprietà uguali in tutte le direzioni.

Per comprendere la genialità di tale intuizione bisogna ricordare che l'Astronomia, con i telescopi del 1917, “vedeva” un universo:

- certamente anisotropo e non omogeneo, in quanto limitato essenzialmente alla Via Lattea, e
- pressoché statico, in quanto anche le più lontane tra le stelle osservate si muovevano a velocità molto basse.

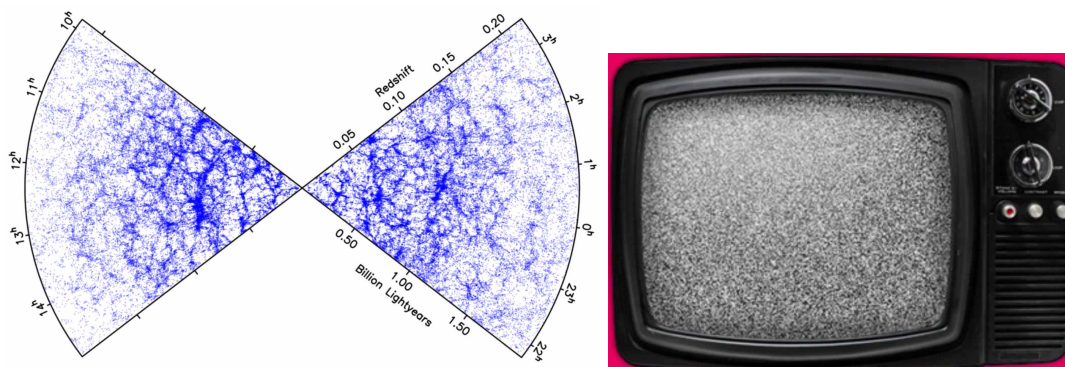


Figura 1: A sinistra: la distribuzione delle galassie è granulare su piccola scala ma diventa isotropa e omogenea su grande scala [2dF Galaxy Redshift Survey]; a destra: analogia dedicata ai diversamente giovani.

Al contrario, il Principio Cosmologico trova riscontro nelle più recenti indagini astronomiche in quanto, come illustrato nella Fig. 1, l'universo appare decisamente granulare su piccola scala, ma sempre più isotropo ed omogeneo (come i disturbi video nei vecchi televisori) man mano che la scala di osservazione aumenta.

Purtroppo (dal punto di vista di Einstein), le equazioni del campo gravitazionale, semplificate dall'applicazione del principio cosmologico, indicavano chiaramente che un universo statico sarebbe collassato sotto l'azione della gravità. (Un universo in espansione, sarebbe stato rallentato dalla gravità ma, oltre che collassare, avrebbe potuto anche continuare ad espandersi sempre più lentamente). Per avere un universo statico, come quello rilevato dalle osservazioni astronomiche del 1917, l'unica via aperta era l'introduzione nelle equazioni del campo gravitazionale di un termine che, attraverso una **costante cosmologica** Λ , contrastasse l'azione attrattiva della gravità.

Le equazioni di campo così modificate possono essere convenientemente scritte come

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(R - 2\Lambda)g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1)$$

dove il termine contenente la costante cosmologica Λ riduce la curvatura dello spazio-tempo contrastando, in un certo senso, l'azione della gravità. Tuttavia, nemmeno con l'aggiunta della costante cosmologica, le equazioni di campo della Relatività Generale garantivano un equilibrio stabile. La costante cosmologica, infatti, doveva avere un valore ben preciso e sarebbe bastata qualunque piccola perturbazione per interferire con condizioni di equilibrio assicurate faticosamente e, di conseguenza, far collassare od espandere l'universo.

D'altra parte, l'obiettivo di Einstein non era dare basi scientifiche alla Cosmologia ma, piuttosto, dimostrare l'applicabilità della sua teoria a tutte le scale dimensionali: da quella microscopica dei fotoni, da lui già considerati in quanto componenti delle radiazioni luminose (ed elettromagnetiche in generale), a quella "cosmologica" dell'universo. Non essendoci riuscito, definì "un errore" la costante cosmologica introdotta, secondo le sue stesse parole: "al solo scopo di consentire una distribuzione quasi-statica di materia compatibile con la bassa velocità delle stelle".

In realtà i grandi geni commettono solo errori fortunati e la costante cosmologica, rifiutata perché non garantiva un universo statico, è tornata recentemente in auge come spiegazione più semplice della possibilità di espansione accelerata dell'universo. In armonia con tale spiegazione, le equazioni di campo vengono attualmente scritte nella forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}(T_{\mu\nu} - \frac{\Lambda c^4}{8\pi G}g_{\mu\nu}) \quad (2)$$

dove la costante cosmologica modifica il tensore materia/energia al secondo membro.

A questo punto, rinunciando ad accuratezza e rigore, si può dire che il termine al secondo membro, contenente la costante cosmologica, schematizza lo spazio vuoto come un mezzo avente proprietà particolari. Il vuoto, infatti, viene implicitamente descritto come un fluido capace di esercitare una “pressione negativa”

$$p_\Lambda = -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \quad (3)$$

e, allo stesso tempo, caratterizzato da una densità di energia non nulla

$$\rho_\Lambda = -\frac{p_\Lambda}{c^2} = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \quad (4)$$

chiamata “energia del vuoto” o, in alternativa, “energia oscura”. La pressione negativa esercitata dal vuoto p_Λ , e la densità di energia associata al vuoto ρ_Λ sono costanti in quanto legate alla costante Λ . La relazione esistente tra loro, ricavabile dai primi due membri della (4)

$$\frac{p_\Lambda}{\rho_\Lambda c^2} = -1 \quad (5)$$

è un caso particolare della relazione generale

$$\frac{p}{\rho c^2} = w \quad (6)$$

valida per ogni fluido cosmologico. In analogia a quanto si fa nella teoria cinetica dei gas ideali, alla relazioni di tipo (6) si dà il nome di equazioni di stato. In tale contesto, in base alla (5) si ha $w_\Lambda = -1$ nel caso del vuoto, mentre si ha $w = 0$ nel caso della materia normale poiché p è associata all'energia cinetica media delle particelle normali, e non può che essere molto minore di ρc^2 .

In ultima analisi, quindi, l'introduzione della costante cosmologica consente di descrivere il vuoto come un fluido a proprietà costanti che esercita una pressione negativa p_Λ , ed è caratterizzato da una energia oscura ρ_Λ a sua volta legata alla pressione dalla (5).

Nelle relazioni (1)-(4) si è utilizzato il Sistema Internazionale di unità di misura ed, a questo proposito, può essere interessante osservare che

- il tensore di Riemann $R_{\mu\nu}$ e lo scalare di curvatura R si misurano in $[m^{-2}]$;
- il tensore metrico $g_{\mu\nu}$ è adimensionale;
- il tensore materia/energia $T_{\mu\nu}$ si misura in joule per metro cubo $[J m^{-3}]$;

- sia la pressione p sia il prodotto di una densità per una velocità al quadrato (ad esempio: ρc^2), si misurano in chilogrammi su metro per secondo al quadrato [$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$];
- $c = 2,9979 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ e $G = 6,6743 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg s}^2)$ indicano, rispettivamente, la velocità della luce e la costante gravitazionale di Newton.

Di conseguenza

- la costante cosmologica Λ si misura in [m^{-2}] e, infatti, secondo le stime più recenti, si ha: $\Lambda = 1,11 \cdot 10^{-52} \text{ m}^{-2}$.

2 Il modello FLRW

Il progresso tecnologico non si arrestò al 1917 e, man mano che si resero disponibili nuovi telescopi e nuovi metodi di osservazione, le distanze osservabili nell'universo aumentarono. In questo modo, ci si rese conto del fatto che tutti i corpi celesti si stavano allontanando dalla Terra. Poiché secondo il Principio Cosmologico non esistono punti di osservazione privilegiati, questa osservazione significava che tutti i corpi celesti si allontanavano da tutti gli altri: l'universo intero era in espansione.

Per il nostro universo piano, l'espansione può essere illustrata come nella Fig. 2 a sinistra, dove si vede che le posizioni dei corpi celesti rimangono fisse rispetto a un sistema di coordinate comoventi (ovvero che si muovono insieme ai corpi), mentre le distanze tra due punti qualunque, caratterizzati da coordinate comoventi diverse, aumentano col tempo. Inoltre, come si evince dalla Fig. 2 a destra, l'espansione riguarda le distanze reciproche dei corpi celesti ma non le dimensioni dei corpi stessi (che, localmente, sono compattati dalla gravità).

Dal punto di vista di un osservatore sulla Terra, in un universo piano che si espande è conveniente esprimere le distanze mediante la relazione quantitativa

$$D = a(t)D_0 \quad (7)$$

dove D è la distanza di un generico corpo celeste al tempo t , D_0 è la distanza al tempo presente t_0 e $a(t)$ è un fattore scala (adimensionale) per il quale si ha $a(t_0) = 1$.

Le equazioni di Einstein, semplificate dall'applicazione del Principio Cosmologico, furono risolte per la prima volta nel 1922 dal fisico e matematico russo Alexander Friedmann (1888-1925). La soluzione di Friedmann riguarda un universo omogeneo e isotropo nello spazio e, di conseguenza, in esse l'unica variabile è quella temporale: le equazioni della relatività generale, infatti, si riducono ad una coppia di equazioni differenziali ordinarie dove la variabile temporale è rappresentata dal fattore di scala $a(t)$.

Le equazioni originarie di Friedmann furono modificate a più riprese dopo il 1922. Tra le modifiche "importanti" si possono citare quelle apportate, già nel 1927, dal gesuita e astronomo belga Georges Lemaître (1894-1966) il quale, indipendentemente dal lavoro di Friedmann (che non conosceva), ipotizzò un universo in continua espansione e, di conseguenza, propose di incorporare la costante cosmologica nelle equazioni stesse. Un'ulteriore importante modifica riguardò la forma delle equazioni di Friedmann che

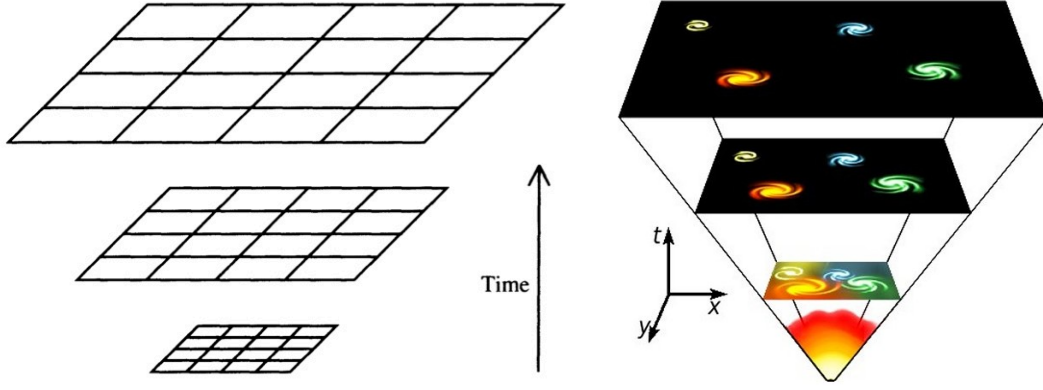


Figura 2: Espansione di un universo piano. A sinistra: il sistema di coordinate comoventi è “trasportato” dall’espansione e i diversi punti mantengono i valori di tali coordinate [A. Liddle, *An Introduction to Modern Cosmology*]. A destra: l’espansione riguarda le distanze tra i corpi celesti ma non le dimensioni dei corpi stessi, compattati dalla gravità [The Physics of the Universe].

fu adeguata alla “metrica” (ovvero alla descrizione geometrica dell’universo) dovuta ad Howard Robertson (1903-1961) e Arthur Walker (1909-2001). [Come implicitamente ammesso nella Fig. 2, il nostro è un universo piano nel quale la metrica di Robertson-Walker si semplifica considerevolmente riducendosi, in pratica, alla sola Eq. (7)].

Nella loro versione corrente, le equazioni di Friedmann vengono, di solito, indicate col nome di Modello FLRW (Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker) in quanto incorporano la costante cosmologica, come suggerito da Lemaître, e utilizzano la metrica di Robertson e Walker. Con riferimento al Sistema Internazionale di Unità di Misura (SI), le due equazioni del Modello FLRW si possono scrivere nelle forme:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{1}{3}\Lambda c^2 \quad (8)$$

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi G\rho(1+3w) + \frac{1}{3}\Lambda c^2 \quad (9)$$

dove un puntino indica la derivata temporale prima (velocità) e due puntini indicano la derivata temporale seconda (accelerazione): pertanto, il fattore di scala adimensionale a implica che \dot{a} si misuri in $[s^{-1}]$ e \ddot{a} si misuri in $[s^{-2}]$.

Nelle equazioni (8) e (9), la densità ρ è intesa in senso relativistico (senza distinguere tra materia vera e propria ed energia) e, quindi, si misura in $[kg\ m^{-3}]$. La curvatura Gaussiana k , che compare nella (8), è definita come il prodotto delle due curvature principali misurate in due direzioni ortogonali:

$$k = \frac{1}{r_1} \frac{1}{r_2} \quad (10)$$

Di conseguenza, in un universo piano si ha: $k = 0$, essendo $r_1 = r_2 \cong \infty$ (e, da questo punto in poi, nella prima equazioni di Friedmann si ometterà, in quanto nullo, il termine

contente k). Infine, la costante w che compare nella (9) è adimensionale poiché definita dalla equazione di stato (6).

Come si può facilmente verificare, le precedenti scelte di unità di misura fanno sì che tutti i termini delle equazioni (8) e (9) abbiano la dimensione di secondi alla meno due [s^{-2}].

2.1 Inserimento della costante cosmologica

In armonia con l'interpretazione corrente della costante cosmologica, esplicitata nelle relazioni (3)-(6), si ha

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}\Lambda c^2 = \frac{8}{3}\pi G \rho_\Lambda \quad (11)$$

Pertanto, dalla prima equazione di Friedmann (8), posto $k = 0$, si ottiene

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8}{3}\pi G \rho + \frac{8}{3}\pi G \rho_\Lambda = \frac{8}{3}\pi G \sum_1^2 \rho_i = \frac{8}{3}\pi G \rho_{tot} \quad (12)$$

dove si ha: $\rho_1 = \rho$ e $\rho_2 = \rho_\Lambda$, mentre $\rho_{tot} = \rho_1 + \rho_2$ è la densità totale, somma delle densità di materia e di energia del vuoto.

Sempre in armonia con l'interpretazione corrente della costante cosmologica esplicitata nelle relazioni (3)-(6), si ha anche

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\Lambda c^2 &= -\frac{1}{3}\frac{\Lambda c^2}{2}(-2) = -\frac{4}{3}\pi G \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}(1-3) \\ &= -\frac{4}{3}\pi G \rho_\Lambda \left(1 + 3\frac{p_\Lambda}{\rho_\Lambda c^2}\right) = -\frac{4}{3}\pi G \rho_\Lambda (1 + 3w_\Lambda) \end{aligned} \quad (13)$$

Pertanto, dalla seconda equazione di Friedmann (9) si ottiene

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi G \rho (1 + 3w) - \frac{4}{3}\pi G \rho_\Lambda (1 + 3w_\Lambda) = -\frac{4}{3}\pi G \sum_1^2 \rho_i (1 + 3w_i) \quad (14)$$

dove si ha ancora: $\rho_1 = \rho$ e $\rho_2 = \rho_\Lambda$, oltre che $w_1 = w = 0$ e $w_2 = w_\Lambda = -1$.

In ultima analisi, tutto accade come se nel modello FLRW, in aggiunta al componente materia, operasse un altro componente non fisico: il vuoto, caratterizzato dalla costante cosmologica che, a sua volta, dà luogo alla densità di energia ρ_Λ e alla pressione negativa p_Λ . I due termini, tuttavia, non sono intercambiabili in quanto la pressione negativa del vuoto compare solo nella seconda equazione dove, attraverso \ddot{a} , può influenzare unicamente l'accelerazione nel movimento di espansione dell'universo.

2.2 Interpretazione Newtoniana delle equazioni di Friedmann

Con riferimento alla Figura 3, si consideri la porzione di universo delimitata dalla sfera con centro nel punto O, dove si trova l'osservatore, e raggio pari alla distanza D alla quale

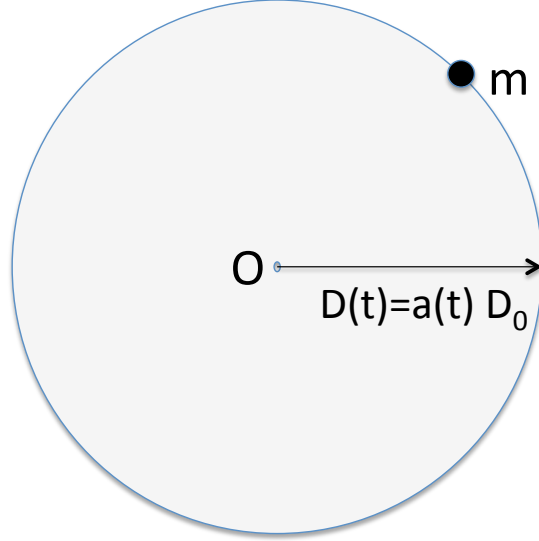


Figura 3: Sfera con centro nel punto O in cui si trova l'osservatore, e raggio pari alla distanza D alla quale si colloca una generica massa unitaria $m = 1$.

si colloca una generica massa unitaria $m = 1$. Se l'universo si espande, o contrae, in base alla (7) si ha

$$D = a(t)D_0 \quad \Rightarrow \quad a(t) = \frac{D_0}{D}$$

con il solito significato dei simboli. In un universo piano come il nostro si ha $k = 0$ e, di conseguenza, si può partire dalla prima equazione di Friedmann scritta nella forma (12) e procedere ad alcune modifiche algebriche facilmente riconoscibili (moltiplicazione dei due termini per $ma^2D_0^2$ e moltiplicazione e divisione aggiuntive del secondo termine per aD_0). In questo modo si ottiene

$$\frac{1}{2}m\dot{a}^2D_0^2 - \frac{4}{3}\pi G\rho_{tot}a^2D_0^2\frac{aD_0}{aD_0}m = 0 \quad (15)$$

A questo punto è facile convincersi che il primo termine della nuova equazione rappresenta l'energia cinetica posseduta da m

$$\frac{1}{2}m\dot{a}^2D_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 = E_{cin} = me_{cin} \quad (16)$$

dove $e_{cin} = v^2/2$ è l'energia cinetica per unità di massa m .

Nel secondo termine

$$-\frac{4}{3}\pi G\rho_{tot}a^2D_0^2\frac{aD_0}{aD_0} = -\frac{4}{3}\pi G\rho_{tot}a^3D_0^3\frac{1}{D} = -\frac{M}{D} \quad (17)$$

è il rapporto, cambiato di segno, tra la massa M e la distanza/raggio D della sfera. Pertanto, il secondo termine può essere scritto anche nella forma

$$-\frac{4}{3}\pi G\rho_{tot}a^2D_0^2\frac{aD_0}{aD_0} = -m\frac{GM}{D} = U_{grav} = mu_{grav} \quad (18)$$

dove U_{grav} è l'energia potenziale gravitazionale posseduta da m , e $u_{grav} = -GM/D$ è l'energia potenziale gravitazionale per unità di massa. (Come è noto dalla Meccanica Newtoniana, una massa sferica M genera al suo esterno lo stesso campo gravitazionale generato da una pari massa M posta al centro della sfera. Inoltre, una massa m sulla superficie di tale sfera non risente dell'attrazione gravitazionale di masse esterne alla sfera stessa).

Per quanto riguarda la determinazione quantitativa dell'energia potenziale gravitazionale posseduta da m nel punto a distanza D dal centro della sfera, può essere utile richiamarsi al significato fisico di tale energia. L'energia potenziale gravitazionale è pari al lavoro meccanico (negativo) che occorre spendere per portare m dal punto considerato al riferimento naturale, a distanza infinita, in cui si pone $U_{grav} = 0$ in quanto si annulla l'azione della forza attrattiva

$$F = G \frac{Mm}{D^2} \quad (19)$$

(In questo caso il lavoro è negativo poiché deve essere speso per allontanare m da O procedendo nel verso opposto alla forza di attrazione). Distinguendo tra variabile di integrazione D' e distanza D , risulta

$$U_{grav} = - \int_D^\infty m \frac{GM}{(D')^2} dD' = GMm \frac{1}{D'} \Big|_D^\infty = -\frac{1}{D} GMm \quad (20)$$

dove il potenziale gravitazionale è negativo (come il lavoro) e si oppone all'allontanamento delle due masse M ed m .

Oltre all'energia cinetica, quindi, una massa unitaria m nell'universo possiede anche energia potenziale gravitazionale. Pertanto, la prima equazione di Friedmann esprime il principio di conservazione dell'energia meccanica nell'universo, esplicitabile nella forma:

$$(e_{cin} + u_{grav})_{universo} = (e_{totale})_{universo} = 0 \quad (21)$$

A questo punto, può essere interessante rilevare che, in base alla (21), la densità totale di energia meccanica dell'universo (somma delle densità di energia cinetica e di energia potenziale gravitazionale) è pari a zero in tutti i punti. Le considerazioni, di natura anche filosofica, su questo risultato non mancano in letteratura e sono certamente interessanti. Tuttavia, una loro discussione approfondita supera gli obiettivi che qui ci si pone.

Il significato fisico della seconda equazione di Friedmann,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi G \sum_1^2 \rho_i (1 + 3w_i)$$

è chiaro di per sé: al secondo membro le densità di materia, con $w_1 = w_m = 0$, darebbe luogo ad una decelerazione ($\ddot{a} < 0$). Tale decelerazione, però, è contrastata dalla pressione negativa del vuoto, con $w_2 = w_\Lambda = -1$, eventualmente fino ad indurre una accelerazione positiva ($\ddot{a} > 0$).

3 Obiezioni al principio di conservazione dell'energia

Il principio di conservazione dell'energia è uno dei fondamenti della Fisica Classica. Non sorprende, quindi, che le equazioni cosmologiche di Einstein e, di conseguenza, le

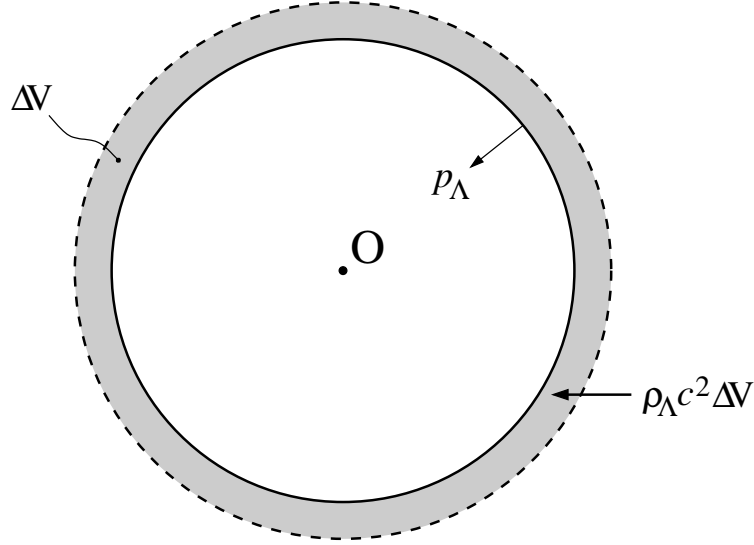


Figura 4: Espansione dell'universo, rappresentato come una sfera con centro in O, nel volume ΔV evidenziata dall'ombreggiatura.

equazioni del modello FLWR derivato da esse rispettino tale principio (come si è discusso al paragrafo precedente). D'altra parte, alcuni cosmologi non sono d'accordo sulla possibilità di applicare il principio di conservazione dell'energia all'intero universo e, in particolare, non accettano che l'energia totale dell'universo non aumenti a seguito dell'espansione nel vuoto. La loro obiezione si può così riassumere:

- la densità di energia del vuoto è costante e l'universo si espande nel vuoto; di conseguenza il volume dell'universo aumenta e la sua energia totale non può che aumentare di una quantità pari al prodotto dell'aumento di volume per la densità di energia del vuoto stesso.

Il ragionamento, apparentemente corretto, non regge all'applicazione del bilancio dell'energia meccanica che, come è noto, ha la struttura

$$\text{variazione energia totale} = \text{ingresso} - \text{uscita}$$

Per il sistema schematizzato nella Figura (4), l'ingresso è associato alla densità di energia del vuoto moltiplicata per l'aumento di volume: $\rho_\Lambda c^2 \Delta V$ mentre l'uscita è rappresentata dal lavoro compiuto dalla forze interne, pari a $p_\Lambda \Delta V$. (Si noti che sul confine esterno tratteggiato non è possibile scambiare lavoro in quanto, ovviamente, non vi sono dispositivi meccanici in grado di farlo). Si ha allora

$$\text{variazione energia totale} = \rho_\Lambda c^2 \Delta V + p_\Lambda \Delta V = 0 \quad (22)$$

essendo, in base alla (5): $p_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2$.

Dal punto di vista fisico il risultato ottenuto significa che la fornitura di energia associata all'espansione ed al conseguente guadagno di energia, viene compensata dalla spesa

di energia associata alla pressione del vuoto, che dall'interno, contrasta l'espansione stessa. Non si può, infatti, considerare nel bilancio la sola fornitura di energia (ingresso) e trascurare la simultanea distruzione di energia (uscita).

Bibliografia

S. Carroll, *Energy is Not Conserved*, Cercare su Google “Carroll Energy is Not Conserved”, 2010.

G. Comini e S. Savino, *Fondamenti Termodinamici dell'Energetica-II ed.*, SGEEditoriali, Padova, 2014.

G. Comini, *La Relatività per Non Addetti ai Lavori*, CISM, Cercare su Google “Cism Relativita”, 2018.

A. De Angelis e M.J. Martins Pimenta, *Introduction to Particle and Astroparticle Physics. Multimessenger Astronomy and its Particle Physics Foundations-II ed.*, Springer, 2018.

A. Einstein, *Considerazioni cosmologiche sulla teoria della Relatività Generale*, Preuss. Akad. Wiss. 142 (1917).

A. Fraknoi, D. Morrison e S.C. Wolff, *Astronomy*, Download gratuito, Openstax, 2016.

A. Liddle e J. Loveday, *Oxford Companion to Cosmology*, Oxford University Press, Oxford, 2009.

A. Liddle, *An Introduction to Modern Cosmology-III ed.*, Wiley, Chichester, Inghilterra, 2015.

D. Perkins, *Particle Astrophysics-II ed.*, Oxford University Press, Oxford, 2011.

M. Roots, *Introduction to Cosmology-III ed.*, Wiley, Chichester, Inghilterra, 2003.

B. Ryden, *Introduction to Cosmology-II ed.*, Cambridge University Press, Cambridge, 2017.

Ta-Pei Cheng, *Relativity, Gravitation and Cosmology. A basic introduction-II ed.*, Oxford University Press, Oxford, 2005.